

2021 学年第二学期“自适应”自测初三数学试卷初三数学试卷

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)

1. 在下列二次根式中，最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{0.1}$ B. $\sqrt{12}$ C. $\sqrt{10}$ D. $\sqrt{27}$

【答案】C

【解析】

【详解】解：A、 $\sqrt{0.1} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ，分母中含有分式，不是最简二次根式，不符合题意；

B、 $\sqrt{12} = \sqrt{3 \times 4} = 2\sqrt{3}$ ，被开方数中含有可开方的因数，不是最简二次根式，不符合题意；

C、 $\sqrt{10}$ ，被开方数中没有可开方的因数且分母中没有分式，是最简二次根式，符合题意；

D、 $\sqrt{27} = \sqrt{3 \times 9} = 3\sqrt{3}$ ，被开方数中含有可开方的因数，不是最简二次根式，不符合题意。

故答案选 C.

【点睛】本题主要考查了，最简二次根式的定义. 即：被开方数中不含可开方的因数且分母中不含根式的二次根式，称为最简二次根式. 掌握最简二次根式的定义，是解决本题的关键.

2. 不等式 $ax > b$ 可变形为 $x < \frac{b}{a}$ ，那么 a 的取值范围是().

- A. $a \leq 0$ B. $a < 0$ C. $a \geq 0$ D. $a > 0$

【答案】B

【解析】

【分析】根据不等式的基本性质即可判断.

【详解】解：由不等式 $ax > b$ 推出 $x < \frac{b}{a}$ ，可知 $a < 0$ ，

故选 B.

【点睛】本题考查的是不等式的基本性质，解答本题的关键是熟练掌握不等式的基本性质 3：不等式两边同时乘以（或除以）同一个小于 0 的整式，不等号方向改变.

3. 下列对一元二次方程 $x^2 - 3 = 0$ 根的情况判断，正确的是 ()

- A. 两个不相等实数根 B. 有两个相等实数根
C. 有且只有一个实数根 D. 没有实数根

【答案】A

【解析】

【分析】根据一元二次方程一般式 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，可知 $x^2 - 3 = 0$ 中， $a=1$ 、 $b=0$ 、 $c=-3$ 。

由根的判别式： $\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4 \times 1 \times (-3) = 12 > 0$ ，可知方程应有两个不相等的实数根。

【详解】解： $\because x^2 - 3 = 0$

$\therefore a=1$ 、 $b=0$ 、 $c=-3$

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4 \times 1 \times (-3) = 12 > 0$

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根

故选 A。

【点睛】本题主要考查知识点为，一元二次方程中根的判别式。当 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ，一元二次方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ，一元二次方程有两个相等的实数根；当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ，一元二次方程没有实数根。掌握根的判别式是解决此题的关键。

4. 某集团下属子公司 2021 年利润如下表所示，

2021 年利润（千万元）	11	3	2	1
子公司个数	1	2	4	2

那么各子公司 2021 年利润的众数是（ ）

- A. 11 千万元 B. 4 千万元 C. 2 千万元 D. 1 千万元

【答案】C

【解析】

- 【详解】解：A、表格中此数据对应个数为 1 个，不是数据中个数最多的数据，不符合题意；
B、表格中没有此数据，不符合题意；
C、表格中此数据对应个数为 4 个，是数据中个数最多的数据，符合题意；
D、表格中此数据对应个数为 2 个，不是数据中个数最多的数据，不符合题意。

故选 C。

【点睛】本题主要考查知识点为众数的定义，即在一组数据中，出现次数最多的数据。掌握众数的定义，是解决本题的关键。

5. 下列命题中，真命题是（ ）

- A. 平行四边形是轴对称图形 B. 互为补角的两个角都是锐角
C. 相等的弦所对的弧相等 D. 等腰梯形的对角线相等

【答案】D

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质，补角的性质，圆内弧、弦、圆周角的关系，等腰梯形的性质，逐项判断即可求解.

【详解】解：A、平行四边形是中心对称图形，故原命题是假命题，不合题意；

B、互为补角的两个角不一定是锐角，例如 100° 和 80° ，故原命题是假命题，不合题意；

C、同圆或等圆中，相等的弦所对的弧相等，故原命题是假命题，不合题意；

D、等腰梯形的对角线相等，故原命题是真命题，符合题意；

故选：D

【点睛】本题主要考查了平行四边形的性质，补角的性质，圆内弧、弦、圆周角的关系，等腰梯形的性质，判断命题的真假，熟练掌握相关知识点是解题的关键.

6. 在直角坐标系中，点 P 的坐标是 $(2, \sqrt{3})$ ，圆 P 的半径为 2，下列说法正确的是（ ）

A. 圆 P 与 x 轴有一个公共点，与 y 轴有两个公共点

B. 圆 P 与 x 轴有两个公共点，与 y 轴有一个公共点

C. 圆 P 与 x 轴、 y 轴都有两个公共点

D. 圆 P 与 x 轴、 y 轴都没有公共点

【答案】B

【解析】

【分析】根据圆心到 x 轴和 y 轴的距离判断圆 P 与坐标轴的位置关系即可；

【详解】解：∵点 P 的坐标是 $(2, \sqrt{3})$ ，

∴点 P 到 x 轴的距离为 $\sqrt{3}$ ，点 P 到 y 轴的距离为 2，

∵圆 P 的半径为 2， $\sqrt{3} < 2$ ，

∴点 P 到 x 轴的距离小于圆 P 的半径，点 P 到 y 轴的距离等于圆 P 的半径，

∴圆 P 与 x 轴相交，圆 P 与 x 轴有两个公共点，

∴圆 P 与 y 轴相切，圆 P 与 y 轴有一个公共点，

故选：B.

【点睛】本题考查了直线和圆的位置关系，掌握相交、相切、相离的判定方法是解题关键.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. 因式分解： $2a^2 - 4a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2a(a-2)$

【解析】

【详解】 $2a^2 - 4a = 2a(a - 2)$

8. 函数 $y = \frac{x-4}{2-x}$ 的定义域是_____.

【答案】 $x \neq 2$

【解析】

【分析】 根据分式有意义的条件是分母不为 0，即可求解.

【详解】 解：由题意得： $2-x \neq 0$ ，即 $x \neq 2$.

故答案为： $x \neq 2$.

【点睛】 本题考查了使函数有意义的自变量的取值范围的确定. 函数是整式型，自变量为全体实数；函数是分式型，自变量为使分母不为 0 的实数；二次根式型的函数的自变量为根号下的式子大于或等于 0 的实数；当函数关系式表示实际问题时，自变量不仅要使函数关系式有意义，还要使实际问题有意义.

9. 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 是实数， $k \neq 0$) 的图象在每个象限内 y 随着 x 的增大而增大，那么这个反比例函数的图象的两个分支分别在第_____象限.

【答案】 二、四

【解析】

【分析】 直接利用反比例函数的图象和性质即可得出答案.

【详解】 解： $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 图象在每个象限内 y 随着 x 的增大而增大

$\therefore k < 0$

$\therefore$ 它的图象的两个分支分别在第二、四象限

故答案为： 二，四

【点睛】 本题主要考查反比例函数的图象和性质，掌握反比例函数的图象和性质是解题的关键.

10. 方程 $1 - \sqrt{x-3} = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x = 4$

【解析】

【分析】 首先移项，两边再分别平方，最后解方程即可求得.

【详解】 解：移项，得 $\sqrt{x-3} = 1$,

两边分别平方，得 $x-3=1$,

解得 $x=4$,

经检验： $x=4$ 是原方程的解，

故答案为： $x=4$.

【点睛】 本题考查了无理方程的解法，熟练掌握和运用无理方程的解法是解决本题的关键，注意解无理方程要检验.

11. 一个布袋中有 8 个红球和 16 个黑球，这两种球除了颜色以外没有任何其他区别，从布袋中任取 1 个球是黑球的概率是_____.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 根据题意，可知存在 $8+16=24$ 种可能性，其中抽到黑球的有 16 种可能性，从而可以求出从布袋中任取 1 个球，取出黑球的概率.

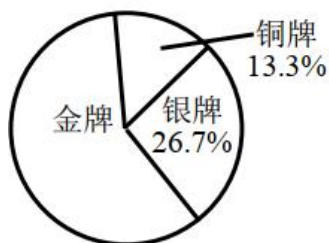
【详解】 解： $\because$ 一个布袋中放着 8 个红球和 16 个黑球，

$\therefore$ 从布袋中任取 1 个球，取出黑球的概率是 $\frac{16}{16+8} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$,

故答案为： $\frac{2}{3}$.

【点睛】 本题考查概率公式，解答本题的关键是明确题意，求出相应的概率.

12. 北京冬奥会上中国队获得奖牌情况如图所示，其中金牌为 9 块，那么中国队获得奖牌总数是_____块.



【答案】 15

【解析】

【分析】 由扇形统计图可知，金牌占奖牌总数的百分比为： $1-26.7\%-13.3\%=60\%$. 所以奖牌总数=金牌数 $\div 60\%=9\div 60\%=15$ (块).

故答案为 15.

【详解】 由扇形统计图可知：

金牌占奖牌总数的百分比为： $1-26.7\%-13.3\%=60\%$

$\therefore$ 奖牌总数= $9\div 60\%=15$ (块)

【点睛】 本题主要考查知识点为，扇形统计图. 扇形统计图的特点：能够更清晰地表示出各部分占总数的百分比. 所以掌握扇形统计图，是解决本题的关键.

13. 沿一斜坡向上走 13 米，高度上升 5 米，这个斜坡的坡度 $i=1$:_____.

【答案】 2.4

【解析】

【分析】 根据勾股定理求出此人行走的水平距离，根据坡度的概念计算即可.

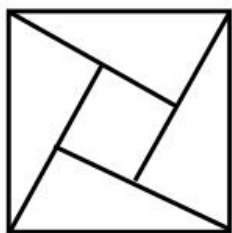
【详解】 解：由勾股定理得，此人行走的水平距离为： $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$,

则此斜坡的坡度 $i=5:12=1:2.4$,

故答案为：2.4.

【点睛】 本题考查的是解直角三角形的应用-坡度坡角问题，掌握坡度是坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比是解题的关键.

14. 2002 年在北京召开的国际数学家大会，会标是以我国古代数学家赵爽弦图为基础设计的，弦图是由四个全等直角三角形与一个小正方形拼成的大正方形（如图），如图的弦图中大正方形边长为 4，每个直角三角形较小的锐角为 30° ，那么小正方形面积为_____.

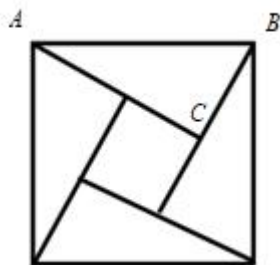


【答案】 $16 - 8\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 根据在直角三角形中，如果一个锐角等于 30° ，那么它所对的直角边等于斜边的一半，再由勾股定理可得另一直角边，于是可得直角三角形面积，根据全等三角形的面积相等计算面积差即可；

【详解】 解：设上面的直角三角形为 $Rt\triangle ABC$ ， $\angle ACB=90^\circ$,



则 $AB=4$ ， $\angle BAC=30^\circ$,

$$\therefore BC=2, AC=\sqrt{AB^2 - BC^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore Rt\triangle ABC \text{ 面积} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = 2\sqrt{3},$$

∴四个直角三角形全等,

∴四个直角三角形面积相等,

∴小正方形面积=大正方形面积-4×Rt△ABC 面积=16-8√3,

故答案为: 16-8√3;

【点睛】 本题考查了全等三角形的性质, 勾股定理, 掌握 30°直角三角形的边长关系是解题关键.

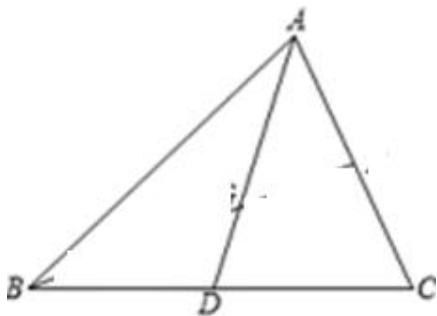
15. 已知在△ABC 中, AD 是中线, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{AD}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为_____.

【答案】 $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

【解析】

【分析】 根据题意可得 $\overrightarrow{CA} = -\vec{b}$, 从而得到 $\overrightarrow{CB} = -\vec{b} + \vec{a}$, 进而得到 $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{a})$, 即可求解.

【详解】 解: 如图,



∴ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$,

∴ $\overrightarrow{CA} = -\vec{b}$,

∴ $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -\vec{b} + \vec{a}$,

∴ AD 为中线,

∴ $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{a})$,

∴ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \vec{b} + \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

故答案为: $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

【点睛】 本题主要考查了向量的运算, 熟练掌握向量的运算法则是解题的关键.

16. 已知在△ABC 中, 点 D、E 分别在边 AB、AC 上, DE ∥ BC, 如果△ADE 和四边形 BCED 的面积分别为 4 和 5, DE = 4, 那么 BC = _____.

【答案】 6

【解析】

【分析】根据题意： $DE \parallel BC$ ，可得 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ．通过相似三角形的性质可知：两个相似三角形的

面积比等于相似比的平方．已知 $S_{\triangle ADE} = 4$ ， $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADE} + S_{\text{四边形}BCED} = 4 + 5 = 9$ ，所以 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{9}$ ，

所以相似比 $k = \frac{2}{3}$ ．所以 $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$ ，已知 $DE=4$ ，则可求出 $BC=6$ ．

【详解】如图， $\because DE \parallel BC$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

$$\therefore \text{相似比 } k = \frac{DE}{BC}$$

$$\because \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

$$S_{\triangle ADE} = 4, \quad S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADE} + S_{\text{四边形}BCED} = 4 + 5 = 9$$

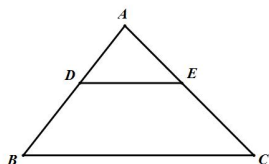
$$\therefore k^2 = \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{9}$$

$$\therefore k = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$$

$$\because DE=4$$

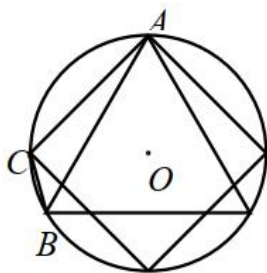
$$\therefore BC=6$$

故答案为 6.



【点睛】本题考查知识点为相似三角形的性质．两个三角形相似，则它们的面积比等于相似比的平方，它们的周长比等于相似比．掌握相似三角形的性质是解决本题的关键．

17. 如图，如果 AB 、 AC 分别是圆 O 的内接正三角形和内接正方形的一条边， BC 一定是圆 O 的内接正 n 边形的一条边，那么 $n=$ _____.

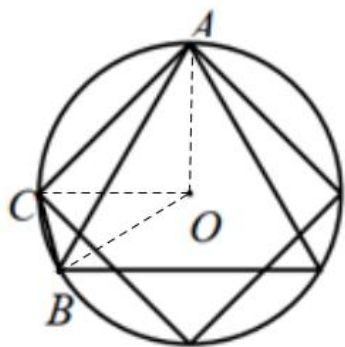


【答案】12

【解析】

【分析】连接 OA 、 OB 、 OC ，如图，利用正多边形与圆，分别计算 $\odot O$ 的内接正方形与内接正三角形的中心角得到 $\angle AOC=90^\circ$ ， $\angle AOB=120^\circ$ ，则 $\angle BOC=30^\circ$ ，然后计算即可得到 n 的值.

【详解】解：连接 OA 、 OB 、 OC ，如图，



$\because AC$ ， AB 分别为 $\odot O$ 的内接正方形与内接正三角形的一边，

$$\therefore \angle AOC = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ, \quad \angle AOB = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = \angle AOB - \angle AOC = 30^\circ,$$

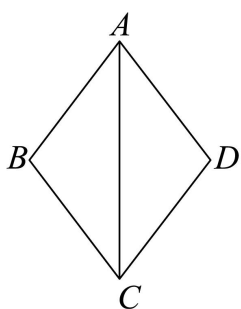
$$\therefore n = \frac{360^\circ}{30^\circ} = 12,$$

即 BC 恰好是同圆内接一个正十二边形的一边.

故答案为：12.

【点睛】本题考查了正多边形与圆：把一个圆分成 n (n 是大于 2 的自然数) 等份，依次连接各分点所得的多边形是这个圆的内接正多边形，这个圆叫做这个正多边形的外接圆；熟练掌握正多边形的有关概念.

18. 如图，菱形 $ABCD$ 中， $AB=5$ ， $AC=8$ ，把菱形 $ABCD$ 绕 A 点逆时针旋转得到菱形 $AB'C'D'$ ，其中点 B' 正好在 AC 上，那么点 C 和点 C' 之间的距离等于_____.



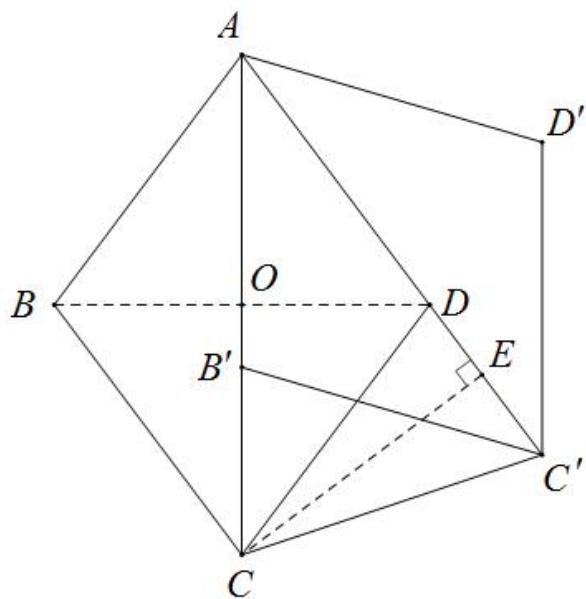
【答案】 $\frac{8\sqrt{10}}{5}$ $\neq$ $\frac{8}{5}\sqrt{10}$

【解析】

【分析】连接 BD ，交 AC 于点 O ，过点 C 作 $CE \perp AC'$ 于点 E ，先利用勾股定理求得 $OD=3$ ，利用三角函数

的定义求得 $CE = \frac{24}{5}$, $AE = \frac{32}{5}$, 再利用勾股定理即可求解.

【详解】解: 连接 BD , 交 AC 于点 O , 过点 C 作 $CE \perp AC'$ 于点 E ,



$\because$ 菱形 $ABCD$ 中, $AB=5$, $AC=8$,

$\therefore AO \perp BD$, $AO=OC=4$, $AD=AB=5$,

由勾股定理得 $OD=3$,

由旋转的性质得 $AC'=AC=8$,

$$\sin \angle OAD = \frac{OD}{AD} = \frac{CE}{AC}, \quad \cos \angle OAD = \frac{AO}{AD} = \frac{AE}{AC},$$

$$\therefore \frac{3}{5} = \frac{CE}{8}, \quad \frac{4}{5} = \frac{AE}{8},$$

$$\therefore CE = \frac{24}{5}, \quad AE = \frac{32}{5},$$

$$\therefore EC' = 8 - \frac{32}{5} = \frac{8}{5},$$

$$\therefore CC' = \sqrt{\left(\frac{24}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{8\sqrt{10}}{5},$$

故答案为: $\frac{8\sqrt{10}}{5}$.

【点睛】本题考查了旋转的性质, 菱形的性质, 勾股定理, 三角函数的定义, 熟记锐角三角函数的定义是解答此题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $12^{\frac{1}{2}} - \cot 30^\circ - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$.

【答案】 -1

【解析】

【分析】原式第一项利用分数指数幂运算法则计算，第二项利用特殊角的三角函数值化简，第三项运用负整数指数幂法则计算，最后一项利用二次根式的性质进行化简，即可得到结果.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & 12^{\frac{1}{2}} - \cot 30^\circ - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} \\ &= 2\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2 - (\sqrt{3} - 1) \\ &= 2\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} + 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

【点睛】此题考查了实数的运算，涉及的知识有：分数指数幂、负整数指数幂，特殊角的三角函数值以及二次根式的性质，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

20. 解方程: $\frac{3x-1}{x^2-1} - \frac{2x-1}{x-1} = 1$.

【答案】 $x = -\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】方程两边同乘以 $(x+1)(x-1)$ ，得到整式方程，解整式方程，把得到的根代入最简公分母检验即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \text{方程两边同乘以 } (x+1)(x-1), \text{ 得 } \frac{3x-1}{x^2-1}(x+1)(x-1) - \frac{2x-1}{x-1}(x+1)(x-1) = (x+1)(x-1), \\ & \text{即 } 3x-1 - (2x^2+x-1) = x^2-1, \end{aligned}$$

$$\text{整理得 } 3x^2 - 2x - 1 = 0,$$

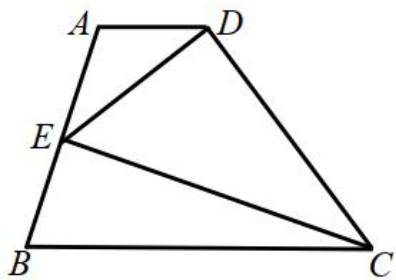
$$\text{解得: } x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{3},$$

经检验: $x_1 = 1$ 是原方程的增根, $x_2 = -\frac{1}{3}$ 是原方程的根.

$$\text{原方程的根是 } x = -\frac{1}{3}.$$

【点睛】本题考查的是可化为一元二次方程的分式方程的解法，解分式方程的步骤：①去分母；②求出整式方程的解；③检验；④得出结论.

21. 如图，梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， E 是 AB 的中点， $\angle CDE = 90^\circ$ ， $CD = 6$ ， $\tan \angle DCE = \frac{2}{3}$.



- (1) 求 CE 的长；
 (2) 求 $\angle ADE$ 的余弦.

【答案】(1) $CE = 2\sqrt{13}$

(2) $\angle ADE$ 的余弦为 $\frac{4}{5}$

【解析】

【分析】(1) 利用正切函数求得 $DE=4$ ，再利用勾股定理即可求解；

(2) 取 CD 的中点 F ，利用梯形中位线定理得到 $AD \parallel EF$ ， $\angle ADE = \angle DEF$ ，在 $Rt\triangle DEF$ 中，利用勾股定理和余弦函数的定义即可求解.

【小问 1 详解】

解： $\because \angle CDE = 90^\circ$ ， $CD = 6$ ， $\tan \angle DCE = \frac{2}{3}$ ，

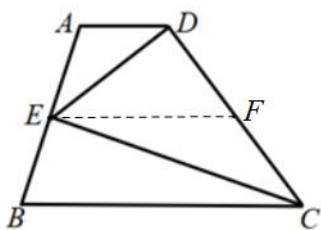
$$\therefore \frac{DE}{CD} = \frac{2}{3}, \text{ 即 } \frac{DE}{6} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore DE = 4,$$

由勾股定理得 $CE = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$ ；

【小问 2 详解】

解：取 CD 的中点 F ，连接 EF ，



$\because E$ 是 AB 的中点，

$\therefore EF$ 是梯形 $ABCD$ 的中位线，

$\therefore AD \parallel EF$ ，

$\therefore \angle ADE = \angle DEF$ ，

在 $Rt\triangle DEF$ 中， $\angle EDF = 90^\circ$ ， $DE = 4$ ， $DF = \frac{1}{2}CD = 3$ ，

由勾股定理得 $EF = 5$,

$$\therefore \cos \angle DEF = \frac{DE}{EF} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \cos \angle ADE = \frac{4}{5},$$

即 $\angle ADE$ 的余弦为 $\frac{4}{5}$.

【点睛】 本题考查了梯形的中位线，解直角三角形，熟记锐角三角函数的定义是解答此题的关键.

22. 弹簧在一定限度内，它的长度 $y(\text{cm})$ 与所挂重物的重量 $x(\text{kg})$ 是一次函数关系，下表中记录的是所挂重物的重量和其对应的弹簧长度.

重物的重量 $x(\text{kg})$	...	2	...	10	...
弹簧的长度 $y(\text{cm})$	...	13	...	17	...

(1) 求 y 关于 x 的函数关系式 (不需要写出函数的定义域);

(2) 弹簧在一定限度内挂上重物后长度不超过 25cm ，那么所挂重物的重量最多为多少?

【答案】 (1) $y = \frac{1}{2}x + 12$

(2) 所挂重物的重量最多为 26kg

【解析】

【分析】 (1) 运用待定系数法求解即可;

(2) 根据题意列出不等式求解即可.

【小问 1 详解】

设 y 关于 x 的解析式是 $y = kx + b (k \neq 0)$,

由题意得:
$$\begin{cases} 2k + b = 13 \\ 10k + b = 17 \end{cases},$$

解得: $k = \frac{1}{2}, b = 12.$

$\therefore y$ 关于 x 的解析式是 $y = \frac{1}{2}x + 12.$

【小问 2 详解】

由题意得: $y \leq 25,$

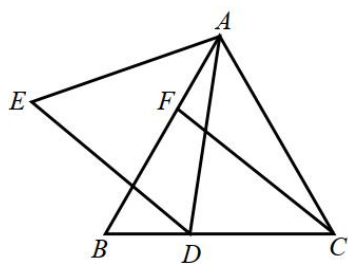
$$\therefore \frac{1}{2}x + 12 \leq 25,$$

解得: $x \leq 26$,

即所挂重物的重量最多为 26kg.

【点睛】 本题考查一次函数的应用、解一元一次不等式，解答本题的关键是明确题意，利用一次函数的性质解答.

23. 如图，已知: $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等边三角形，其中点 D 在边 BC 上，点 F 是 AB 边上一点，且 $BF = CD$.



(1) 求证: $DE \parallel CF$;

(2) 连接 DF ，设 AD 、 CF 的交点为 M ，如果 $DF^2 = FM \cdot FC$ ，求证: $DF \parallel AC$.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 先证明 $\triangle ACD \cong \triangle CBF$ ，可得 $\angle CAD = \angle BCF$ ．再由 $\triangle ADE$ 是等边三角形，可得 $\angle ADE = \angle ACB = 60^\circ$ ，从而得到 $\angle BDE = \angle CAD$ ，即可求证；

(2) 根据 $DF^2 = FM \cdot FC$ ，可得 $\triangle DFM \sim \triangle CFD$ ，从而得到 $\angle FDM = \angle FCD$ ，进而得到 $\angle FDM = \angle CAD$ ，即可求证.

【小问 1 详解】

证明: $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore AC = BC, \angle ACB = \angle B = 60^\circ,$$

$$\because CD = BF,$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBF,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle BCF.$$

$\because \triangle ADE$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ADE = \angle ACB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE + \angle BDE = \angle ACB + \angle CAD,$$

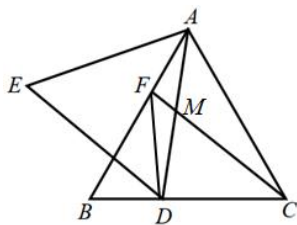
$$\therefore \angle BDE = \angle CAD,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle BCF,$$

$$\therefore DE \parallel CF;$$

【小问 2 详解】

证明：如图，



$$\therefore DF^2 = FM \cdot FC,$$

$$\therefore \frac{DF}{FM} = \frac{FC}{DF},$$

$$\therefore \angle DFM = \angle CFD,$$

$$\therefore \triangle DFM \sim \triangle CFD,$$

$$\therefore \angle FDM = \angle FCD,$$

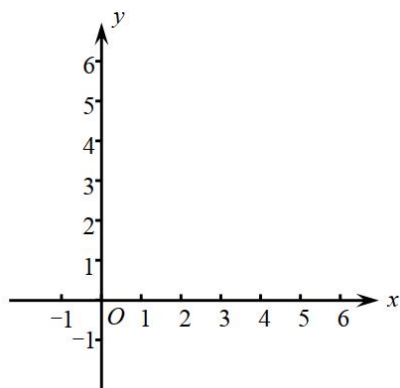
$$\therefore \angle CAD = \angle BCF,$$

$$\therefore \angle FDM = \angle CAD,$$

$$\therefore DF \parallel AC.$$

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定和性质，等边三角形的性质，全等三角形的判定和性质，熟练掌握相似三角形的判定和性质，等边三角形的性质，全等三角形的判定和性质是解题的关键。

24. 已知：在直角坐标系中直线 $y = -x + 4$ 与 x 轴、 y 轴相交于点 A 、 B ，抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 经过点 A 和点 B 。



(1) 求抛物线的解析式；

(2) 如果直线 AB 与抛物线的对称轴相交于点 C ，求 OC 的长；

(3) P 是线段 OA 上一点，过点 P 作直线 AB 的平行线，与 y 轴相交于点 Q ，把 $\triangle OPQ$ 沿直线 PQ 翻折，

点 O 的对应点是点 D ，如果点 D 在抛物线上，求点 P 的坐标.

【答案】(1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

(2) $OC = \sqrt{10}$

(3) 点 P 是坐标是 $(2\sqrt{2}, 0)$

【解析】

【分析】(1) 先根据直线 $y = -x + 4$ 求出点 A 和点 B 的坐标，再运用待定系数法求解即可；

(2) 求出抛物线的对称轴为直线 $x=1$ ，代入 $y=-x+4$ ，可求出点 C 坐标，再运用勾股定理求解即可；

(3) 设点 P 的坐标为 $(t, 0)$ ，证明四边形 $DPOQ$ 为正方形，得点 D 坐标是 (t, t) ，从而可得方程

$$t = -\frac{1}{2}t^2 + t + 4, \text{ 求解方程即可得到答案.}$$

【小问 1 详解】

直线 $y = -x + 4$ 与 x 轴、 y 轴相交于点 A 、 B ，

当 $y=0$ ，则 $-x+4=0$ ，解得， $x=4$ ，

当 $x=0$ ，则 $y=4$ ，

$$\therefore A(4, 0)、B(0, 4),$$

代入 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 得，

$$\begin{cases} -8 + 4b + c = 0 \\ c = 4 \end{cases},$$

解得， $b=1$ ， $c=4$ ，

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4.$$

【小问 2 详解】

$$\because y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{9}{2}$$

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=1$ ，

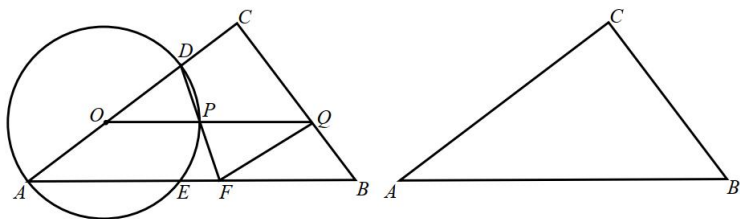
$$\text{当 } x=1 \text{ 时， } y = -1 + 4 = 3$$

$$\therefore C(1, 3),$$

$$\therefore OC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

【小问 3 详解】

圆心， OA 为半径的圆 O 与边 AC 的另一个交点是点 D ，与边 AB 的另一个交点是点 E ，过点 O 作 AB 的平行线与圆 O 相交于点 P ，与 BC 相交于点 Q ， DP 的延长线交 AB 于点 F ，连接 FQ 。



(1) 求证: $DP = EP$;

(2) 设 $OA = x$ ， $\triangle FPQ$ 的面积为 y ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出定义域；

(3) 如果 $\triangle FPQ$ 是以 FQ 为腰的等腰三角形，求 AO 的长。

【答案】(1) 见解析 (2) $y = -\frac{27}{40}x^2 + 3x (0 < x \leq 4)$

(3) 如果 $\triangle FPQ$ 是以 FQ 为腰的等腰三角形， AO 的长为 $\frac{40}{13}$ ， $\frac{200}{53}$

【解析】

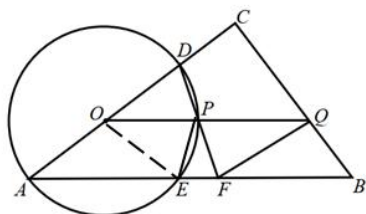
【分析】(1) 连接 OE ，根据 $OP \parallel AB$ ，可得 $\angle DOP = \angle A$ ， $\angle POE = \angle OEA$ ，从而得到 $\angle DOP = \angle POE$ ，即可求证；

(2) 作 $OM \perp AB$ ， $FN \perp PQ$ ，垂足分别为 M 、 N ，则 $OM = FN$ ，再由锐角三角函数可得 $BC = 6$ ， $AC = 8$ ， $FN = \frac{3}{5}x$ ，再证得 $\triangle COQ \sim \triangle CAB$ ，可得 $OQ = 10 - \frac{5}{4}x$ ，从而得到 $PQ = OQ - OP = 10 - \frac{9}{4}x$ ，即可求解；

(3) 分两种情况讨论：若 $FQ = PQ$ ，若 $FQ = FP$ ，即可求解。

【小问1详解】

证明：连接 OE ，



$\because OP \parallel AB$,

$\therefore \angle DOP = \angle A$, $\angle POE = \angle OEA$,

$\because OA = OE$,

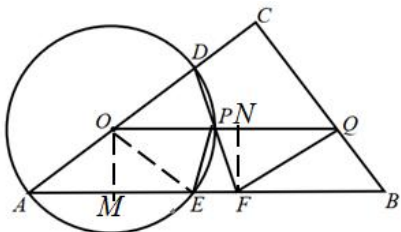
$\therefore \angle A = \angle OEA$,

$$\therefore \angle DOP = \angle POE,$$

$$\therefore DP = EP.$$

【小问2 详解】

解：作 $OM \perp AB$ ， $FN \perp PQ$ ，垂足分别为 M 、 N ，



$$\because OQ \parallel AB, OM \perp AB, FN \perp PQ,$$

$$\therefore OM = FN,$$

$$\because \text{在 } Rt\triangle ABC \text{ 中, } \angle ACB = 90^\circ, AB = 10, \sin \angle BAC = \frac{3}{5},$$

$$\therefore BC = 6, AC = 8,$$

$$\text{在 } \triangle AMO \text{ 中, } \angle AMO = 90^\circ,$$

$$\therefore OM = OA \cdot \sin \angle BAC = \frac{3}{5}x,$$

$$\therefore FN = \frac{3}{5}x,$$

$$\because OQ \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle COQ \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore \frac{OQ}{AB} = \frac{CO}{CA},$$

$$\therefore \frac{OQ}{10} = \frac{8-x}{8},$$

$$\therefore OQ = 10 - \frac{5}{4}x,$$

$$\therefore PQ = OQ - OP = 10 - \frac{5}{4}x - x = 10 - \frac{9}{4}x,$$

$$y = \frac{1}{2} \left(10 - \frac{9}{4}x \right) \cdot \frac{3}{5}x,$$

根据题意得： $2x \leq 8$,

$$\therefore x \leq 4,$$

$$\therefore y = -\frac{27}{40}x^2 + 3x (0 < x \leq 4).$$

【小问3 详解】

解：若 $FQ = PQ$,

$$\therefore \angle QPF = \angle QFP = \angle OPD = \angle ODP,$$

$$\therefore QF \parallel AC,$$

$$\therefore OQ \parallel AB,$$

$$\therefore \text{四边形 } AFQO \text{ 是平行四边形, } \angle OPD = \angle AFD,$$

$$\therefore AF = QO,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle OPD = \angle AFD,$$

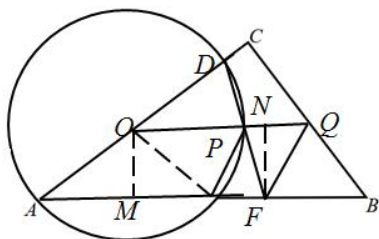
$$\therefore AF = AD = 2x,$$

$$\therefore OQ = 2x,$$

$$\therefore 2x = 10 - \frac{5}{4}x,$$

$$\therefore x = \frac{40}{13}.$$

若 $FQ = FP$, 作 $OM \perp AB$, $FN \perp PQ$, 垂足分别为 M 、 N , 则 $PN = QN$,



$$\therefore OQ \parallel AB,$$

$$\therefore \angle MOQ = \angle ONF = \angle MFN = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形 } OMFN \text{ 是矩形,}$$

$$\text{在 } \triangle AMO \text{ 中, } \angle AMO = 90^\circ, OM = \frac{3}{5}x, AM = \frac{4}{5}x,$$

$$\therefore OQ \parallel AB,$$

$$\therefore \angle OPD = \angle AFD,$$

$$\therefore OD = OP,$$

$$\therefore \angle ODP = \angle OPD,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle OPD = \angle AFD,$$

$$\therefore AF = AD = 2x,$$

$$\therefore MF = ON = 2x - \frac{4}{5}x = \frac{6}{5}x,$$

$$\therefore PN = ON - OP = \frac{1}{5}x,$$

$$\therefore PQ = \frac{2}{5}x,$$

$$\therefore OQ = \frac{7}{5}x,$$

$$\therefore \frac{7}{5}x = 10 - \frac{5}{4}x,$$

$$\text{解得: } x = \frac{200}{53}.$$

综上所述, 如果 $\triangle FPQ$ 是以 FQ 为腰的等腰三角形, AO 的长为 $\frac{40}{13}, \frac{200}{53}$.

【点睛】 本题主要考查了圆周角定理, 解直角三角形, 相似三角形的判定和性质等知识, 熟练掌握圆周角定理, 解直角三角形, 相似三角形的判定和性质等知识是解题的关键.

免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>)
致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群
出品的《老师请开讲》私享直播课等
增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>)
是学科网旗下智能题库，拥有小初高全
学科超千万精品试题，提供智能组卷、
拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能