

初三数学期末练习卷

考生注意:

1. 本试卷共 25 题, 试卷满分 150 分, 建议考试时间 100 分钟.
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列函数中, 是二次函数的是 ()

A. $y = 2x + 1$

B. $y = x^2 + 1$

C. $y = (x-1)^2 - x^2$

D. $y = \frac{1}{x^2}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的定义, 能熟记二次函数的定义是解此题的关键, 形如 $y = ax^2 + bx + c$ (a 、 b 、 c 为常数, $a \neq 0$) 的函数, 叫二次函数. 根据二次函数的定义逐个判断即可.

【详解】 解: A. $y = 2x + 1$ 是一次函数, 不是二次函数, 故此选项不符合题意;

B. $y = x^2 + 1$ 是二次函数, 故此选项符合题意;

C. $y = (x-1)^2 - x^2 = -2x + 1$ 是一次函数, 不是二次函数, 故此选项不符合题意;

D. $y = \frac{1}{x^2}$ 不是二次函数, 故此选项不符合题意;

故选: B.

2. 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$, 那么下列等式正确的是 ()

A. $\sin A = \frac{3}{5}$

B. $\cos A = \frac{3}{4}$

C. $\tan A = \frac{3}{5}$

D. $\cot A = \frac{3}{4}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题主要考查了锐角三角函数的定义, 直接利用锐角三角函数的定义分别分析得出答案.

【详解】解：如图所示：

$$\because \angle C = 90^\circ, AC = 3, BC = 4,$$

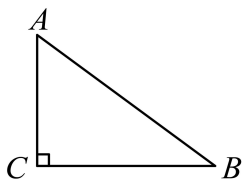
$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5,$$

$$\sin A = \frac{4}{5}, \text{ 故 A 错误;}$$

$$\cos A = \frac{3}{5}, \text{ 故 B 错误;}$$

$$\tan A = \frac{4}{3}; \text{ 故 C 错误;}$$

$$\cot A = \frac{3}{4}, \text{ 故 D 正确;}$$



故选：D.

3. 已知 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=3$ ，而且 $\vec{b}$ 和 $\vec{a}$ 的方向相反，那么下列结论中正确的是（ ）

A. $\vec{a} = 3\vec{b}$

B. $\vec{a} = -3\vec{b}$

C. $\vec{b} = 3\vec{a}$

D. $\vec{b} = -3\vec{a}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据平面向量的性质即可解决问题.

【详解】解： $\because |\vec{a}|=1, |\vec{b}|=3$ ，而且 $\vec{b}$ 和 $\vec{a}$ 的方向相反，

$$\therefore \vec{b} = -3\vec{a},$$

故选：D.

【点睛】本题考查平面向量的性质，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

4. 如果两个相似三角形的周长比为1:4，那么它们的对应角平分线的比为（ ）

A. 1:4

B. 1:2

C. 1:16

D. $1:\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据相似三角形的性质进行分析即可得到答案.

【详解】解： $\because$ 两个相似三角形的周长比为 1:4，

∴两个相似三角形的相似比为 1: 4,

∴它们的对应角平分线之比为 1: 4,

故选: A.

【点睛】 本题考查了对相似三角形性质的理解. (1) 相似三角形周长的比等于相似比. (2) 相似三角形面积的比等于相似比的平方. (3) 相似三角形对应高的比、对应中线的比、对应角平分线的比都等于相似比.

5. 下列关于二次函数 $y = -x^2 + 3$ 的图像与性质的描述, 正确的是()

A. 该函数图像经过原点

B. 该函数图像在对称轴右侧部分是上升的

C. 该函数图像的开口向下

D. 该函数图像可由函数 $y = x^2$ 的图像平移得到

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的性质, 二次函数图象上点的坐标特征, 根据二次函数的性质逐一判断即可得.

【详解】 解: ∵二次函数 $y = -x^2 + 3$,

∴抛物线开口向下, 对称轴为 y 轴,

∴当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而减小, 故选项 B 错误, 选项 C 正确;

∵ $x = 0$ 时, $y = 3$,

∴该函数图象经过点 $(0, 3)$, 故选项 A 错误;

该函数图象可由函数 $y = -x^2$ 的图象向上平移 3 个单位得到, 故选项 D 错误;

故选: C.

6. 下列命题中, 说法正确的是 ()

A. 如果一个直角三角形中有两边之比为 1: 2, 那么所有这样的直角三角形一定相似

B. 如果一个等腰三角形中有两边之比为 1: 2, 那么所有这样的等腰三角形一定相似

C. 如果一个直角三角形中有两个内角的度数之比为 1: 2, 那么所有这样的直角三角形一定相似

D. 如果一个等腰三角形中有两个内角的度数之比为 1: 2, 那么所有这样的等腰三角形一定相似

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的判定, 直角三角形和等腰三角形的性质.

根据直角三角形中有两边之比为 1: 2, 可能是两直角边的比, 也可能是直角边与斜边的比, 可判定 A; 根据等腰三角形中有两

边之比为1:2, 只能是底与腰的比为1:2, 所有这样的等腰三角形三边对应成比例, 一定相似, 可判定 B;
若一个直角三角形

是直角是锐角的 2 倍, 则这个三角形是等腰直角三角形, 另一个直角三角形是一锐角是另一锐角的 2 倍,
则两锐角为 30° 和 60° , 所以所有这样的直角三角形不一定相似, 可判定 C; 设等腰三角形两角为 x 和 $2x$,
则三个内角分别为 x , $2x$, $2x$ 或 x , x ,
 $2x$; 所以所有这样的等腰三角形不一定相似, 可判定 D.

【详解】解: A、如果一个直角三角形中有两边之比为1:2, 那么所有这样的直角三角形不一定相似, 如:
一个直角三角形两直角边为 a 、 b , 斜边为 c , 且 $a:b=1:2$, 另一个直角三角形两直角边为 d , e , 斜边为 f ,
且 $d:f=1:2$, 则这两个直角三角形不相似; 故此选项不符合题意;

B、如果一个等腰三角形中有两边之比为1:2, 那么等腰三角形只能是底与腰的比是1:2, 所以所有这样的
等腰三角形三边对应成比例, 所以一定相似, 故此选项符合题意;

C、如果一个直角三角形中有两个内角的度数之比为1:2, 若一个三角形是直角是锐角的 2 倍, 则这个三角
形是等腰直角三角形, 若是直角三角形是一锐角是另一锐角的 2 倍, 则两锐角为 30° 和 60° , 所以所有这样
的直角三角形不一定相似, 故此选项不符合题意;

D、如果一个等腰三角形中有两个内角的度数之比为1:2, 设这两角为 x 和 $2x$, 则三个内角分别为 x , $2x$,
 $2x$ 或 x , x , $2x$; 所以所有这样的等腰三角形不一定相似; 故此选项不符合题意;

故选: B.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

【请将结果直接填入答题纸的相应位置】

7. 已知 $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$, 则 $\frac{x+y}{y} =$ _____.

【答案】 $\frac{7}{4}$

【解析】

【分析】 直接利用比例的性质即可得出答案.

【详解】解: $\because \frac{x}{y} = \frac{3}{4}$

$$\therefore \frac{x+y}{y} = \frac{x}{y} + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$$

故答案为: $\frac{7}{4}$.

【点睛】 本题考查了比例的性质, 熟练掌握比例的相关性质是解题的关键.

8. 计算: $4\vec{a} - 3(\vec{a} + \vec{b}) =$ _____.

【答案】 $\vec{a} - 3\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查了平面向量, 根据平面向量的运算法则求解即可.

【详解】 解: $4\vec{a} - 3(\vec{a} + \vec{b}) = 4\vec{a} - 3\vec{a} - 3\vec{b} = \vec{a} - 3\vec{b}$,

故答案为: $\vec{a} - 3\vec{b}$.

9. 已知线段 $AB = 2$, P 是线段 AB 的黄金分割点, $AP > PB$, 那么线段 AP 的长度等于_____.

【答案】 $\sqrt{5} - 1$

【解析】

【分析】 根据黄金分割的定义: 把线段 AB 分成两条线段 AP 和 BP ($PA > PB$), 且使 AP 是 AB 和 BP 的比例中项, 叫做把线段 AB 黄金分割, 点 P 叫做线段 AB 的黄金分割点.

【详解】 解: 根据黄金分割的定义, 得

$$PA^2 = AB \cdot PB,$$

$$PA^2 = 2(2 - PA),$$

解得 $PA = \sqrt{5} - 1$ (负值舍去),

故答案为: $\sqrt{5} - 1$.

【点睛】 本题主要考查黄金分割点, 熟练掌握黄金分割点的定义是解题的关键.

10. 如果点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, $AG = 6$, 那么 BC 边上的中线长为_____.

【答案】 9

【解析】

【分析】 根据三角形的重心到一顶点的距离等于到对边中点距离的 2 倍求得 $DG = 3$, 继而求得 BC 边上的中线长为 9.

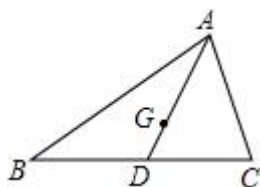
【详解】 $\because$ 三角形的重心到顶点的距离是其到对边中点的距离的 2 倍,

$$\therefore DG = \frac{1}{2} AG = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$$

$$\therefore AD = AG + GD = 6 + 3 = 9.$$

即 BC 边上的中线长为 9.

故答案为: 9.



【点睛】 本题考查的是三角形重心的性质，熟知三角形的重心到顶点的距离是其到对边中点的距离的 2 倍是解决问题的关键.

11. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 6$ ， $\sin A = \frac{3}{4}$ ，则 $AB =$ _____.

【答案】 8

【解析】

【分析】 本题考查的是已知正弦求解三角形的边长，熟记正弦的定义是解本题的关键.

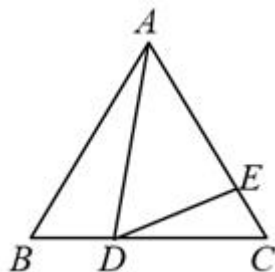
【详解】 解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

$\because \angle C = 90^\circ$ ， $BC = 6$ ，

$\therefore$ 由 $\sin A = \frac{3}{4}$ ，可得： $AB = \frac{BC}{\sin A} = 6 \times \frac{4}{3} = 8$.

故答案为：8.

12. 如图， $\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形， D, E 分别是边 BC, AC 上的点， $\angle ADE = 60^\circ$ ，如果 $BD = 1$ ，那么 $CE =$ _____



【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 由等边三角形的性质得出 $\angle B = \angle C = 60^\circ$ ，证明 $\triangle ABD \sim \triangle DCE$ ，由相似三角形的性质得出

$\frac{AB}{DC} = \frac{BD}{CE}$ 则可求出答案.

【详解】 解： $\because \triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形，

$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ, AB = BC = AC = 3$ ，

$\therefore \angle BAD + \angle BDA = 120^\circ$ ，

$\because \angle ADE = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle BDA + \angle EDC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle EDC,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCE,$$

$$\therefore \frac{AB}{DC} = \frac{BD}{CE},$$

$$\because BD = 1,$$

$$\therefore CD = BC - BD = 2,$$

$$\therefore \frac{3}{2} = \frac{1}{CE},$$

$$\therefore CE = \frac{2}{3},$$

故答案为: $\frac{2}{3}$.

【点睛】 本题考查了等边三角形的性质，相似三角形的判定与性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键.

13. 小明沿着坡度 $i = 1:2.4$ 的斜坡向上行走了 130 米，那么他距离地面的垂直高度升高了_____米.

【答案】 50

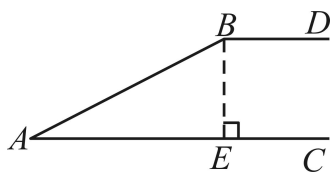
【解析】

【分析】 本题考查了坡度与坡比，勾股定理；

根据题意画图，过点 B 作 $BE \perp AC$ 于 E ，由坡度得到 $\tan \angle A = \frac{BE}{AE} = \frac{1}{2.4}$ ，设 $BE = x$ ，则 $AE = 2.4x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中，利用勾股定理构建方程求解即可.

【详解】 解：如图，过点 B 作 $BE \perp AC$ 于 E ，由题意得 $AB = 130$ 米，



$$\because \text{坡度 } i = 1:2.4,$$

$$\therefore \tan \angle A = \frac{BE}{AE} = \frac{1}{2.4},$$

$$\therefore \text{设 } BE = x, \text{ 则 } AE = 2.4x,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中，由勾股定理得： $AE^2 + BE^2 = AB^2$ ，

$$\therefore (2.4x)^2 + x^2 = 130^2,$$

解得： $x = 50$ (负值已舍去)，

$\therefore$ 他距离地面的垂直高度升高了 50 米，

故答案为：50.

14. 在一个边长为 3 的正方形中挖去一个边长为 $x(0 < x < 3)$ 的小正方形，如果设剩余部分的面积为 y ，那么 y 关于 x 的函数解析式是_____.

【答案】 $y = 9 - x^2 (0 < x < 3)$

【解析】

【分析】 本题考查了根据实际问题列二次函数关系式，利用剩余部分的面积 = 大正方形的面积 - 小正方形的面积，即可得出 y 关于 x 的函数解析式.

【详解】 解：根据题意得： y 关于 x 的函数解析式是 $y = 3^2 - x^2$,

即 $y = 9 - x^2 (0 < x < 3)$.

故答案为： $y = 9 - x^2 (0 < x < 3)$.

15. 已知点 $A(-2, m)$ 、 $B(-3, n)$ 都在二次函数 $y = (x-1)^2$ 的图象上，那么 m 、 n 的大小关系是： m _____ n (填 “>” “=” 或 “<”).

【答案】 <

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征，由二次函数解析式可得抛物线开口向上，抛物线的对称轴为直线 $x = 1$ ，从而得到当 $x < 1$ 时， y 随 x 的增大而减小，由此即可得出答案，熟练掌握二次函数图象上点的坐标特征是解此题的关键.

【详解】 解：由二次函数 $y = (x-1)^2$ 可知，抛物线开口向上，抛物线的对称轴为直线 $x = 1$,

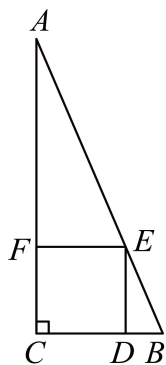
$\therefore$ 当 $x < 1$ 时， y 随 x 的增大而减小，

$\because$ 点 $A(-2, m)$ 、 $B(-3, n)$ 都在二次函数 $y = (x-1)^2$ 的图象上，且 $-3 < -2 < 1$,

$\therefore m < n$,

故答案为：<.

16. 如图，正方形 $CDEF$ 的边 CD 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的直角边 BC 上，顶点 E 、 F 分别在边 AB 、 AC 上. 已知两条直角边 BC 、 AC 的长分别为 5 和 12，那么正方形 $CDEF$ 的边长为_____.



【答案】 $\frac{60}{17}$

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的应用，正方形的性质等知识，解题的关键是学会利用参数，构建方程解决问题，属于中考常考题型．根据正方形的性质得出 $EF \parallel CD$ ， $EF = FC = CD = DE$ ，即可判定

$\triangle AFE \sim \triangle ACB$ ，根据相似三角形的性质可得 $\frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC}$ ，由此构建方程即可解决问题．

【详解】 解： $\because$ 四边形 $EFCD$ 是正方形，

$\therefore EF \parallel CD$ ， $EF = FC = CD = DE$ ，

$\therefore \triangle AFE \sim \triangle ACB$ ，

$$\therefore \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC},$$

$\because BC$ 、 AC 的长分别为 5 和 12，

$$\therefore \frac{EF}{5} = \frac{12 - CF}{12} = \frac{12 - EF}{12},$$

$$\therefore EF = \frac{60}{17},$$

即正方形 $CDEF$ 的边长为 $\frac{60}{17}$ ，

故答案为： $\frac{60}{17}$ ．

17. 平行于梯形两底的直线截梯形的两腰，当两交点之间的线段长度是两底的比例中项时，我们称这条线段是梯形的“比例中线”．在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD=4$ ， $BC=9$ ，点 E 、 F 分别在边 AB 、 CD 上，且 EF 是梯形 $ABCD$ 的“比例中线”，那么 $\frac{DF}{FC} = \underline{\hspace{2cm}}$ ．

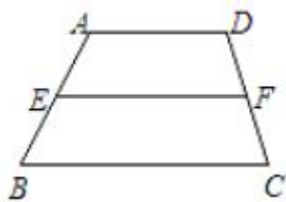
【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 先利用比例中线的定义，求出 EF 的长度，然后由梯形 $ADFE$ 相似与梯形 $EFCB$ ，得到

$$\frac{DF}{FC} = \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{EF} = \frac{EF}{BC}, \text{ 即可得到答案.}$$

【详解】解：如图，



$\because EF$ 是梯形的比例中线，

$$\therefore EF^2 = AD \cdot BC,$$

$$\therefore EF = \sqrt{4 \times 9} = 6,$$

$\because AD \parallel BC$,

$\therefore$ 梯形 $ADFE$ 相似与梯形 $EFCB$,

$$\therefore \frac{DF}{FC} = \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{EF} = \frac{EF}{BC} = \frac{2}{3};$$

故答案为: $\frac{2}{3}$.

【点睛】本题考查了相似四边形的性质，以及比例中项的定义，解题的关键是熟练掌握相似四边形的性质和比例中线的性质.

18. 在菱形 $ABCD$ 中，点 E 为边 BC 的中点. 联结 AE ，将 $\triangle ABE$ 沿着 AE 所在的直线翻折得到 $\triangle AFE$ ，点 B 落在点 F 处，延长 AF 交边 CD 于点 G . 如果 EF 的延长线恰好经过点 D ，那么 $\frac{AF}{AG}$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{3}{4}$ ## 0.75

【解析】

【分析】延长 AG 、 BC 交于点 M ，由菱形的性质得 $AB = AD = DC = BC$ ， $AB \parallel DC$ ， $AD \parallel BC$ ，则 $\angle DCE + \angle ABE = 180^\circ$ ，由折叠得 $\angle ABE = \angle AFE$ ， $AB = AF$ ，则 $\angle DCE + \angle AFE = 180^\circ$ ， $AD = AF$ ，而 $\angle AFD + \angle AFE = 180^\circ$ ，所以 $\angle DCE = \angle AFD = \angle ADF$ ，推导出 $DE = DC = BC = AD$ ，可证明 $\triangle DCE \cong \triangle ADF$ ，

得 $CE = DF$ ，则 $CE = BE = \frac{1}{2}BC$ ，所以 $DF = \frac{1}{2}DE$ ，则 $DF = EF$ ，再证明 $\triangle ADF \cong \triangle HEF$ ，得

$AD = HE$ ，再证明 $\triangle HCG \sim \triangle ADG$ ，得 $\frac{HG}{AG} = \frac{AC}{AD} = \frac{1}{2}$ ，则 $AG = \frac{2}{3}AH$ ，而 $AF = HF = \frac{1}{2}AH$ ，即可求得

$\frac{AF}{AG} = \frac{3}{4}$ ，于是得到问题的答案.

【详解】解：延长 AG 、 BC 交于点 M ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AB = AD = DC = BC, \quad AB \parallel DC, \quad AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DCE + \angle ABE = 180^\circ,$$

由折叠得 $\angle ABE = \angle AFE$, $AB = AF$,

$$\therefore \angle DCE + \angle AFE = 180^\circ, \quad AD = AF,$$

$$\therefore \angle AFD + \angle AFE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle AFD,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle AFD = \angle DEC,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle ADF = \angle DEC,$$

$$\therefore DE = DC = BC = AD,$$

在 $\triangle DCE$ 和 $\triangle ADF$ 中,

$$\begin{cases} \angle DCE = \angle ADF \\ \angle DEC = \angle AFD, \\ DC = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DCE \cong \triangle ADF (AAS),$$

$$\therefore CE = DF,$$

$\therefore$ 点 E 为边 BC 的中点,

$$\therefore CE = BE = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore DF = \frac{1}{2}DE,$$

$$\therefore DF = EF,$$

$\therefore$ 在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle HEF$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADF = \angle HEF \\ DF = EF \\ \angle AFD = \angle HFE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle HEF (ASA),$$

$$\therefore AD = HE, \quad AF = HF,$$

$$\therefore CE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}HE,$$

$$\therefore HC = CE = \frac{1}{2}AD,$$

$\therefore HC \parallel AD,$

$$\triangle HCG \sim \triangle ADG,$$

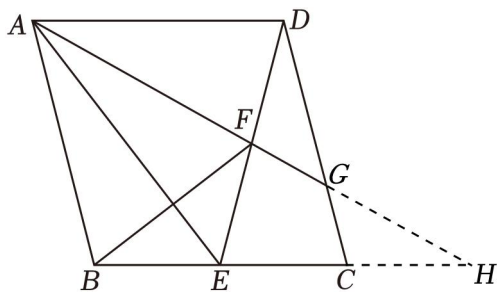
$$\therefore \frac{HG}{AG} = \frac{AC}{AD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AG = \frac{2}{3}AH,$$

$$\therefore AF = HF = \frac{1}{2}AH,$$

$$\therefore \frac{AF}{AG} = \frac{\frac{1}{2}AH}{\frac{2}{3}AH} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{AF}{AG} \text{ 的值为 } \frac{3}{4}.$$



故答案为: $\frac{3}{4}$

【点睛】 本题考查菱形的性质、轴对称的性质、同角的补角相等、等腰三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、相似三角形的判定与性质等知识，证明 $\triangle DCE \cong \triangle ADF$ 是解题的关键.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\cot 30^\circ + \frac{2 \cos 30^\circ + \tan 45^\circ}{2 \sin 30^\circ} - \cos^2 45^\circ.$

【答案】 $2\sqrt{3} + \frac{1}{2}$

【解析】

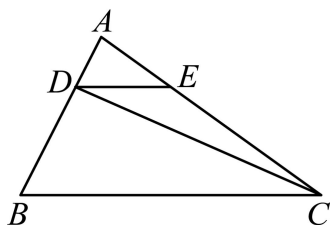
【分析】 此题主要考查了特殊角的三角函数值，正确记忆相关数据是解题关键. 直接利用特殊角的三角函数值分别代入求出答案.

【详解】 解: 原式 $= \sqrt{3} + \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2 \times \frac{1}{2}} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{3} + 1 - \frac{1}{2}$$

$$= 2\sqrt{3} + \frac{1}{2}.$$

20. 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, 且 $AD = 2$, $DB = 4$, $AE = 3$, $EC = 6$.



(1) 求 $\frac{DE}{BC}$ 的值;

(2) 连接 DC , 如果 $\overrightarrow{DE} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DA} = \vec{b}$, 试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{CD}$.

【答案】 (1) $\frac{1}{3}$

(2) $2\vec{b} - 3\vec{a}$

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的判定与性质、向量的线性运算等知识, 是重要考点, 难度较易, 掌握相关知识是解题关键.

(1) 先判定 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 再根据相似三角形对应边成比例解题即可;

(2) 根据相似三角形的判定与性质求出向量之间的关系, 解题即可.

【小问 1 详解】

解: $\because AD = 2, DB = 4, AE = 3, EC = 6,$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{2}{2+4} = \frac{1}{3}, \frac{AE}{AC} = \frac{3}{3+6} = \frac{1}{3},$$

$\because \angle A = \angle A,$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}.$$

【小问 2 详解】

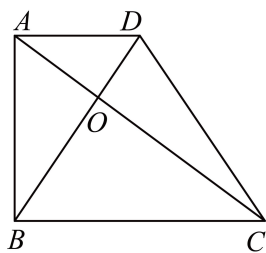
解: 由 (1) 中可知,

$$\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BA} = 2\vec{b},$$

$$\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{DE} = 3\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 2\vec{b} - 3\vec{a}.$$

21. 如图, 已知在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , $AD = 2$, $AB = 3$, $BC = 4$.



- (1) 求 $\triangle BOC$ 的面积;
- (2) 求 $\angle ACD$ 的正弦值.

【答案】 (1) 4 (2) $\frac{6\sqrt{13}}{65}$

【解析】

【分析】 本题考查解直角三角形

- (1) 可过点 O 作 AB 的平行线, 借助于相似三角形的性质求出 BC 边上的高即可解决问题.
- (2) 过点 A 作 CD 边的垂线, 借助于面积法求出垂线段的长即可解决问题.

【小问 1 详解】

解: 过点 O 作 AB 的平行线, 分别与 AD , BC 交于点 M , N ,

$$\because AD \parallel BC, \quad MN \parallel AB,$$

$\therefore$ 四边形 $ABNM$ 是平行四边形,

$$\text{又} \because \angle ABC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABNM$ 是矩形,

$$\therefore OM \perp AD, \quad ON \perp BC.$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle AOD \sim \triangle COB,$$

$$\therefore \frac{OM}{ON} = \frac{AD}{BC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\text{又} \because MN = AB = 3,$$

$$\therefore OM = 1, \quad ON = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} BC \cdot ON = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4.$$

【小问 2 详解】

解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

过点 D 作 BC 的垂线, 垂足为 E , 过点 A 作 CD 垂线, 垂足为 F ,

在 $Rt\triangle CDE$ 中,

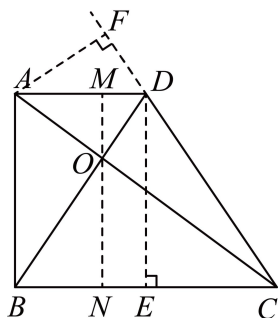
$$CD = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

$$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times AF,$$

$$\therefore AF = \frac{6\sqrt{13}}{13}.$$

在 $Rt\triangle CAF$ 中,

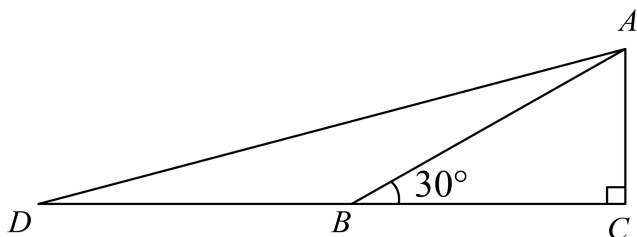
$$\sin \angle ACD = \frac{AF}{AC} = \frac{\frac{6\sqrt{13}}{13}}{5} = \frac{6\sqrt{13}}{65}.$$



22. 上海教育出版社九年级第一学期《练习部分》第 48 页复习题 B 组第 2 题及参考答案.

2. 如图, 图中提供了一种求 $\tan 15^\circ$ 的方法, 阅读并填空:

先作 $Rt\triangle ABC$, 其中 $\angle C = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$; 然后延长 CB 到点 D , 使 $BD = AB$, 结连接 AD .



2. 如图, 图中提供了一种求 $\tan 15^\circ$ 的方法, 阅读并填空: 先作 $Rt\triangle ABC$, 其中 $\angle C = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$; 然后延长 CB 到点 D , 使 $BD = AB$, 结连接 AD . (1) $\angle D = 15^\circ$. (2) 设 $AC = t$, 那么 $BC = 3t$ (用 t 的代数式表示, 以下同), $BD = 2t$, (3) $\tan 15^\circ = 2 - 3$.

2. 如图, 图中提供了一种求 $\tan 15^\circ$ 的方法, 阅读并填空: 先作 $Rt\triangle ABC$, 其中 $\angle C = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$; 然后延长 CB 到点 D , 使 $BD = AB$, 结连接 AD . (1) $\angle D = 15^\circ$. (2) 设 $AC = t$, 那么 $BC = 3t$ (用 t 的代数式表示, 以下同), $BD = 2t$, (3) $\tan 15^\circ = 2 - 3$.

(1) $\angle D = 15^\circ$.

(2) 设 $AC = t$, 那么 $BC = \sqrt{3}t$ (用 t 的代数式表示, 以下同), $BD = 2t$,

$$(3) \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}.$$

某数学兴趣小组在完成了以上解答后，决定对该问题进一步探究：

【问题探究】

如图 1，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 45^\circ$ ；

然后延长 CB 到点 D ，使 $BD = AB$ ，连接 AD 。

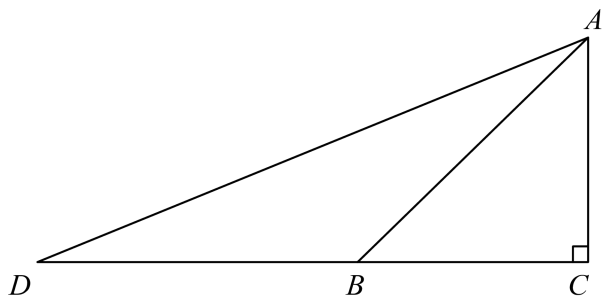


图1

(1) $\angle D =$ _____ $^\circ$.

(2) 设 $AC = BC = t$ ，那么 $AB = \sqrt{2}t$ （用 t 的代数式表示，以下同）， $BD =$ _____.

(3) $\tan 22.5^\circ =$ _____.

【知识迁移】

如图 2，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\tan \angle ABC = \frac{2}{3}$ 。然后延长 CB 到点 D ，使 $BD = AB$ ，连接 AD 。

请用习题中求 $\tan 15^\circ$ 的方法求 $\tan \frac{1}{2} \angle ABC$ 。

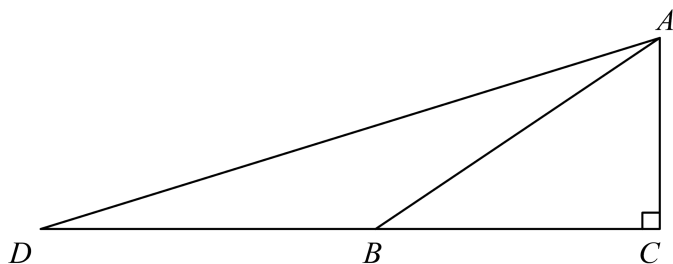


图2

【拓展应用】

如图 3，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 18$ ， $BC = 25$ ，点 D 、 E 分别在边 AC 、 BC 上，且 $DC = 5$ ， $EC = 12$ ，连接 AE 、 BD 交于点 P 。求证： $\tan \angle BPE = 1$ 。

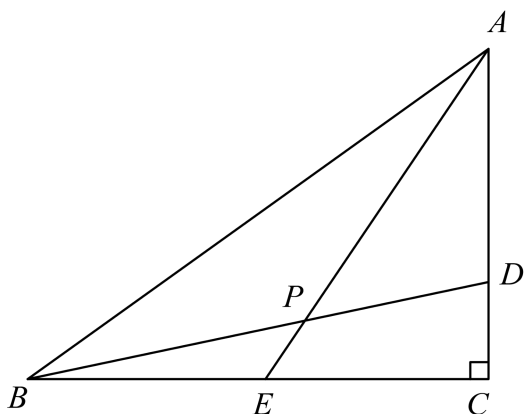


图3

【答案】【问题探究】 22.5° , $\sqrt{2}t$, $\sqrt{2}-1$; 【知识迁移】 $\frac{\sqrt{13}-3}{2}$ 【拓展应用】 证明见解析

【解析】

【分析】 本题考查了等腰三角形的性质，锐角三角函数的定义，等腰直角三角形的性质，勾股定理熟练掌握锐角三角函数的定义是解题的关键.

【问题探究】

- (1) 由等腰三角形的性质得出答案;
- (2) 由股定理可得出答案;
- (3) 由锐角三角函数的定义可得出答案;

【知识迁移】

设 $AC = 2m$, $BC = 3m$ 得出, $DB = AB = \sqrt{13}m$ 由此求出答案;

【拓展应用】

连接 DE , 证出 $AD = DE = BE$, $\angle EAD = \angle AED$, $\angle EBD = \angle BDE$, 设 $\angle EBD = \alpha$, $\angle AED = \beta$, $\angle CED = 2\alpha$, $\angle EDC = 2\beta$, 求出 $\alpha + \beta = 45^\circ$, 则可得出答案.

【详解】【问题探究】

解: (1) $\because AB = BD$,

$\therefore \angle D = \angle DAB$,

$\because \angle ABC = 45^\circ$, $\angle ABC = \angle D + \angle DAB = 45^\circ$,

$\therefore \angle D = 22.5^\circ$,

故答案为: 22.5° ;

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$, $AC = BC = t$, $AB = \sqrt{2}t$,

$$\because BD = AB,$$

$$\therefore BD = AB = \sqrt{2}t,$$

故答案为: $\sqrt{2}t$;

(3) 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle D = 22.5^\circ$,

$$DC = BD + BC = (\sqrt{2} + 1)t, \quad AC = BC = t,$$

$$\therefore \tan 22.5^\circ = \tan \angle D = \frac{AC}{DC} = \frac{t}{(\sqrt{2} + 1)t} = \sqrt{2} - 1,$$

故答案为: $\sqrt{2} - 1$;

【知识迁移】

解: 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中 $\angle C = 90^\circ$, $BD = AB$,

$$\therefore \angle D = \angle DAB,$$

$$\because \angle ABC = \angle D + \angle DAB,$$

$$\therefore \angle D = \frac{1}{2} \angle ABC,$$

$$\text{Rt}\triangle ACB \text{ 中, } \tan \angle ABC = \frac{2}{3},$$

$$\text{即 } \frac{AC}{BC} = \frac{2}{3},$$

设 $AC = 2m$,

则 $BC = 3m$,

$$\therefore DB = AB = \sqrt{(2m)^2 + (3m)^2} = \sqrt{13}m,$$

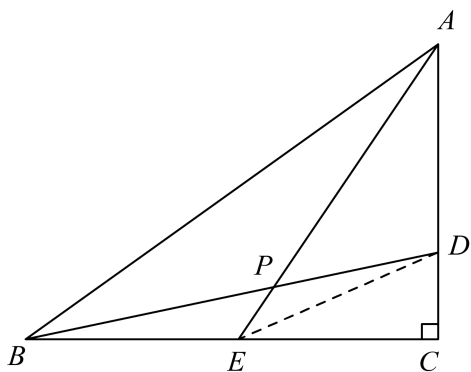
$$\therefore DC = BD + BC = (\sqrt{13} + 3)m,$$

$$\tan \frac{1}{2} \angle ABC = \tan \angle D = \frac{AC}{DC} = \frac{m}{(\sqrt{13} + 3)m}$$

$$= \frac{\sqrt{13} - 3}{2};$$

【拓展应用】

证明: 连接 DE ,



$$\because DC = 5, CE = 12,$$

$$\therefore DE = \sqrt{DC^2 + CE^2} = 13,$$

$$\because AC = 18, BC = 25,$$

$$\therefore BE = BC - CE = 13,$$

$$\therefore AD = AC - CD = 13,$$

$$\therefore AD = DE = BE,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle AED, \quad \angle EBD = \angle BDE;$$

$$\text{设 } \angle EBD = \alpha, \quad \angle AED = \beta,$$

$$\therefore \angle CED = 2\alpha, \quad \angle EDC = 2\beta,$$

$$\therefore 2\alpha + 2\beta = 90^\circ,$$

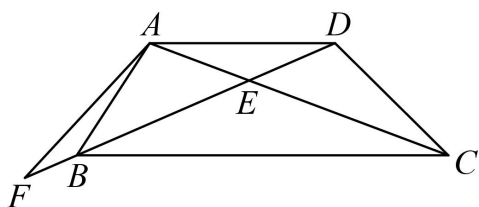
$$\therefore \alpha + \beta = 45^\circ,$$

$$\because \angle BPE = \angle PED + \angle PDE = \beta + \alpha,$$

$$\therefore \angle BPE = 45^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle BPE = \tan 45^\circ = 1.$$

23. 已知：如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，对角线 AC 、 BD 相交于点 E ，且 $\angle DEC = \angle DCB$ 。



$$(1) \text{ 求证: } \frac{AD}{CE} = \frac{AC}{CB};$$

$$(2) \text{ 点 } F \text{ 在 } DB \text{ 的延长线上, 联结 } AF, \quad AF^2 = AE \cdot AC. \text{ 求证: } EC \cdot AF = BC \cdot AE.$$

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的性质与判定:

(1) 证明 $\triangle DEC \sim \triangle DCB$ 得出 $\frac{DE}{DC} = \frac{EC}{BC}$, $\angle DCE = \angle DBC$, 进而证明 $\triangle DAE \sim \triangle CAD$ 得出 $\frac{DE}{DC} = \frac{AD}{AC}$, 两个比例式联立, 即可得证;

(2) 证明 $\triangle DAE \sim \triangle CAD$ 得出 $\triangle DAE \sim \triangle CAD$, 得出 $AD^2 = AE \cdot AC$, 根据已知条件得出 $AF = AD$, 证明 $\triangle ADE \sim \triangle CBE$ 可得 $AD \cdot CE = AE \cdot BC$, 等量代换即可得证.

【小问 1 详解】

$$\because \angle DEC = \angle DCB, \angle EDC = \angle CDB,$$

$$\therefore \triangle DEC \sim \triangle DCB,$$

$$\therefore \frac{DE}{DC} = \frac{EC}{BC}, \angle DCE = \angle DBC,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle ADE,$$

$$\text{又} \because \angle DAE = \angle CAD,$$

$$\therefore \triangle DAE \sim \triangle CAD,$$

$$\therefore \frac{DE}{DC} = \frac{AD}{AC},$$

$$\therefore \frac{EC}{BC} = \frac{AD}{AC},$$

$$\text{即} \frac{AD}{CE} = \frac{AC}{CB};$$

【小问 2 详解】

$$\text{证明: } \because \triangle DAE \sim \triangle CAD,$$

$$\therefore \frac{AD}{CA} = \frac{AE}{AD}, \text{ 即 } AD^2 = AE \cdot AC,$$

$$\text{又} \because AF^2 = AE \cdot AC,$$

$$\therefore AF = AD,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

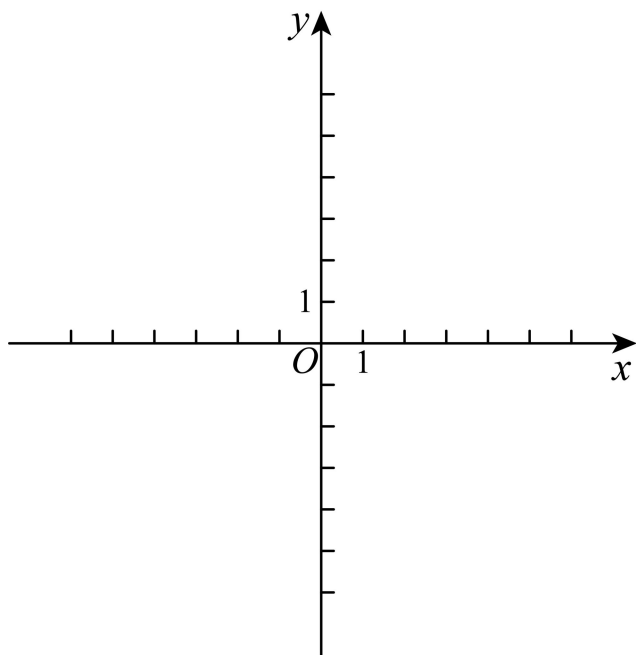
$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle CBE,$$

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{AE}{CE}, \text{ 即 } AD \cdot CE = AE \cdot BC,$$

$$\text{又} \because AF = AD,$$

$$\therefore EC \cdot AF = BC \cdot AE.$$

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $M: y = -x^2 + bx + c$ 过点 $A(2, 2)$ 、点 $B(0, 2)$, 顶点为点 C , 抛物线 M 的对称轴交 x 轴于点 D .



- (1) 求抛物线 M 的表达式和点 C 的坐标;
- (2) 点 P 在 x 轴上, 当 $\triangle AOP$ 与 $\triangle ACD$ 相似时, 求点 P 坐标;
- (3) 将抛物线 M 向下平移 $t(t > 0)$ 个单位, 得到抛物线 N , 抛物线 N 的顶点为点 E , 再把点 C 绕点 E 顺时针旋转 135° 得到点 F . 当点 F 在抛物线 N 上时, 求 t 的值.

【答案】(1) $y = -x^2 + 2x + 2$, 点 $C(1, 3)$

(2) $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ 或 $(6, 0)$

(3) $t = \sqrt{2}$

【解析】

【分析】(1) 由待定系数法即可求解;

(2) 当 $\triangle OAP \sim \triangle CAD$ 时, 则 $\frac{OP}{CD} = \frac{OA}{CA}$, 即 $\frac{OP}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, 即可求解; 当 $\triangle OAP \sim \triangle CDA$ 时, 同理可解;

(3) 根据图像平移和旋转求出点 $F\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, 3 - t - \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$, 代入函数解析式求解即可.

【小问 1 详解】

解: 由题意得:

$$\begin{cases} c = 2 \\ -4 + 2b + c = 2 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} b = 2 \\ c = 2 \end{cases},$$

则抛物线的表达式为: $y = -x^2 + 2x + 2$,

$$\therefore y = -x^2 + 2x + 2 = -(x-1)^2 + 3$$

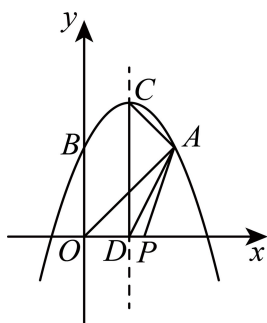
$\therefore$ 顶点 $C(1,3)$;

【小问 2 详解】

解: 由 (1) 知, $y = -x^2 + 2x + 2 = -(x-1)^2 + 3$,

又 $\because$ 抛物线 M 的对称轴交 x 轴于点 D ,

$\therefore$ 点 $D(1,0)$,



$\therefore A(2,2)$ 、 $B(0,2)$ 、 $C(1,3)$ 、 $D(1,0)$,

$$\therefore AC = \sqrt{(2-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{2} \text{、} CD = 3 \text{、} AD = \sqrt{(2-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{、} OA = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{、}$$

$$\angle DCA = \angle AOD = 45^\circ,$$

又 $\because \triangle AOP$ 与 $\triangle ACD$ 相似,

$\therefore$ 点 O 与点 C 对应,

当 $\triangle OAP \sim \triangle CAD$ 时,

$$\text{则 } \frac{OP}{CD} = \frac{OA}{CA}, \text{ 即 } \frac{OP}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

解得: $OP = 6$,

即点 $P(6,0)$;

当 $\triangle OAP \sim \triangle CDA$ 时,

$$\text{则 } \frac{OP}{AC} = \frac{OA}{CD}, \text{ 即 } \frac{OP}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

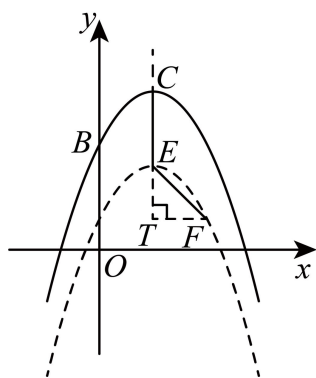
$$\text{解得: } OP = \frac{4}{3},$$

则点 $P\left(\frac{4}{3}, 0\right)$;

综上, 点 P 的坐标为: $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ 或 $(6, 0)$;

【小问 3 详解】

解: 如图, 过点 F 作 $FT \perp CE$ 交 CE 于点 T , 则 $\angle FET = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$,



设平移后的抛物线表达式为: $y = -x^2 + 2x + 2 - t$,

则 $CE = t$,

在等腰 $\text{Rt}\triangle EFT$ 中, $EF = EC = t$,

则 $TF = TE = \frac{\sqrt{2}}{2}t$,

则点 $F\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, 3 - t - \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$,

将点 F 的坐标代入函数表达式得: $3 - t - \frac{\sqrt{2}}{2}t = -(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t)^2 + 2(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t) + 2 - t$,

解得: $t = 0$ (舍去) 或 $\sqrt{2}$,

故 $t = \sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查的是二次函数综合运用, 涉及到待定系数法求二次函数解析式, 二次函数图象的平移, 旋转的性质, 二次函数图象性质, 相似三角形的判定性质等知识, 分类求解是解题的关键.

25. 如图, 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 6, 点 E 是射线 BC 上一点(点 E 不与点 B 、 C 重合), 过点 A 作 $AF \perp AE$, 交边 CD 的延长线于点 F , 直线 EF 分别交射线 AC 、射线 AD 于点 M 、 N .

∵ 正方形 $ABCD$,

$$\therefore AB = AD = 6, \quad \angle B = \angle ADC = 90^\circ = \angle ADF,$$

∵ $AE \perp AF$,

$$\therefore \angle EAF = 90^\circ = \angle DAF + \angle DAE,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle DAE = \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DAF,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AE = AF, \quad DF = BE,$$

$$\therefore \frac{ND}{AN} = \frac{1}{5}, \quad AD = 6 = DN + AN,$$

$$\therefore DN = 1, \quad AN = 5,$$

∵ $DN \parallel EC$,

$$\therefore \frac{DN}{EC} = \frac{DF}{CF},$$

设 $BE = x$, 则 $DF = x, EC = 6 - x$,

$$\therefore \frac{1}{6 - x} = \frac{x}{6 + x},$$

解得 $x = 2$ 或 $x = 3$,

经检验, $x = 2$, $x = 3$ 都是原方程的根,

$$\therefore BE = 2 \text{ 或 } BE = 3,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中,

$$\cot \angle BAE = \frac{AB}{BE} = \frac{6}{2} = 3 \text{ 或 } \cot \angle BAE = \frac{AB}{BE} = \frac{6}{3} = 2;$$

【小问 2 详解】

如图 2, 由 (1) 得 $AE = AF$,

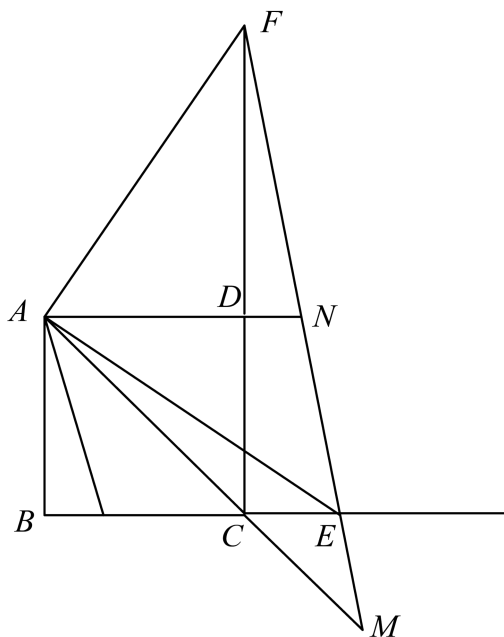


图2

$\because AE \perp AF$,

$\therefore \triangle AEF$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \angle AEF = \angle AFE = 45^\circ$,

$\because \angle AEF = 45^\circ = \angle MAN$, $\angle M = \angle M$,

$\therefore \triangle MAN \sim \triangle MFA$,

$\therefore \angle ANE = \angle MAF$,

$\therefore \triangle ANE \sim \triangle MAF$,

$$\therefore \frac{EN}{AF} = \frac{AE}{MF},$$

$$\therefore EN \cdot MF = AE \cdot AF = AE^2,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $AB = 6$, $BE = x$,

$$\therefore AE^2 = AB^2 + BE^2 = 36 + x^2,$$

$$\therefore y = EN \cdot MF,$$

$$\text{即 } y = 36 + x^2 (x > 6);$$

【小问 3 详解】

当点 E 在 BC 上时, 如图1, 过点 M 作 $MP \perp BC$, 垂足为 P ,

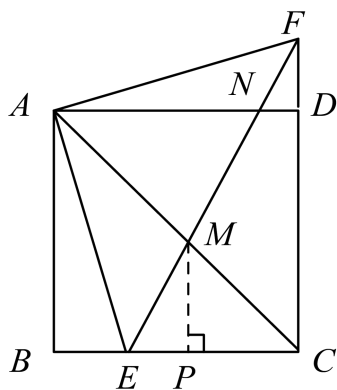


图1

$$\because CE = 3,$$

$$\therefore BE = 6 - 3 = 3,$$

由 (1) 可知, 当 $BE = 3$ 时, $DN = 1$,

$$\therefore AN = 6 - 1 = 5,$$

$$\because AN \parallel EC,$$

$$\therefore \triangle AMN \sim \triangle CME,$$

$$\therefore \frac{AN}{CM} = \frac{AN}{EC} = \frac{5}{3},$$

$$\because AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 6\sqrt{2},$$

$$\therefore MC = \frac{3}{3+5} AC = \frac{9\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{在 Rt}\triangle PMC \text{ 中, } PM = \frac{\sqrt{2}}{2} MC = \frac{9}{4},$$

$$\therefore \triangle EMC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} CE \cdot MP = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{9}{4} = \frac{27}{8}$$

当点 E 在 BC 的延长线上时, 如图 2, 过点 M 作 $MP \perp BC$, 垂足为 P ,

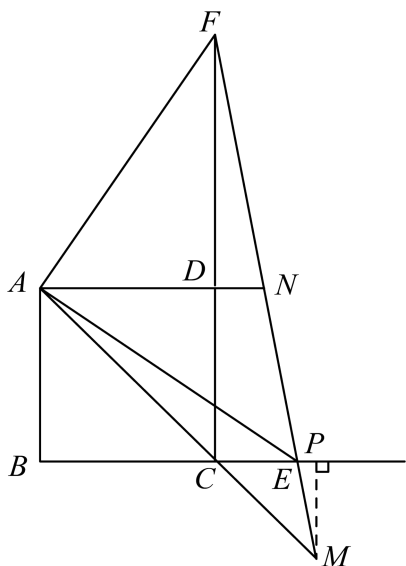


图2

由 (1) 可得, $DF = BE = 6 + 3 = 9$,

$\because AN \parallel BP$,

$$\therefore \frac{DF}{CF} = \frac{DN}{CE}, \text{ 即 } \frac{9}{9+6} = \frac{DN}{3},$$

$$\text{解得: } DN = \frac{9}{5},$$

$$\therefore AN = 6 + \frac{9}{5} = \frac{39}{5}$$

$\because \triangle MCE \sim \triangle MAN$,

$$\therefore \frac{CE}{AN} = \frac{MP}{MP+CD}, \text{ 即 } \frac{3}{\frac{39}{5}} = \frac{MP}{MP+6},$$

$$\text{解得: } MP = \frac{15}{4}$$

$$\therefore \triangle EMC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} CE \cdot MP = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{15}{4} = \frac{45}{8}$$

综上所述, $\triangle EMC$ 的面积为 $\frac{27}{8}$ 或 $\frac{45}{8}$.

【点睛】 本题考查全等三角形、相似三角形的判定和性质, 等腰三角形、直角三角形的性质以及锐角三角函数, 掌握全等三角形、相似三角形的判定和性质, 等腰三角形、直角三角形的性质以及锐角三角函数的定义是解题的关键.