

2021 学年第二学期适应性练习九年级数学测试试卷

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)

1. 下列各式中，计算结果正确的是 ()

A. $1^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

B. $1^{-1} = -1$

C. $(-1)^1 = 1$

D. $(-1)^0 = 1$

【答案】D

【解析】

【分析】把分数指数幂转化成开平方可解决 A 选项；负整数指数幂遵循“底倒，指反”的原则可解决 B 选项；利用任何数的 1 次方都等于它本身，可解决 C 选项；利用任何一个不为零的数的 0 次幂都等于 1，可解决 D 选项.

【详解】解：A、 $1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$ ，故选项错误，不符合题意；

B、 $1^{-1} = 1^1 = 1$ ，故选项错误，不符合题意；

C、 $(-1)^1 = -1$ ，故选项错误，不符合题意；

D、 $(-1)^0 = 1$ ，故选项正确，符合题意.

故选：D.

【点睛】本题考查了幂的运算，正确运用运算法则是解决本题的关键.

2. 如果把二次三项式 $x^2 + 2x + c$ 分解因式得 $x^2 + 2x + c = (x-1)(x+3)$ ，那么常数 c 的值是 ()

A. 3

B. -3

C. 2

D. -2

【答案】B

【解析】

【分析】将因式分解的结果用多项式乘法的展开，其结果与二次三项式比较即可求解.

【详解】解： $\because x^2 + 2x + c = (x-1)(x+3)$

$$\therefore x^2 + 2x + c = x^2 + 2x - 3$$

$$\text{故 } c = -3$$

故选 B

【点睛】本题考查了因式分解，多项式的乘法运算，掌握多项式乘法与因式分解的关系是解题的关键.

3. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - mx - 2 = 0$ (m 为常数) 的根的情况是 ()

A. 有两个不相等的实数根

B. 有两个相等的实数根

C. 没有实数根

D. 无法确定

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据一元二次方程根的判别式，可判断根的情况.

【详解】 解： 方程 $x^2 - mx - 2 = 0$ 的判别式为 $\Delta = (-m)^2 - 4 \times (-2) = m^2 + 8 > 0$,

$\therefore$ 该方程有两个不相等的实数根.

故选： A.

【点睛】 本题主要考查一元二次方程根的判别式，掌握根的判别式取值与方程根的情况的关系是解题的关键.

4. 去年冬季，某市连续五日最高气温及中位数、平均数如下表所示（有两个数据被遮盖）.

日期	一	二	三	四	五	中位数	平均数
最高气温（℃）	2	1	-2	0	■	■	1

其中，第五日数据与中位数依次是（ ）

A. 4, 2

B. 4, 1

C. 2, 2

D. 2, 1

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据已知平均数和前四日的数据，可求出第五日数据，然后将五个数据按顺序排列，中间的数即为中位数.

【详解】 因为平均数为 1，前四日的数据分别为 2, 1, -2, 0,

设第五日数据为 x ,

$$\text{则 } \frac{2+1-2+0+x}{5} = 1,$$

解得 $x=4$,

即第五日数据为 4,

将五日的数据按从小到大排列为： -2, 0, 1, 2, 4,

所以中位数为 1,

故选： B.

【点睛】 本题考查平均数和中位数，熟练掌握平均数的算法和中位数定义是解题的关键.

5. 下列说法中，不正确的是（ ）

A. 周长相等的两个等边三角形一定能够重合

B. 面积相等的两个圆一定能够重合

C. 面积相等的两个正方形一定能够重合

D. 周长相等的两个菱形一定能够重合

【答案】D

【解析】

【分析】利用全等图形的定义，以及等边三角形的性质，圆的性质，正方形的性质，菱形的性质分析选项即可.

【详解】解：由题意可知：

A. 周长相等的两个等边三角形一定能够重合，周长相等说明等边三角形的边长相等，且等边三角形的每一个角都为 60° ，故说法正确，不符合题意；

B. 面积相等的两个圆一定能够重合，面积相等说明圆的直径相等，故说法正确，不符合题意；

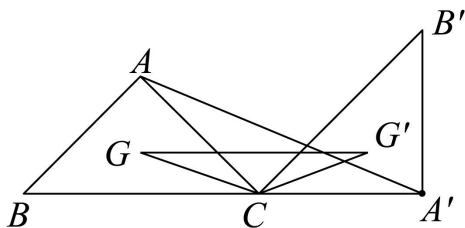
C. 面积相等的两个正方形一定能够重合，面积相等说明正方形的边长相等，且正方形的每个角都为 90° ，故说法正确，不符合题意；

D. 周长相等的两个菱形一定能够重合，周长相等虽然可以说明菱形的边长相等，但是不能保证菱形的每个角对应相等，故说法不正确，符合题意；

故选：D

【点睛】本题考查全等图形的定义，等边三角形的性质，圆的性质，正方形的性质，菱形的性质，解题的关键是掌握性质，并进行分析.

6. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC = 2\text{cm}$ ，点 G 是重心，将 $\triangle ABC$ 绕着点 C 按顺时针方向旋转，使点 A 落在 BC 延长线上的 A' 处，此时点 B 落在 B' 点，点 G 落在 G' 点. 联结 CG 、 CG' 、 GG' 、 AA' . 在旋转过程中，下列说法：① $\angle BCB' = \angle ACA'$ ；② $\triangle ACA'$ 与 $\triangle GCG'$ 相似；③ $\angle GCG' = 135^\circ$ ；④ 点 A 所经过的路程长是 $\frac{3\pi}{4}\text{cm}$. 其中正确的个数是 ()



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】根据旋转的性质即判断①，由旋转的性质可得 $\triangle AGC \cong \triangle A'G'C$ ，进而可得 $\angle GCG' = \angle ACA'$ ，

$\frac{CG}{CG'} = \frac{AC}{A'C} = 1$, 即可判断②, 根据相似三角形的性质可以判断③, 根据弧长公式计算即可判断④.

【详解】解: $\because \angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 2\text{cm}$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACA' = 135^\circ,$$

由旋转的性质可得 $\angle BCB' = \angle ACA'$, 故①正确;

如图, 连接 $AG, A'G'$,

$\because \angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 2\text{cm}$, 点 G 是重心,

$$\therefore AG \perp BC,$$

$$\therefore \angle GAC = 45^\circ,$$

由旋转的性质可得 $\triangle AGC \cong \triangle A'G'C$,

$$\therefore CG = CG', AC = A'C, \angle ACG = \angle A'CG',$$

$$\therefore \angle GCG' = \angle ACA', \frac{CG}{CG'} = \frac{AC}{A'C} = 1,$$

$\therefore \triangle ACA'$ 与 $\triangle GCG'$ 相似;

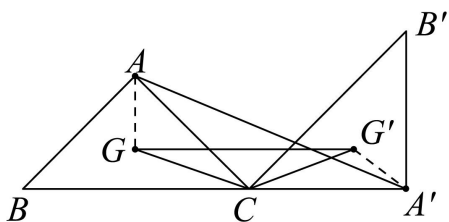
故②正确;

$$\because \triangle ACA' \sim \triangle GCG',$$

$$\therefore \angle ACA' = \angle GCG' = 135^\circ \text{ 故③正确,}$$

④点 A 所经过的路程长是 $\frac{135}{180} \pi \times 2 = \frac{3}{2} \pi \text{cm}$, 故④错误,

故选 C.



【点睛】本题考查了旋转的性质, 重心的性质, 相似三角形的性质与判定, 掌握旋转的性质是解题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 计算: $|-2| = \underline{\quad}$.

【答案】2

【解析】

【分析】根据一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；0的绝对值是0，即可求解

【详解】 $\because -2 < 0$,

$$\therefore |-2|=2$$

8. 函数 $f(x) = \frac{1}{x-2}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \neq 2$

【解析】

【分析】根据分式有意义的条件，即可得出结论.

【详解】解： $\because \frac{1}{x-2}$ 是分式，

$\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{1}{x-2}$ 的定义域是 $x \neq 2$.

故答案为： $x \neq 2$.

【点睛】本题主要考查的是分式有意义的条件.

9. 方程 $\sqrt{3x-2} = 1$ 的解是_____.

【答案】 $x=1$

【解析】

【分析】首先方程两边同时平方，把无理方程化为有理方程，再解方程即可求得

【详解】解：方程两边同时平方，得 $3x-2=1$,

解得 $x=1$,

经检验， $x=1$ 是原方程的解，

所以，原方程的解为 $x=1$.

故答案为： $x=1$.

【点睛】本题考查了无理方程的解法，熟练掌握和运用无理方程的解法是解决本题的关键，注意要检验.

10. 不等式组 $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 \leq 0 \end{cases}$ 的解集为_____.

【答案】 $-1 < x \leq 2$

【解析】

【分析】分别求出每个不等式的解集，然后求出不等式组的解集即可.

【详解】解： $\begin{cases} x+1 > 0 \text{ ①} \\ x-2 \leq 0 \text{ ②} \end{cases}$

解不等式①得： $x > -1$,

解不等式②得: $x \leq 2$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-1 < x \leq 2$,

故答案为: $-1 < x \leq 2$.

【点睛】 本题主要考查了解一元一次不等式组, 熟知解一元一次不等式组的方法是解题的关键.

11. 已知正比例函数 $y = kx$ ($k \neq 0$), 当自变量 x 的值增大时, y 的值随之减小, 那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < 0$

【解析】

【分析】 根据正比例函数的性质即可解答.

【详解】 解: $\because$ 正比例函数 $y = kx$ ($k \neq 0$), 当自变量 x 的值增大时, y 的值随之减小,

$\therefore k < 0$.

故答案为: $k < 0$.

【点睛】 本题考查了正比例函数的性质, 熟练掌握和运用正比例函数的性质是解决本题的关键.

12. 如果点 $(1, 0)$ 在一次函数 $y = kx - 1$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图像上, 那么该直线不经过第_____象限.

【答案】 二

【解析】

【分析】 将点 $(1, 0)$ 代入一次函数解析式, 即可求得 k 的值, 根据 $k = 1 > 0$ 即可求解.

【详解】 解: $\because$ 点 $(1, 0)$ 在一次函数 $y = kx - 1$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图像上,

$\therefore 0 = k - 1$,

解得 $k = 1$,

$\because k = 1 > 0, -1 < 0$,

$\therefore$ 该直线不经过第二象限,

故答案为: 二

【点睛】 本题考查了一次函数的性质, 判断一次函数经过的象限, 求得 k 得到值是解题的关键.

13. 如果从 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 24 这 8 个数中任意选取一个数, 那么取到的数恰好是素数的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 确定出素数有 3 个, 然后根据概率公式列式计算即可得解.

【详解】解：∵1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 24 这8个数中素数有2, 3, 5, 13这3个，

∴取到的数恰好是素数的概率是 $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

故答案为： $\frac{1}{2}$.

【点睛】本题考查了概率公式，用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

14. 在 $Rt\triangle ABC$ 和 $Rt\triangle DEF$ 中， $\angle C = \angle F = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ， $DF = 6$ ， $DE = 8$ ，判定这两个三角形是否相似_____。（填“相似”或“不相似”）

【答案】不相似

【解析】

【分析】求出 $EF = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7}$ ，利用 $\frac{AC}{BC} = \frac{3}{4} \neq \frac{DF}{EF} = \frac{6}{2\sqrt{7}}$ ，即可求出两个三角形不相似.

【详解】解：∵ $\angle F = 90^\circ$ ， $DF = 6$ ， $DE = 8$ ，

$$\therefore EF = \sqrt{8^2 - 6^2} = 2\sqrt{7},$$

$$\therefore \angle C = \angle F = 90^\circ, \quad AC = 3, \quad BC = 4,$$

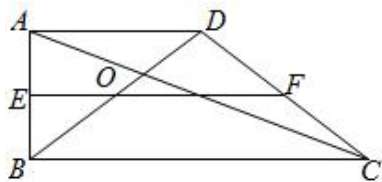
$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4} \neq \frac{DF}{EF} = \frac{6}{2\sqrt{7}},$$

∴这两个三角形不相似.

故答案为：不相似

【点睛】本题考查相似三角形的判定，勾股定理，解题的关键是掌握相似三角形的判定定理：两边成比例且夹角相等的两个三角形相似.

15. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，点 E 、 F 分别是边 AB 、 CD 的中点， $AO:OC = 1:4$ ，设 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ ，那么 $\overrightarrow{EF} =$ _____。（用含向量 $\vec{a}$ 的式子表示）



【答案】 $\frac{5}{2}\vec{a}$

【解析】

【分析】根据平行于三角形一边的直线截其它两边（或两边的延长线）所得的对应线段成比例可求出 BC ，根据中位线的性质即可求出 EF .

【详解】∵ $AD \parallel BC$ ， AC 、 BD 相交于点 O ，

$$\therefore \triangle ADO \cong \triangle CBO$$

$$\therefore AO:OC = AD:BC$$

$$\because AO:OC = 1:4,$$

$$\therefore AD:BC = 1:4,$$

$$\therefore BC = 4AD = 4\vec{a},$$

$\because$ 点 E 、 F 分别是梯形腰 AB 、 CD 的中点,

$\therefore EF$ 是梯形的中位线,

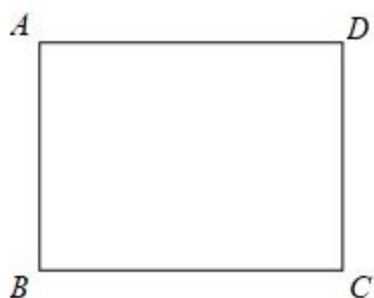
$$\therefore EF \parallel AD, \text{ 且 } EF = \frac{1}{2}(AD + BC),$$

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 4\vec{a}) = \frac{5}{2}\vec{a},$$

故答案为: $\frac{5}{2}\vec{a}$.

【点睛】 本题考查了相似三角形和中位线的性质, 熟练掌握知识是解题关键.

16. 如图, 已知矩形 $ABCD$ 的边 $AB = 6$, $BC = 8$, 现以点 A 为圆心作圆, 如果 B 、 C 、 D 至少有一点在圆内, 且至少有一点在圆外, 那么 $\odot A$ 半径 r 的取值范围是_____.

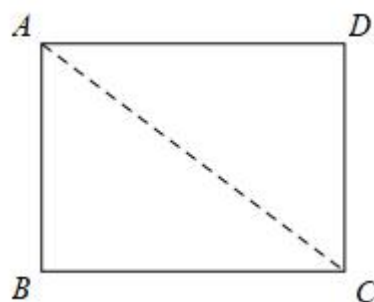


【答案】 $6 < r < 10$

【解析】

【分析】 先求出矩形对角线的长, 然后由 B 、 C 、 D 至少有一点在圆内, 且至少有一点在圆外, 即可确定 $\odot A$ 半径 r 的取值范围.

【详解】 解: 连接 AC , 如图,



$$\because AB = 6, \quad BC = 8,$$

由勾股定理可得: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$,

$\therefore AB = 6, BC = 8, AC = 10$,

又 $\because B、C、D$ 至少有一点在圆内, 且至少有一点在圆外,

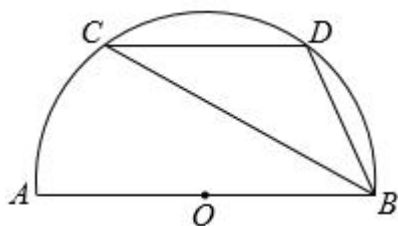
$\therefore$ 点 B 在 $\odot A$ 内, 点 C 在 $\odot A$ 外,

$\therefore 6 < r < 10$.

故答案为: $6 < r < 10$.

【点睛】 本题主要考查的是勾股定理、点与圆的位置关系.

17. 如图, 已知半圆直径 $AB = 2$, 点 $C、D$ 三等分半圆弧, 那么 $\triangle CBD$ 的面积为_____.

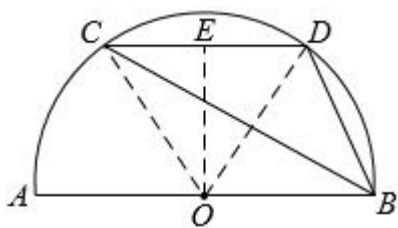


【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

【解析】

【分析】 连接 OC, OD , 过点 O 作 $OE \perp CD$, 垂足为点 E , 点 $C、D$ 三等分半圆弧, 可知 $\triangle COD$ 是等边三角形, 从而可以证得 $CD \parallel AB$, 所以 $\triangle COD$ 和 $\triangle CBD$ 的面积相等, 利用 30° 所对的直角三角形的性质和勾股定理, 即可求得面积.

【详解】 解: 连接 OC, OD , 过点 O 作 $OE \perp CD$, 垂足为点 E , 如图,



$\because$ 点 $C、D$ 三等分半圆弧,

$\therefore \angle COD = \angle BOD = 60^\circ$,

$\because OC = OD$,

$\therefore \triangle COD$ 是等边三角形,

$\therefore \angle CDO = 60^\circ$,

$$\therefore \angle CDO = \angle BOD,$$

$$\therefore CD \parallel AB,$$

$$\therefore S_{\triangle CBD} = S_{\triangle COD},$$

$$\because OE \perp CD,$$

$$\therefore \angle COE = \frac{1}{2} \angle COD = 30^\circ,$$

$$\therefore CE = \frac{1}{2} OC = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2},$$

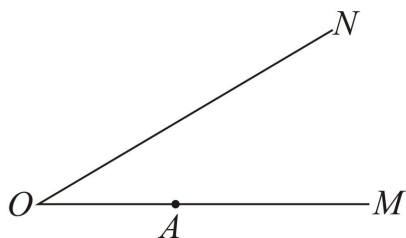
$$\text{在 } Rt\triangle COE \text{ 中, } OE = \sqrt{OC^2 - CE^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \times 2\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle CBD} = S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} CD \cdot OE = \frac{1}{2} \times 2CE \times OE = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

【点睛】 本题主要考查了弧与圆心角的关系、等边三角形的判定与性质、平行线的判定、 30° 所对的直角三角形的性质和勾股定理.

18. 如图, $\angle MON = 30^\circ$, 点 A 在 OM 上, $OA = 1$, 点 P 在 ON 上, 将 $\angle MON$ 沿 AP 翻折, 设点 O 落在点 O' 处, 如果 $AO' \perp AO$, 那么 OP 的长为_____.



$$\text{【答案】 } -1 + \sqrt{3} \text{ 或 } 1 + \sqrt{3}$$

【解析】

【分析】分情况讨论: 当 O' 在 OM 上方时, 接 OO' , 延长 AP 交 OO' 与点 B , 求出 $OB = AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 设 $OP = x$,

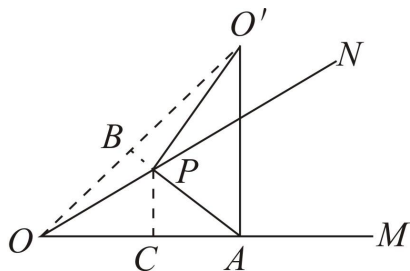
作 $PC \perp OA$ 交 OA 与点 C , 表示出 $BP = AB - AP = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}x}{2}$, 在 $Rt\triangle BOP$ 中, 由勾股定理可得:

$OB^2 + BP^2 = OP^2$, 求解即可; 当 O' 在 OM 下方时, 连接 OO' , 延长 PA 交 OO' 与点 B , 证明 $\angle OAB = 45^\circ$,

设 $OP = x$, 作 $PC \perp OM$ 交 OM 与点 C , 表示出 $PC = \frac{x}{2}$, $OC = OA + AC = 1 + \frac{x}{2}$, 在 $Rt\triangle OPC$ 中, 由

勾股定理可得： $PC^2 + OC^2 = OP^2$ ，求解即可。

【详解】解：当 O' 在 OM 上方时，连接 OO' ，延长 AP 交 OO' 与点 B ，如图，



由题意可知： $OAP \cong O'AP$ ，则 $OA = O'A$ ， $\angle OAP = \angle O'AP$ ，

$\therefore O'A \perp OA$ ，

$\therefore \triangle OAO'$ 为等腰直角三角形，

$\therefore OA = O'A$ ， $\angle OAP = \angle O'AP$ ，

$\therefore AB \perp OO'$ ，

$\therefore \angle O'OA = 45^\circ$ ， $OA = 1$ ，

$\therefore OB = AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

设 $OP = x$ ，作 $PC \perp OA$ 交 OA 与点 C ，

$\therefore \angle MON = 30^\circ$ ，

$\therefore PC = \frac{x}{2}$ ，

$\therefore \angle CAP = 45^\circ$ ，

$\therefore AP = \frac{\sqrt{2}x}{2}$ ，即 $BP = AB - AP = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}x}{2}$ ，

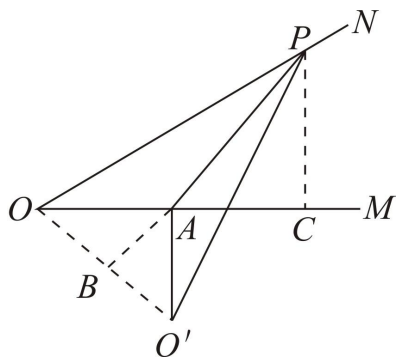
在 $\text{Rt}\triangle BOP$ 中，由勾股定理可得： $OB^2 + BP^2 = OP^2$ ，

即 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 = x^2$ ，整理得： $x^2 + 2x - 2 = 0$ ，

解得： $x_1 = -1 + \sqrt{3}$ ， $x_2 = -1 - \sqrt{3}$ （舍去），

$\therefore OP = -1 + \sqrt{3}$ ；

当 O' 在 OM 下方时，连接 OO' ，延长 PA 交 OO' 与点 B ，如图，



由题意可知: $\triangle OAP \cong \triangle O'AP$, 则 $OA = O'A$, $OP = O'P$, $\angle OPA = \angle O'PA$,

$\therefore O'A \perp OA$,

$\therefore \triangle OAO'$ 为等腰直角三角形,

$\therefore OP = O'P$, $\angle OPA = \angle O'PA$,

$\therefore PB \perp OO'$,

$\therefore \angle O'OA = 45^\circ$,

$\therefore \angle OAB = 45^\circ$,

设 $OP = x$, 作 $PC \perp OM$ 交 OM 与点 C ,

$\therefore \angle PAC = \angle OAB = 45^\circ$,

$\therefore AC = PC$,

$\therefore \angle MON = 30^\circ$,

$\therefore PC = \frac{x}{2}$,

$\therefore AC = \frac{x}{2}$, 即 $OC = OA + AC = 1 + \frac{x}{2}$,

在 $Rt\triangle OPC$ 中, 由勾股定理可得: $PC^2 + OC^2 = OP^2$,

即 $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 = x^2$, 整理得: $x^2 - 2x - 2 = 0$,

解得: $x_1 = 1 + \sqrt{3}$, $x_2 = 1 - \sqrt{3}$ (舍去),

$\therefore OP = 1 + \sqrt{3}$,

综上所述: $OP = -1 + \sqrt{3}$ 或 $OP = 1 + \sqrt{3}$.

【点睛】本题考查等腰直角三角形的判定及性质, 勾股定理, 翻转的性质, 30° 所对的直角边等于斜边的一半. 解题的关键是对 O' 的位置进行分情况讨论: 当 O' 在 OM 上方时. 当 O' 在 OM 下方时, 结合图形进行

求解.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 先化简, 再求值: $1 - \left(a + \frac{1}{a-1}\right)^2 \div \frac{a^2 - a + 1}{a^2 - 2a + 1}$. 其中, 实数 a 的相反数是它本身.

【答案】 $-a^2 + a$, 0

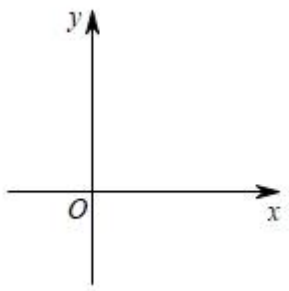
【解析】

【分析】 先根据分式的混合计算法则化简, 然后求出 a 的值, 最后代值计算即可.

【详解】 解: $1 - \left(a + \frac{1}{a-1}\right)^2 \div \frac{a^2 - a + 1}{a^2 - 2a + 1}$
 $= 1 - \left(\frac{a^2 - a + 1}{a-1}\right)^2 \div \frac{a^2 - a + 1}{(a-1)^2}$
 $= 1 - \frac{(a^2 - a + 1)^2}{(a-1)^2} \cdot \frac{(a-1)^2}{a^2 - a + 1}$
 $= 1 - (a^2 - a + 1)$
 $= 1 - a^2 + a - 1$
 $= -a^2 + a$,
 $\therefore$ 实数 a 的相反数是它本身,
 $\therefore a = -a$, 即 $a = 0$,
 $\therefore$ 原式 $= 0 + 0 = 0$.

【点睛】 本题主要考查了分式的化简求值, 相反数的定义, 熟知分式的混合计算法则是解题的关键.

20. 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图所示), 已知点 $A(2,1)$ 与点 $B\left(\frac{1}{2}, b\right)$ 都在双曲线 $y = \frac{m}{x}$ 上.



- (1) 求此双曲线的表达式及点 B 的坐标;
- (2) 判断 $\triangle OAB$ 的形状, 并求 $\angle OBA$ 的正切值.

【答案】(1) $y = \frac{2}{x}$, $B\left(\frac{1}{2}, 4\right)$;

(2) 直角三角形, $\frac{2}{3}$.

【解析】

【分析】(1) 将 A 点坐标值代入函数解析式, 求出 m 的值, 得到双曲线表达式, 再将 B 点坐标代入表达式求出 b 即可;

(2) 通过 A 、 B 坐标点分别求出线段 OA 、 OB 、 AB , 可以发现三条线段满足勾股定理, 可证明 $\triangle OAB$ 是直角三角形, 再根据正切值定义求解即可.

【小问 1 详解】

$\because$ 点 $A(2, 1)$ 在双曲线 $y = \frac{m}{x}$ 上,

$\therefore 1 = \frac{m}{2}$, 得 $m=2$,

$\therefore$ 双曲线表达式为 $y = \frac{2}{x}$;

$\because$ 点 $B\left(\frac{1}{2}, b\right)$ 在双曲线上,

$\therefore \frac{1}{2}b = 2$, 得 $b=4$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$.

【小问 2 详解】

$\because A$ 、 B 两点的坐标为 $A(2, 1)$ 、 $B\left(\frac{1}{2}, 4\right)$,

$\therefore OA^2 = 2^2 + 1^2 = 5$,

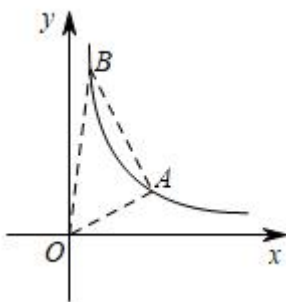
$OB^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4^2 = \frac{65}{4}$,

$AB^2 = \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + (4 - 1)^2 = \frac{45}{4}$,

$\therefore OA^2 + AB^2 = 5 + \frac{45}{4} = \frac{65}{4} = OB^2$,

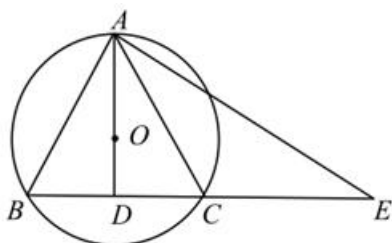
$\therefore \triangle OAB$ 是直角三角形, $\angle A = 90^\circ$,

$$\therefore \tan \angle BOA = \frac{OA}{AB} = \frac{\sqrt{OA^2}}{\sqrt{AB^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{45}{4}}} = \frac{2}{3}.$$



【点睛】本题考查了反比例函数，熟练掌握通过已知坐标点求函数解析式和通过两点坐标求线段长，熟悉勾股定理是解题关键.

21. 如图，已知 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心 O 在高 AD 上，点 E 在 BC 延长线上， $EC = AB$.



(1) 求证: $\angle B = 2\angle AEC$;

(2) 当 $OA = 2$, $\cos \angle BAO = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 求 DE 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 先根据题意得到 AD 垂直平分 BC , 得到 $AB=AC$, 则 $\angle B = \angle ACB$, 再证明 $EC=AC$, 得到 $\angle AEC = \angle CAE$, 即可利用三角形外角的性质证明结论;

(2) 先求出 $\angle BAO = 30^\circ$, 从而求出 $\angle BOD = 60^\circ$, 然后解直角三角形求出 BD , AB 的长即可得到答案.

【小问1详解】

解: $\because \triangle ABC$ 的外接圆圆心在高 AD 上,

$\therefore AD$ 垂直平分 BC ,

$\therefore AB=AC$,

$\therefore \angle B = \angle ACB$,

$\because EC=AB$,

$\therefore EC=AC$,

$$\therefore \angle AEC = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle AEC + \angle CAE,$$

$$\therefore \angle B = \angle AEC + \angle CAE = 2\angle AEC;$$

【小问 2 详解】

解：连接 OB ,

$$\therefore \cos \angle BAO = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \angle BAO = 30^\circ,$$

$$\therefore OB = OA,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BOD = \angle OBA + \angle OAB = 60^\circ,$$

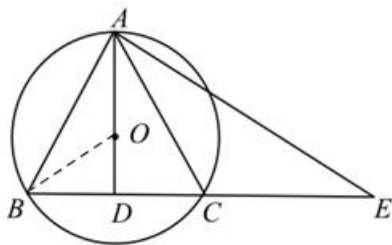
$$\therefore BD = OB \cdot \sin \angle BOD = \sqrt{3},$$

$$\therefore AC = AB = \frac{BD}{\sin \angle BAD} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AB = AC, AD \perp BC,$$

$$\therefore BD = CD,$$

$$\therefore DE = DC + CE = BD + AC = 3\sqrt{3}.$$



【点睛】本题主要考查了等腰三角形的性质与判定，根据特殊角三角函数值求度数，解直角三角形，三角形外角的性质，线段垂直平分线的性质等等，确定 $AB=AC$ 是解题的关键。

22. 现有某服装厂接到一批衬衫生产任务，该厂有甲乙两个生产衬衫的车间，甲车间要完成 3000 件，乙车间要完成 2500 件。已知甲车间比乙车间每天多生产 125 件，如果两车间同时开工，且甲车间比乙车间提前 2 天完成任务，那么甲车间和乙车间分别用了几天完成各自的任务？

【答案】 8, 10.

【解析】

【分析】设甲车间用了 x 天完成任务，则乙车间用 $x+2$ 天完成任务，根据甲比乙每天多生产 125 件可列方

程 $\frac{3000}{x} = \frac{2500}{y} + 125$ ，解出方程即可.

【详解】解：设甲车间用 x 天完成任务，则乙车间用 $(x+2)$ 天完成任务，则可列方程：

$$\frac{3000}{x} = \frac{2500}{x+2} + 125,$$

变形得 $24(x+2) = 20x + x(x+2)$ ，

整理得： $x^2 - 2x - 48 = 0$ ，

解方程得： $x_1 = 8$ 或 $x_2 = -6$ （舍去），

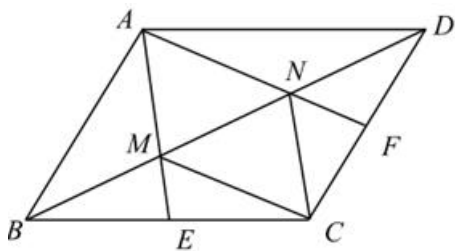
经检验 $x=8$ 是原方程的解，且符合题意，

所以乙车间完成任务用时 $8+2=10$ （天），

答：甲车间用 8 天完成任务，乙车间用 10 天完成任务.

【点睛】本题考查了分式方程解决实际问题，这里的分式方程是可化为一元二次方程的分式方程，解题关键是找出题中的等量关系列出方程. 注意检验.

23. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 分别是边 BC 、 DC 的中点， AE 、 AF 分别交 BD 于点 M 、 N ，且 $BM = MN = ND$ ，连接 CM 、 CN .



(1) 求证：四边形 $AMCN$ 是平行四边形；

(2) 如果 $AE = AF$ ，求证：四边形 $ABCD$ 是菱形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 只需要证明 NF 是 $\triangle DCM$ 的中位线， ME 是 $\triangle BCN$ 的中位线，推出 $AN \parallel CM$ ， $AM \parallel CN$ ，即可证明四边形 $AMCN$ 是平行四边形；

(2) 连接 AC 交 BD 于 O ，只需要证明四边形 $AMCN$ 是菱形，得到 $OM=ON$ ， $OA=OC$ ， $AC \perp MN$ ，从而推出 $OB=OD$ ， $AC \perp BD$ ，即可证明四边形 $ABCD$ 是菱形.

【小问 1 详解】

解： $\because BM = MN = ND$ ，

$\therefore M$ 、 N 分别是 BN 、 DM 的中点，

又 $\because E$ 、 F 分别是 BC 、 CD 的中点,

$\therefore NF$ 是 $\triangle DCM$ 的中位线, ME 是 $\triangle BCN$ 的中位线,

$$\therefore ME = \frac{1}{2}CN, ME \parallel CN, NF = \frac{1}{2}CM, NF \parallel CM,$$

$$\therefore AN \parallel CM, AM \parallel CN,$$

$\therefore$ 四边形 $AMCN$ 是平行四边形;

【小问2详解】

解: 连接 AC 交 BD 于 O ,

$\because$ 四边形 $AMCN$ 是平行四边形,

$$\therefore AM = CN, AN = CM,$$

$$\therefore ME = \frac{1}{2}CN, NF = \frac{1}{2}CM,$$

$$\therefore ME = \frac{1}{3}AE, NF = \frac{1}{3}AF,$$

$$\therefore AE = AF,$$

$$\therefore ME = NF,$$

$$\therefore AM = CN = AN = CM,$$

$\therefore$ 四边形 $AMCN$ 是菱形,

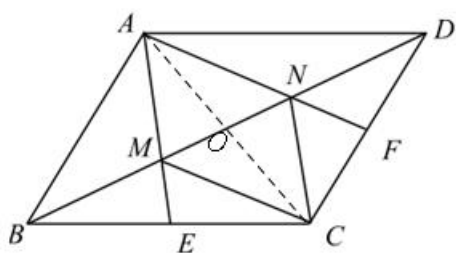
$$\therefore OM = ON, OA = OC, AC \perp MN,$$

$$\text{又} \because BM = DN,$$

$$\therefore OB = OD,$$

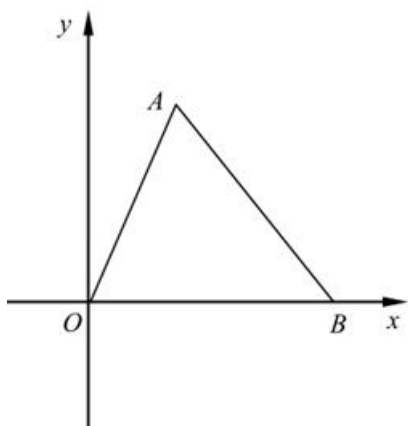
$$\text{又} \because AC \perp BD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.



【点睛】 本题主要考查了菱形的性质与判定, 平行四边形的性质与判定, 三角形中位线定理, 证明出四边形 $AMCN$ 是平行四边形是解题的关键.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 A 坐标是 $(2, 4)$, 点 B 在 x 轴上, $OB = AB$ (如图所示), 二次函数的图像经过点 O 、 A 、 B 三点, 顶点为 D .



- (1) 求点 B 与点 D 的坐标;
- (2) 求二次函数图像的对称轴与线段 AB 的交点 E 的坐标;
- (3) 二次函数的图像经过平移后, 点 A 落在原二次函数图像的对称轴上, 点 D 落在线段 AB 上, 求图像平移后得到的二次函数解析式.

【答案】 (1) 点 B 的坐标为 $(5, 0)$, 点 D 的坐标为 $(\frac{5}{2}, \frac{25}{6})$

(2) $(\frac{5}{2}, \frac{10}{3})$

(3) $y = -\frac{2}{3}(x-3)^2 + \frac{8}{3}$

【解析】

【分析】 (1) 设点 B 的坐标为 $(m, 0)$, 经过 A, B, O 三点的二次函数解析式为 $y = ax^2 + bx + c$, 先根据 $OB=AB$, 利用勾股定理求出点 B 的坐标, 然后用待定系数法求出二次函数解析式即可求出点 D 的坐标;

(2) 先求出直线 AB 的解析式, 再根据 (1) 所求得到抛物线对称轴, 即可求出点 E 的坐标;

(3) 只要求出平移后的抛物线顶点坐标即可得到答案.

【小问 1 详解】

解: 设点 B 的坐标为 $(m, 0)$, 经过 A, B, O 三点的二次函数解析式为 $y = ax^2 + bx + c$,

$$\therefore OB=AB,$$

$$\therefore m^2 = (m-2)^2 + 4^2,$$

$$\therefore m = 5,$$

$$\therefore \text{点 } B \text{ 的坐标为 } (5, 0),$$

$$\therefore \begin{cases} 4a + 2b + c = 4 \\ 25a + 5b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{10}{3} \\ c = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \text{二次函数解析式为 } y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{10}{3}x = -\frac{2}{3}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{6},$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为 } \left(\frac{5}{2}, \frac{25}{6}\right);$$

【小问 2 详解】

解：设直线 AB 的解析式为 $y = kx + b_1$,

$$\therefore \begin{cases} 2k + b_1 = 4 \\ 5k + b_1 = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -\frac{4}{3} \\ b_1 = \frac{20}{3} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的解析式为 } y = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3},$$

$$\therefore \text{二次函数解析式为 } y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{10}{3}x = -\frac{2}{3}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{6},$$

$$\therefore \text{二次函数的对称轴为直线 } x = \frac{5}{2},$$

$$\text{当 } x = \frac{5}{2} \text{ 时, } y = -\frac{4}{3} \times \frac{5}{2} + \frac{20}{3} = \frac{10}{3},$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 的坐标为 } \left(\frac{5}{2}, \frac{10}{3}\right);$$

【小问 3 详解】

解： $\because$ 二次函数的图像经过平移后，点 A 落在原二次函数图像的对称轴上，

$$\therefore \text{点 } A \text{ 向右平移了 } \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2} \text{ 个单位长度};$$

$$\therefore \text{平移后抛物线的顶点的横坐标为 } \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3,$$

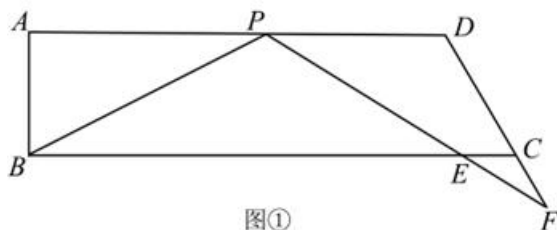
$$\text{当 } x = 3 \text{ 时, } y = -\frac{4}{3} \times 3 + \frac{20}{3} = \frac{8}{3},$$

∴ 平移后的抛物线顶点坐标为 $(3, \frac{8}{3})$,

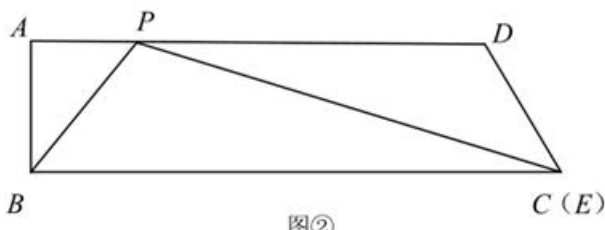
∴ 平移后的抛物线解析式为 $y = -\frac{2}{3}(x-3)^2 + \frac{8}{3}$.

【点睛】 本题主要考查了勾股定理，一次函数与二次函数综合，待定系数法求函数解析式，二次函数图象的平移等等，熟知二次函数的相关知识是解题的关键.

25. 如图①，已知梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = \sqrt{3}$ ， $AD = 6$ ， $BC = 7$ ，点 P 是边 AD 上的动点，连接 BP ，作 $\angle BPF = \angle ADC$ ，设射线 PF 交线段 BC 于 E ，交射线 DC 于 F .



图①



图②

- (1) 求 $\angle ADC$ 的度数;
- (2) 如果射线 PF 经过点 C (即点 E 、 F 与点 C 重合，如图②所示)，求 AP 的长;
- (3) 设 $AP = x$ ， $DF = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出定义域.

【答案】 (1) 120°

(2) 2 或 5 (3) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 3 (0 < x < 6)$

【解析】

【分析】 (1) 过点 D 作 $DH \perp BC$ 于点 H ，可得四边形 $ABHD$ 是矩形， $DH = AB = \sqrt{3}$ ， $CH = BC - AD = 1$ ，再通过解直角三角形即可求得 $\angle CDH$ 的度数，据此即可求得；

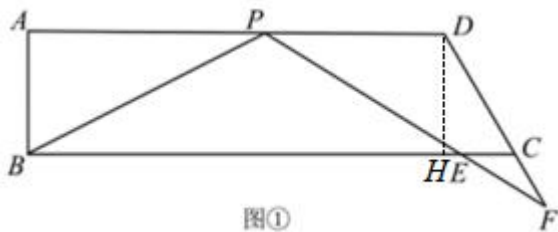
(2)，过点 C 作 $CM \perp AM$ 交 AD 的延长线于点 M ，可证得四边形 $ABCM$ 是矩形， $CM = AB = \sqrt{3}$ ， $AM = BC = 7$ ，可得 $MD = BC - AD = 1$ ， $PM = AM - AP = 7 - AP$ ， $PD = 6 - AP$ ， $PC^2 = PM^2 + CM^2 = (7 - AP)^2 + 3$ ，可证得

$\triangle DPC \sim \triangle PCB$ ，据此即可求得；

(3) 过点 P 作 $PM \perp DF$ ，交 FD 的延长线于点 M ，根据 $\angle F + \angle FPD = 60^\circ$ ， $\angle BPA + \angle FPD = 60^\circ$ ，得 $\angle F = \angle BPA$ ，利用正切函数值相等，建立等式计算即可.

【小问 1 详解】

解：如图：过点 D 作 $DH \perp BC$ 于点 H ，



$$\therefore \angle DHB = 90^\circ,$$

$\because$ 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle A = 90^\circ$,

$$\therefore \angle ABC = \angle A = 90^\circ, \quad \angle ADH = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABHD$ 是矩形, $DH = AB = \sqrt{3}$, $AD = BH = 6$,

$$\therefore CH = BC - BH = 7 - 6 = 1,$$

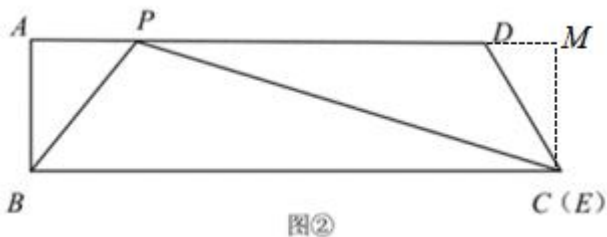
$$\text{在 } Rt\triangle DCH \text{ 中, } \tan \angle CDH = \frac{CH}{DH} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle CDH = 30^\circ, \quad CD = 2CH = 2,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ADH + \angle CDH = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ.$$

【小问 2 详解】

解: 如图: 过点 C 作 $CM \perp AM$ 交 AD 的延长线于点 M ,



$$\therefore \angle CMD = 90^\circ,$$

$\because$ 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle A = 90^\circ$,

$$\therefore \angle ABC = \angle A = 90^\circ, \quad \angle ADH = 90^\circ, \quad \angle DPC = \angle PCB,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCM$ 是矩形, $CM = AB = \sqrt{3}$, $AM = BC = 7$,

$$\therefore DM = BC - AD = 7 - 6 = 1,$$

$$\therefore CD = \sqrt{DM^2 + CM^2} = \sqrt{1 + 3} = 2, \quad PM = AM - AP = 7 - AP, \quad PD = 6 - AP,$$

$$PC^2 = PM^2 + CM^2 = (7 - AP)^2 + 3,$$

$$\text{又} \because \angle PDC = \angle CPB,$$

$$\therefore \triangle DPC \sim \triangle PCB,$$

$$\therefore \frac{PD}{CP} = \frac{CP}{BC}, \text{ 得 } PC^2 = PD \cdot BC,$$

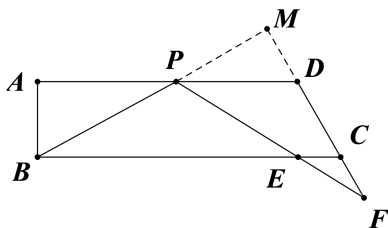
$$\text{得 } (7-AP)^2 + 3 = (6-AP) \times 7,$$

$$\text{得 } AP^2 - 7AP + 10 = 0,$$

$$\text{解得 } AP=2 \text{ 或 } AP=5.$$

【小问3 详解】

过点 P 作 $PM \perp DF$, 交 FD 的延长线于点 M ,



根据 (1) 得 $\angle ADC = \angle BPF = 120^\circ$, $AP = x$, $DF = y$, $PD = 6 - x$,

$$\therefore \angle F + \angle FPD = 60^\circ, \angle BPA + \angle FPD = 60^\circ, \angle PDM = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle F = \angle BPA, MD = PD \cos 60^\circ = \frac{6-x}{2}, MP = PD \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}(6-x)}{2}, FM = \frac{6-x}{2} + y = \frac{6-x+2y}{2},$$

$$\therefore \tan \angle F = \tan \angle BPA,$$

$$\therefore \frac{AB}{AP} = \frac{PM}{FM},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{x} = \frac{\sqrt{3}(6-x)}{2} \times \frac{2}{6-x+2y},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 3 (0 < x < 6).$$

【点睛】 本题考查了勾股定理，特殊角的三角函数值，三角函数的应用，三角形相似的判定和应用，熟练掌握三角形相似的判定，活用三角函数及其特殊角的函数值是解题的关键.

免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>)
致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群
出品的《老师请开讲》私享直播课等
增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>)
是学科网旗下智能题库，拥有小初高全
学科超千万精品试题，提供智能组卷、
拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能