

2023 学年度初三年级第一次学生学习能力诊断练习

数学 练习卷

(满分 150 分, 时间 100 分钟)

注意:

1. 本练习卷含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本练习卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 下列函数中, y 是关于 x 的二次函数的是 ()

- A. $y = 2x - 1$ B. $y = \frac{1}{x^2}$ C. $y = 2x^2 - 1$ D. $y = 2x^3 - 1$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的定义, 形如 $y = ax^2 + bx + c$ (a 、 b 、 c 为常数, $a \neq 0$) 的函数, 叫二次函数, 对照函数的解析式, 根据函数的定义逐一判断即可.

【详解】A. $y = 2x - 1$ 是一次函数, 不是二次函数, 故选项 A 不符合题意;

B. $y = \frac{1}{x^2}$ 不是二次函数, 故选项 B 不符合题意;

C. $y = 2x^2 - 1$ 是二次函数, 故选项 C 符合题意;

D. $y = 2x^3 - 1$ 不是二次函数, 故选项 D 不符合题意.

故选: C.

2. 将抛物线 $y = -3x^2$ 向左平移 4 个单位长度, 所得到抛物线的表达式是 ()

- A. $y = -3(x + 4)^2$ B. $y = -3(x - 4)^2$ C. $y = -3x^2 + 4$ D. $y = -3x^2 - 4$

【答案】A

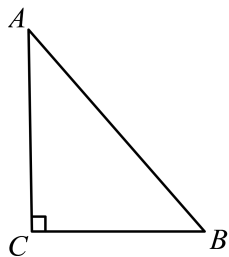
【解析】

【分析】本题考查的是二次函数的图象与几何变换, 根据“左加右减, 上加下减”的法则解答即可.

【详解】解: 将抛物线 $y = -3x^2$ 向左平移 4 个单位长度, 得到的抛物线是 $y = -3(x + 4)^2$.

故选: A.

3. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C = 90^\circ$ ， $\cos A = \frac{3}{4}$ ， $AC = 3$ ，那么 BC 的长为（ ）



- A. $\sqrt{7}$ B. $2\sqrt{7}$ C. 4 D. 5

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形，勾股定理，正确理解锐角三角函数的定义是解决问题的关键．先根据余弦的定义计算出 $AB = 4$ ，然后利用勾股定理计算出 BC 的长．

【详解】解： $\because \angle C = 90^\circ$ ，

$$\therefore \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4},$$

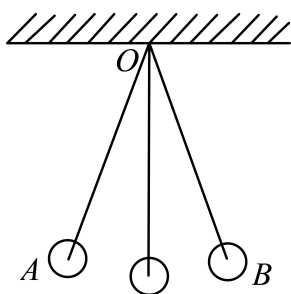
$$\because AC = 3,$$

$$\therefore AB = 4,$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7},$$

故选：A.

4. 如图，一条细绳系着一个小球在平面内摆动．已知细绳从悬挂点 O 到球心的长度为 50 厘米，小球在左、右两个最高位置时，细绳相应所成的角 $\angle AOB$ 为 40° ，那么小球在最高位置和最低位置时的高度差为（ ）



- A. $(50 - 50 \sin 40^\circ)$ 厘米 B. $(50 - 50 \cos 40^\circ)$ 厘米
C. $(50 - 50 \sin 20^\circ)$ 厘米 D. $(50 - 50 \cos 20^\circ)$ 厘米

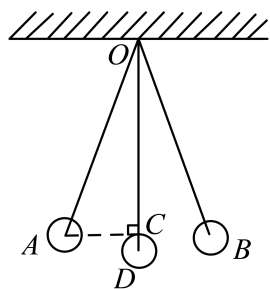
【答案】D

【解析】

【分析】此题考查了解直角三角形的应用，三角函数的基本概念，

当小球在最高位置时，过小球作小球位置最低时细绳的垂线，在构建的直角三角形中，可根据偏转角的角度和细绳的长度，求出小球最低位置时的铅直高度，进而可求出小球在最高位置与最低位置时的高度差.

【详解】解：如图：过A作 $AC \perp OB$ 于C，



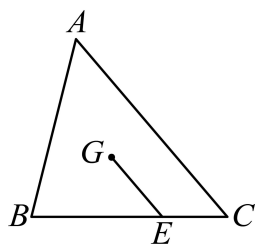
Rt $\triangle OAC$ 中， $OA = 50$ 厘米， $\angle AOC = 40^\circ \div 2 = 20^\circ$ ，

$\therefore OC = OA \cdot \cos 20^\circ = 50 \times \cos 20^\circ$.

$\therefore CD = OA - OC = 50 - 50 \times \cos 20^\circ = 50(1 - \cos 20^\circ)$ (厘米) .

故选：D.

5. 如图，点G是 $\triangle ABC$ 的重心， $GE \parallel AC$ 交BC于点E. 如果 $AC = 12$ ，那么GE的长为（ ）



A. 3

B. 4

C. 6

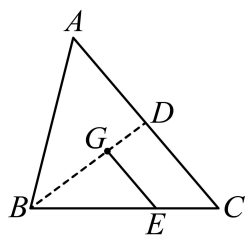
D. 8

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查的是重心的概念和性质、相似三角形的判定和性质，掌握三角形的重心是三角形三条中线的交点，且重心到顶点的距离是它到对边中点的距离的2倍是解题的关键. 连接BG并延长交AC于D，根据点G是 $\triangle ABC$ 的重心，得到 $CD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 12 = 6$ ， $\frac{BG}{BD} = \frac{2}{3}$ ，根据相似三角形的判定和性质即可得到结论.

【详解】解：连接BG并延长交AC于D，



$\therefore$ 点G是 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 12 = 6, \quad \frac{BG}{BD} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore GE \parallel AC,$$

$$\therefore \triangle BEG \sim \triangle BCD,$$

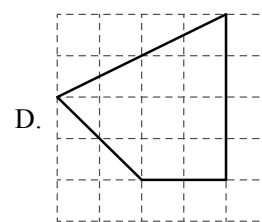
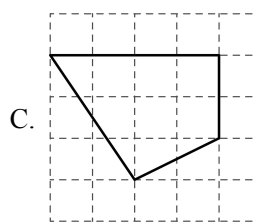
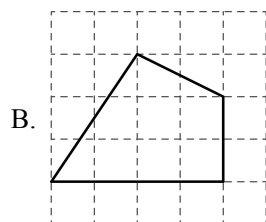
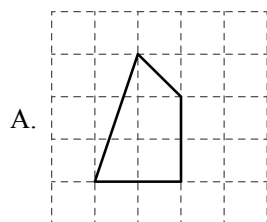
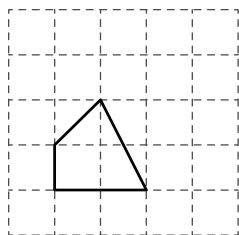
$$\therefore \frac{BG}{BD} = \frac{EG}{CD},$$

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{EG}{6},$$

$$\therefore GE = 4,$$

故选：B.

6. 如图，四边形的顶点在方格纸的格点上，下列方格纸中的四边形与已知四边形相似的是（ ）



【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了相似多边形的性质，相似三角形的判定与性质，勾股定理，如果两个四边形的四条边对应成比例，且四个角对应相等，那么这两个四边形相似，据此求解即可.

【详解】解：设每个小正方形的边长为 1，

则已知四边形的四条边分别为 1， $\sqrt{2}$ ，2， $\sqrt{5}$.

选项 A 中的四边形的四条边分别为 $\sqrt{2}$ ，2，2， $\sqrt{10}$ ，两个四边形的四条边对应不成比例，不符合题意；

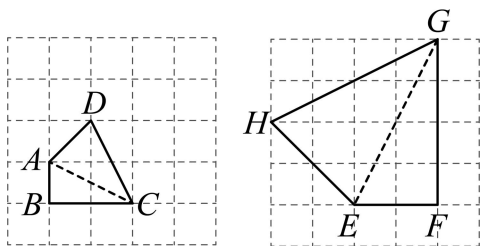
选项 B 中的四边形的四条边分别为 2， $\sqrt{5}$ ， $\sqrt{13}$ ，4，两个四边形的四条边不是对应成比例，故选项 B 中的四边形与已知四边形不相似，不符合题意；

选项 C 中的四边形的四条边分别为 2， $\sqrt{5}$ ， $\sqrt{13}$ ，4，两个四边形的四条边不是对应成比例，故选项 C 中的四边形与已知四边形不相似，不符合题意；

选项 D 中的四边形的四条边分别为 2， $2\sqrt{2}$ ，4， $2\sqrt{5}$ ，两个四边形的四条边对应成比例.

将已知四边形表示为四边形 $ABCD$ ，将选项 D 中的四边形表示为 $EFGH$ 。

如图，连接 AC 、 EG ，则 $AC = \sqrt{5}$ ， $EG = 2\sqrt{5}$ 。



在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle EFG$ 中，

$$\therefore \frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{AC}{EG} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle EFG,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle FEG, \angle B = \angle F, \angle ACB = \angle EGF.$$

在 $\triangle ADC$ 与 $\triangle EHG$ 中，

$$\therefore \frac{AD}{EH} = \frac{DC}{HG} = \frac{AC}{EG} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle EHG,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle HEG, \angle D = \angle H, \angle ACD = \angle EGH,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle FEH, \angle B = \angle F, \angle DCB = \angle HGF, \angle D = \angle H,$$

$$\text{又} \therefore \frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{AD}{EH} = \frac{DC}{HG} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \sim \text{四边形 } EFGH.$$

故选：D.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. 已知 $x:y=3:2$ ，那么 $(x-y):x=$ ____.

【答案】 1:3

【解析】

【分析】 本题考查了比例的性质，表示出 y 是解题的关键。先用 x 表示出 y ，再代入比例式进行计算即可得解。

【详解】 解： $\because x:y=3:2$,

$$\therefore y = \frac{2}{3}x,$$

$$\therefore (x-y):x = \left(x - \frac{2}{3}x\right):x = \frac{1}{3}x:x = 1:3,$$

故答案为：1:3.

8. 如果向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 和 $\vec{x}$ 满足 $\vec{a} - \vec{x} = 2(\vec{a} - \vec{b})$ ，那么 $\vec{x} =$ _____.

【答案】 $-\vec{a} + 2\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查的是平面向量，正确利用等式的性质是解题的关键。根据等式的性质变形，得到答案。

【详解】 解： $\vec{a} - \vec{x} = 2(\vec{a} - \vec{b})$,

$$\therefore -\vec{x} = \vec{a} - 2\vec{b},$$

$$\therefore \vec{x} = -\vec{a} + 2\vec{b},$$

故答案为： $-\vec{a} + 2\vec{b}$.

9. 已知抛物线 $y = (1-a)x^2 + 3$ 开口向下，那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a > 1$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数图象与系数的关系：二次项系数 a 决定抛物线的开口方向和大小。当 $a > 0$ 时，抛物线开口向上；当 $a < 0$ 时，抛物线开口向下。根据二次函数的性质可知，当抛物线开口向下时，二次项系数 $1-a < 0$.

【详解】 解： $\because$ 抛物线 $y = (1-a)x^2 + 3$ 的开口向下，

$$\therefore 1-a < 0, \text{ 解得, } a > 1.$$

故答案为： $a > 1$.

10. 如果点 $A(2,1)$ 在抛物线 $y = (x-1)^2 + m$ 上，那么 m 的值是_____.

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征，根据二次函数图象上点的坐标满足二次函数解析式，把点 $A(2,1)$ 代入 $y = (x-1)^2 + m$ 即可求出 m .

【详解】 解： $\because$ 点 $A(2,1)$ 在抛物线 $y = (x-1)^2 + m$ 上，

$$\therefore 1 = (2-1)^2 + m,$$

解得 $m = 0$,

故答案为： 0.

11. 将抛物线 $y = 2x^2$ 平移，使顶点移动到点 $P(-3, 1)$ 的位置，那么平移后所得新抛物线的表达式是_____.

【答案】 $y = 2(x+3)^2 + 1$

【解析】

【分析】 由于抛物线平移前后二次项系数不变，然后根据顶点式写出新抛物线解析式.

【详解】 抛物线 $y = 2x^2$ 平移，使顶点移到点 $P(-3, 1)$ 的位置，所得新抛物线的表达式为 $y = 2(x+3)^2 + 1$.
故答案为 $y = 2(x+3)^2 + 1$

【点睛】 本题考查了二次函数图象与几何变换：由于抛物线平移后的形状不变，故 a 不变，所以求平移后的抛物线解析式通常可利用两种方法：一是求出原抛物线上任意两点平移后的坐标，利用待定系数法求出解析式；二是只考虑平移后的顶点坐标，即可求出解析式.

12. 已知点 $A(-3, y_1)$ 和 $B(1, y_2)$ 都在抛物线 $y = 2(x-1)^2 - 2$ 上，那么 y_1 和 y_2 的大小关系为 y_1 ____ y_2 (填“ $>$ ”或“ $<$ ”或“ $=$ ”).

【答案】 $>$

【解析】

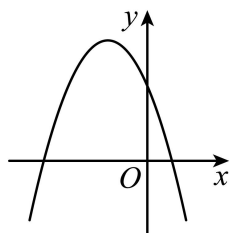
【分析】 本题考查二次函数图象上点的坐标特征，根据图象上点的坐标适合解析式将点 A ， B 坐标代入解析式求解.

【详解】 解：将 $A(-3, y_1)$ ， $B(1, y_2)$ 代入 $y = 2(x-1)^2 - 2$ 得 $y_1 = 30$ ， $y_2 = -2$ ，

$\therefore y_1 > y_2$.

故答案为： $>$.

13. 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 如图所示，那么点 $P(b, c)$ 在第 ____ 象限.



【答案】 二

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次函数的性质，根据抛物线的开口方向 and 对称轴位置确定 b 的符号，抛物线与 y 轴的交点确定 c 的符号，即可确定点 $P(b, c)$ 所在的象限.

【详解】 解：由抛物线的图象得， $-\frac{b}{2a} = \frac{b}{2} < 0$ ， $c > 0$ ，

$\therefore b < 0$ ，

$\therefore P(b, c)$ 在第二象限.

故答案为：二.

14. 一个三角形框架模型的边长分别为 3 分米、4 分米和 5 分米，木工要以一根长 6 分米的木条为一边，做与模型相似的三角形，那么做出的三角形中，面积最大的是____平方分米.

【答案】24

【解析】

【分析】本题考查相似三角形的性质，勾股定理的逆定理，由相似三角形的判定：三组对应边的比相等的两个三角形相似求出三角形最大的三边，根据勾股定理的逆定理判断新三角形是直角三角形，根据三角形的面积公式计算即可.

【详解】解：当长是 6 分米的木条与三角形框架模型的边长最短的 3 分米一条边是对应边时，做出的三角形的三边最大，面积最大，

设长是 4 分米，5 分米的边的对应边的长分别是 a 分米， b 分米，

$$\therefore 3:6=4:a=5:b,$$

$$\therefore a=8, b=10,$$

$\therefore$ 其他两条边的长分别是 8 分米，10 分米，

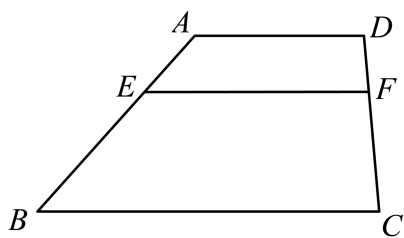
$$\because 6^2+8^2=10^2,$$

$\therefore$ 做出的三角形是直角三角形，直角边分别是 6 分米，8 分米，

$\therefore$ 做出的三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$ (平方分米).

故答案为：24.

15. 如图，已知 $AD \parallel EF \parallel BC$ ， $BC = 2AD$ ， $BE = 2AE$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ ，那么用 $\vec{a}$ 表示 $\overrightarrow{EF} =$ ____.



【答案】 $\frac{4}{3}\vec{a}$

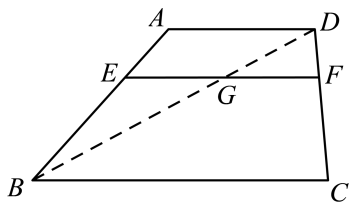
【解析】

【分析】本题考查了向量的运算、相似三角形的判定与性质，连接 BD ，交 EF 于点 G ，先根据

$AD \parallel EF \parallel BC$ 求得 $\frac{AE}{BE} = \frac{DF}{CF} = \frac{1}{2}$ ， $\triangle EGB \sim \triangle ADB$ ， $\triangle DGF \sim \triangle DBC$ ，根据相似三角形的性质可得

$EG = \frac{2}{3}AD$ ， $GF = \frac{1}{3}BC$ ，即可得出 $EF = EG + GF = \frac{4}{3}AD$ ，由此即可得.

【详解】解：连接 BD ，交 EF 于点 G ，



$$\because AD \parallel EF \parallel BC, \quad BE = 2AE,$$

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{DF}{CF} = \frac{1}{2}, \quad \triangle EGB \sim \triangle ADB, \quad \triangle DGF \sim \triangle DBC,$$

$$\therefore \frac{EG}{AD} = \frac{BE}{AB} = \frac{2}{3}, \quad \frac{GF}{BC} = \frac{DF}{DC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore EG = \frac{2}{3}AD, \quad GF = \frac{1}{3}BC,$$

$$\because BC = 2AD,$$

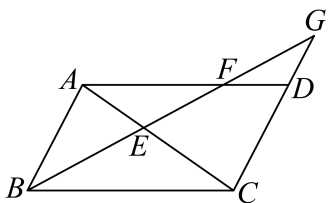
$$\therefore GF = \frac{1}{3}BC = \frac{2}{3}AD$$

$$\therefore EF = EG + GF = \frac{4}{3}AD$$

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\vec{a},$$

故答案为： $\frac{4}{3}\vec{a}$.

16. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 F 是 AD 上的点， $AF = 2FD$ ，直线 BF 与 AC 相交于点 E ，交 CD 的延长线于点 G ，若 $BE = 2$ ，则 EG 的值为_____.



【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的性质，平行线分线段成比例，设 $FD = x$ ，则 $AF = 2x$ ， $AD = 3x$ ，根据平行四边形的性质可得 $AD \parallel BC$ ， $AB \parallel CD$ ， $AD = BC = 3x$ ，根据平行线分线段成比例即可解决问题.

【详解】解：设 $FD = x$ ，

由 $AF = 2FD$ ，则 $AF = 2x$ ， $AD = 3x$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC, \quad AB \parallel CD, \quad AD = BC = 3x,$$

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AF}{BC} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{BE}{EG} = \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3},$$

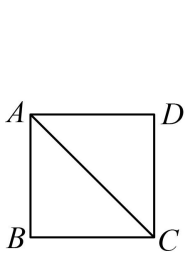
$$\therefore BE = 2,$$

$$\therefore \frac{2}{EG} = \frac{2}{3},$$

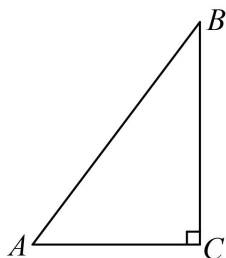
$$\therefore EG = 3,$$

故答案为：3.

17. 定义：如果以一条线段为对角线作正方形，那么称该正方形为这条线段的“对角线正方形”. 例如，图①中正方形 $ABCD$ 即为线段 AC 的“对角线正方形”. 如图②，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 4$ ，点 P 在边 AB 上，如果线段 PC 的“对角线正方形”有两边同时落在 $\triangle ABC$ 的边上，那么 AP 的长是_____.



图①



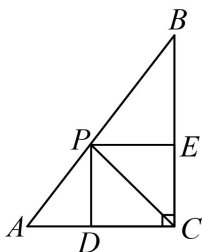
图②

【答案】 $\frac{15}{7}$ 或 $2\frac{1}{7}$

【解析】

【分析】 本题考查了正方形的性质，相似三角形的判定和性质，熟练掌握相似三角形的判定和性质定理是解题的关键. 根据正方形的性质和相似三角形的判定和性质定理即可得到结论.

【详解】 解：当线段 PC 的“对角线正方形”有两边同时落在 $\triangle ABC$ 的边上时，设正方形的边长为 x ，则 $PE = CE = PD = CD = x$ ， $BE = 4 - x$ ，



$$\therefore PE \parallel AC,$$

$$\therefore \triangle BPE \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \frac{PE}{AC} = \frac{BE}{BC},$$

$$\therefore \frac{x}{3} = \frac{4-x}{4},$$

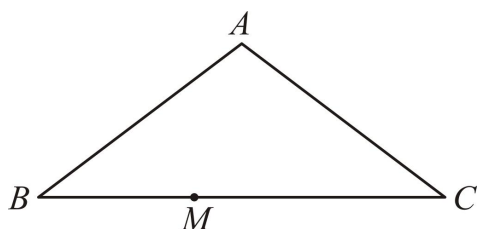
$$\text{解得: } x = \frac{12}{7},$$

$$\therefore PD = \frac{12}{7}, \quad AD = AC - CD = 3 - \frac{12}{7} = \frac{9}{7},$$

$$\therefore AP = \sqrt{AD^2 + PD^2} = \frac{15}{7},$$

故答案为: $\frac{15}{7}$.

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5$, $\tan B = \frac{3}{4}$, 点 M 在边 BC 上, $BM = 3$, 点 N 是射线 BA 上一动点, 连接 MN , 将 $\triangle BMN$ 沿直线 MN 翻折, 点 B 落在点 B' 处, 联结 $B'C$, 如果 $B'C \parallel AB$, 那么 BN 的长是_____.

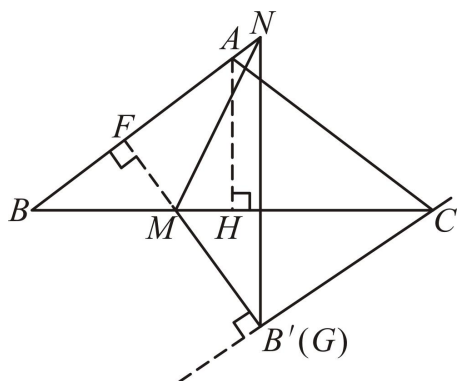


【答案】6

【解析】

【分析】 本题主要考查了三角形折叠与解直角三角形, 过 M 点作 $MG \perp B'C$, $FM \perp AB$, $AH \perp BC$ 垂足分别为 F 、 G 、 H , 由 $AB = AC = 5$, $\tan B = \frac{3}{4}$, 求出 $AH = 3$, $BH = CH = 4$, $FM = BM \cdot \sin \angle B = \frac{9}{5}$, $MG = CM \cdot \sin \angle BCB' = 3$, 得出 F 、 M 、 B' 三点在同一直线上, 进而可得 $FN = FB' \cdot \tan \angle FB'N = \frac{18}{5}$, 再求出 $BF = \frac{FM}{\tan \angle B} = \frac{12}{5}$, 由 $BN = BF + FN = 6$ 解题.

【详解】 解: 过 M 点作 $MG \perp B'C$, $FM \perp AB$, $AH \perp BC$ 垂足分别为 F 、 G 、 H ,



设 $AH = 3x$,

$$\therefore \tan B = \frac{3}{4}, \quad AH \perp BC$$

$$\therefore BH = CH = 4x$$

$$\because AB = AC = 5, \quad AH^2 + BH^2 = AB^2,$$

$$\therefore (3x)^2 + (4x)^2 = 5^2, \quad \text{解得 } x = 1,$$

$$\therefore AH = 3, \quad BH = CH = 4,$$

$$\therefore \sin B = \frac{3}{5},$$

$$\because B'C \parallel AB,$$

$$\therefore \angle B = \angle BCB',$$

$$\because BM = 3,$$

$$\therefore CM = 5,$$

$$\therefore FM = BM \cdot \sin \angle B = 3 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5},$$

$$MG = CM \cdot \sin \angle BCB' = 5 \times \frac{3}{5} = 3,$$

$$\because MB = MB' = 3,$$

$$\therefore MG = MB', \quad \text{即 } B' \text{ 与 } G \text{ 点重合},$$

$$\therefore F、M、B' \text{ 三点在同一直线上},$$

$$\therefore FB' = FM + MG = \frac{9}{5} + 3 = \frac{24}{5},$$

$$\text{由折叠可知: } \angle FB'N = \angle B,$$

$$\therefore FN = FB' \cdot \tan \angle FB'N = \frac{24}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{18}{5},$$

$$\because BF = \frac{FM}{\tan \angle B} = \frac{9}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{12}{5},$$

$$\therefore BN = BF + FN = \frac{12}{5} + \frac{18}{5} = 6,$$

故答案为 6

【点睛】本题涉及了解三角形、折叠性质、等腰三角形性质、勾股定理等，解题关键是通过计算点 M 到 $B'C$ 的距离等于 BM 得出 $F、M、B'$ 三点在同一直线上。

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

$$19. \text{ 计算: } 4\sin^2 30^\circ - \frac{\tan 45^\circ}{\cos 30^\circ - \cos 60^\circ}$$

【答案】 $-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】直接利用特殊角的三角函数值代入进而计算得出答案。

$$\begin{aligned}
 & \text{【详解】解: } 4\sin^2 30^\circ - \frac{\tan 45^\circ}{\cos 30^\circ - \cos 60^\circ} \\
 &= 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}} \\
 &= 1 - \frac{2}{\sqrt{3} - 1} \\
 &= 1 - (\sqrt{3} + 1) \\
 &= -\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

【点睛】本题主要考查了特殊角的三角函数值，解题的关键是熟记特殊角三角函数值.

20. 画二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图像时，在“列表”的步骤中，小明列出如下表格（不完整）. 请补全表格，并求该二次函数的解析式.

x	...	-1	0	2	4	5	...
y	...	-5	-	4	-	-5	...

【答案】见解析， $y = -x^2 + 4x$

【解析】

【分析】此题主要考查了待定系数法求二次函数的解析式，求二次函数的值，熟练掌握待定系数法求二次函数的解析式是解决问题的关键. 由表格中的对应值得当 $x = -1$ 时， $y = -5$ ，当 $x = 2$ 时， $y = 4$ ，然后将其代入二次函数 $y = ax^2 + bx$ 中求出 a ， b 的值可得该二次函数的解析式，然后再分别求出当 $x = 0$ 时， $x = 4$ 时对应的 y 的值即可.

【详解】解：由表格中的对应值可知：当 $x = -1$ 时， $y = -5$ ，当 $x = 2$ 时， $y = 4$ ，

$$\therefore \begin{cases} a - b = -5 \\ 4a + 2b = 4 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases},$$

$\therefore$ 该二次函数的解析式为： $y = -x^2 + 4x$ ，

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时， $y = 0$ ，当 $x = 4$ 时， $y = 0$ ，

填表如下：

x	$\cdots$	-1	0	2	4	5	$\cdots$
y	$\cdots$	-5	0	4	0	-5	$\cdots$

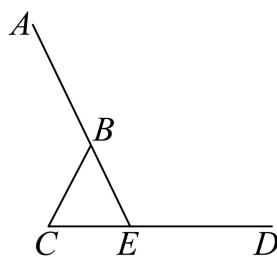
21. 如图①是某款智能磁吸键盘，如图②是平板吸附在该款设备上的照片，图③是图②的示意图. 已知 $BC = 8\text{cm}$ ， $CD = 20\text{cm}$ ， $\angle BCD = 63^\circ$. 当 AE 与 BC 形成的 $\angle ABC$ 为 116° 时，求 DE 的长. (参考数据: $\sin 63^\circ \approx 0.90$ ， $\cos 63^\circ \approx 0.45$ ， $\cot 63^\circ \approx 0.50$ ； $\sin 53^\circ \approx 0.80$ ， $\cos 53^\circ \approx 0.60$ ， $\cot 53^\circ \approx 0.75$)



图①



图②



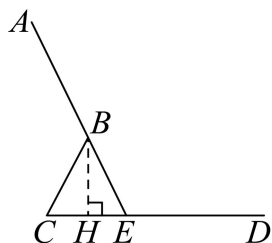
图③

【答案】11cm

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形的应用，过 B 作 $BH \perp CE$ 于 H ，解直角三角形即可得到结论.

【详解】解：过 B 作 $BH \perp CE$ 于 H ，



$$\text{在 Rt}\triangle BCH \text{ 中, } \because \sin 63^\circ = \frac{BH}{BC} = \frac{BH}{8} \approx 0.90, \quad \cos 63^\circ = \frac{CH}{BC} = \frac{CH}{8} \approx 0.45,$$

$$\therefore BH = 7.2\text{cm}, \quad CH = 3.6\text{cm},$$

$$\text{在 Rt}\triangle BEH \text{ 中, } \because \angle BEH = \angle ABC - \angle BCE = 53^\circ,$$

$$\therefore \cot 53^\circ = \frac{HE}{BH} = \frac{HE}{7.2} \approx 0.75,$$

$$\therefore HE = 5.4\text{cm},$$

$$\therefore CE = CH + EH = 3.6 + 5.4 = 9(\text{cm}),$$

$$\therefore DE = CD - CE = 20 - 9 = 11(\text{cm}),$$

答： DE 的长为11cm.

22. 如图①，已知线段 a 、 b 和 $\angle MON$. 如图②，小明在射线 OM 上顺次截取 $OA = 2a$ ， $AB = 3a$ ，在

射线 ON 上顺次截取 $OC = 2b$, $CD = 3b$. 连接 AC 、 BC 和 BD , $AC = 4$, $BC = 6$.

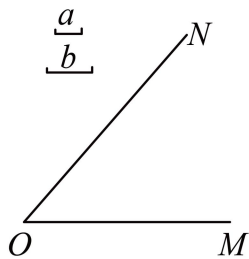


图 ①

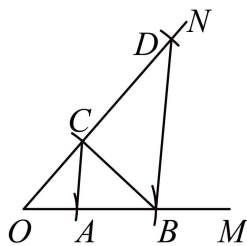


图 ②

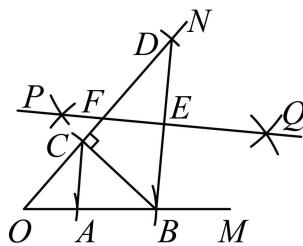


图 ③

(1) 求 BD 的长;

(2) 小明继续作图, 如图③, 分别以点 B 、 D 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}BD$ 的长为半径作弧, 两弧分别相交于点 P 、

Q , 连接 PQ , 分别交 BD 、 OD 于点 E 、 F . 如果 $BC \perp OD$, 求 EF 的长.

【答案】(1) $BD = 10$

(2) $EF = \frac{15}{4}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了相似三角形的判定和性质以及基本作图.

(1) 由两边对应成比例及夹角相等, 两三角形相似证明 $\triangle OCA \sim \triangle ODB$, 在相似三角形性质即可求解;

(2) 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 由勾股定理求出 $CD = \sqrt{BD^2 - BC^2} = 8$, 再根据作法可知 PQ 是 BD 的垂直平分线, 证明 $\triangle BCD \sim \triangle EFD$, 由相似三角形性质即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because OA = 2a$, $AB = 3a$, $OC = 2b$, $CD = 3b$

$$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{2}{5},$$

又 $\because \angle O = \angle O$,

$$\therefore \triangle OCA \sim \triangle ODB,$$

$$\therefore \frac{AC}{BD} = \frac{OA}{OB} = \frac{2}{5},$$

$$\because AC = 4,$$

$$\therefore \frac{4}{BD} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore BD = 10,$$

【小问 2 详解】

$$\because BC = 6, BD = 10, BC \perp OD,$$

$$\therefore CD = \sqrt{BD^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8,$$

由作法可知, PQ 是 BD 的垂直平分线, 即 $EF \perp BD$, $DE = BE = \frac{1}{2}BD = 5$,

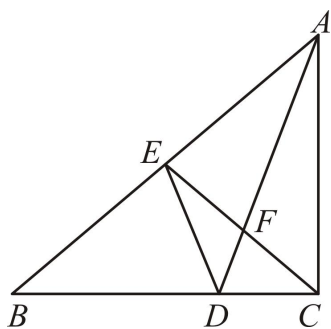
$$\therefore \angle CDB = \angle EDF, \quad \angle BCD = \angle FED,$$

$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle FED,$$

$$\therefore \frac{BC}{EF} = \frac{CD}{ED}, \quad \text{即} \quad \frac{6}{EF} = \frac{8}{5},$$

$$\therefore EF = \frac{15}{4}$$

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知点 D 、 E 分别在边 BC 、 AB 上, EC 和 AD 相交于点 F , $\angle EDB = \angle ADC$, $DE^2 = DF \cdot DA$.



(1) 求证: $\triangle ABD \sim \triangle ECD$;

(2) 如果 $\angle ACB = 90^\circ$, 求证: $FC = \frac{1}{2}EC$.

【答案】(1) 见解析;

(2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的判定和性质, 直角三角形的性质, 熟练掌握相似三角形的判定和性质定理是解题的关键.

(1) 根据相似三角形的判定和性质定理即可得到结论;

(2) 根据相似三角形的判定和性质以及直角三角形的性质即可得到结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because DE^2 = DF \cdot DA$,

$$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{DF}{DE},$$

$$\therefore \angle FDE = \angle EDA,$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle DAE,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle DEF,$$

$$\therefore \angle EDB = \angle ADC,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle CDE,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ECD;$$

【小问 2 详解】

由 (1) 知, $\triangle ABD \sim \triangle ECD$,

$$\therefore \angle B = \angle ECD,$$

$$\therefore BE = CE,$$

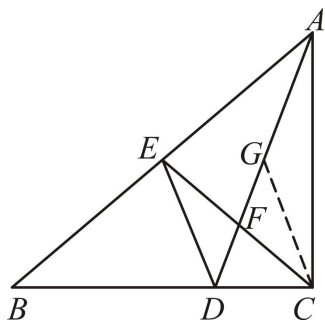
$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle B = \angle BCE + \angle ACE,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACE,$$

$$\therefore AE = BE = CE,$$

取 AD 的中点 G , 连接 CG ,



$$\therefore \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\therefore DG = CG = \frac{1}{2} AD,$$

$$\therefore \angle GDC = \angle GCD,$$

$$\therefore \angle DGC = 180^\circ - 2\angle ADC,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle ADC,$$

$$\therefore \angle ADE = 180^\circ - 2\angle ADC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle CGF,$$

由 (1) 知, $\triangle DEF \sim \triangle DAE$,

$$\therefore \angle AED = \angle DFE,$$

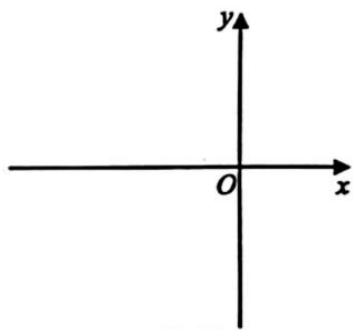
$$\therefore \angle DFE = \angle CFG,$$

$$\therefore \angle AED = \angle CFG,$$

$$\therefore \triangle CGF \sim \triangle ADE,$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{CG}{AD} &= \frac{CF}{AE} = \frac{1}{2}, \\ \therefore CF &= \frac{1}{2}AE, \\ \therefore FC &= \frac{1}{2}EC.\end{aligned}$$

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中. 已知抛物线 $y = x^2 + 2x + m$ 经过点 $A(-3, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 连接 AC 交该抛物线的对称轴于点 E .



- (1) 求 m 的值和点 E 的坐标;
- (2) 点 M 是抛物线的对称轴上一点且在直线 AC 的上方.
 - ① 连接 AM 、 CM , 如果 $\angle AME = \angle MCA$, 求点 M 的坐标;
 - ② 点 N 是抛物线上一点, 连接 MN , 当直线 AC 垂直平分 MN 时, 求点 N 的坐标.

【答案】 (1) $m = -3$, 点 $E(-1, -2)$

(2) ① 点 $M(-1, 2\sqrt{2})$, ② 点 $N(-1-\sqrt{2}, -2)$

【解析】

【分析】 (1) 把 $A(-3, 0)$ 代入 $y = x^2 + 2x + m$, 求出 m , 求出抛物线的对称轴, 在用待定系数法求出直线 AC 的解析式, 可得点 E 的坐标.

(2) ① 设 $M(-1, n)$, 证明 $\triangle AME \sim \triangle ACM$, 得到 $AM^2 = AE \cdot AC$, 利用勾股定理得出 AE , AC , AM 的长, 列方程求 n , 可求 M 的坐标.

② 连接 NE , 求出 $\angle MEN = 90^\circ$, N 的纵坐标为 -2 , 在代入二次函数解析式求横坐标.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y = x^2 + 2x + m$ 经过点 $A(-3, 0)$,

$$\therefore 9 - 6 + m = 0,$$

解得 $m = -3$,

$$\therefore C(0, -3), \text{ 抛物线的解析式为 } y = x^2 + 2x - 3,$$

$$\therefore y = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4,$$

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = -1$,

设直线 AC 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} -3k + b = 0 \\ b = -3 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -1 \\ b = -3 \end{cases},$$

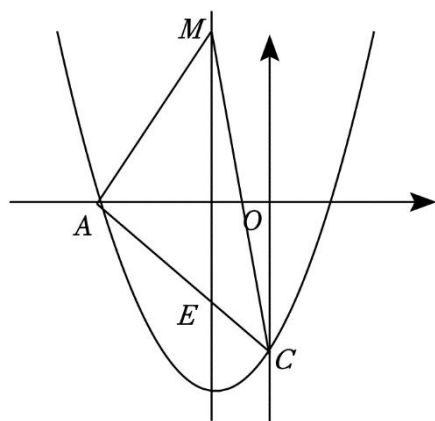
$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y = -x - 3$,

当 $x = -1$ 时, $y = -2$,

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(-1, -2)$;

【小问 2 详解】

①如图, 设 $M(-1, n)$,



$\therefore A(-3, 0), C(0, -3), E(-1, -2),$

$$\therefore AE = \sqrt{(-3+1)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$AC = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2},$$

$$AM = \sqrt{(-3+1)^2 + n^2} = \sqrt{4+n^2},$$

$\therefore \angle AME = \angle MCA, \angle MAE = \angle CAM,$

$\therefore \triangle AME \sim \triangle ACM,$

$$\therefore \frac{AE}{AM} = \frac{AM}{AC},$$

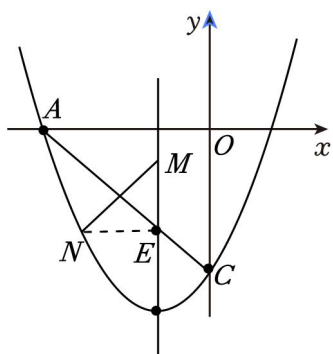
$$\therefore AM^2 = AE \cdot AC,$$

$$\therefore 4 + n^2 = 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2},$$

$$\therefore n_1 = -2\sqrt{2} \text{ (不合题意舍去)}, n_2 = 2\sqrt{2}.$$

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(-1, 2\sqrt{2})$;

② 连接 NE .



$$\because OA = OC = 3, \angle AOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AEM = 45^\circ,$$

$\because$ 直线 AC 垂直平分 MN ,

$$\therefore ME = NE, \angle AEM = \angle AEN = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle NEM = 90^\circ.$$

$\because$ 点 E 的纵坐标为 -2 ,

$\therefore$ 点 N 的纵坐标为 -2 ,

$$\therefore x^2 + 2x - 3 = -2,$$

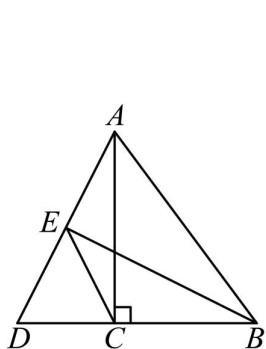
$$x^2 + 2x - 1 = 0,$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{2}, \text{ 不合题意舍去. } x_2 = -1 - \sqrt{2}.$$

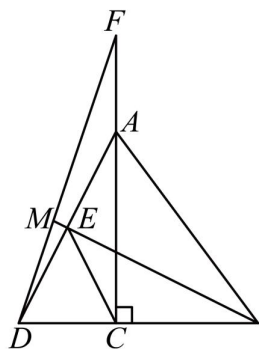
所以点 N 的坐标为 $(-1 - \sqrt{2}, -2)$.

【点睛】 本题考查了二次函数的性质和应用，待定系数法求一次函数的解析式，相似三角形的判定和性质，垂直平分线的性质，关键是二次函数和三角形知识的综合运用.

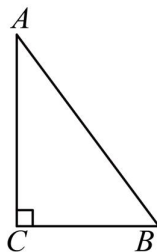
25. 如图①，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\tan \angle ABC = \frac{4}{3}$ ，点 D 在边 BC 的延长线上，连接 AD ，点 E 在线段 AD 上， $\angle EBD = \angle DAC$.



图①



图②



备用图

(1) 求证: $\triangle DBA \sim \triangle DEC$;

(2) 点 F 在边 CA 的延长线上, DF 与 BE 的延长线交于点 M (如图②).

①如果 $AC = 2AF$, 且 $\triangle DEC$ 是以 DC 为腰的等腰三角形, 求 $\tan \angle FDC$ 的值;

②如果 $DE = \frac{\sqrt{5}}{2}CD$, $EM = 3$, $FM : DM = 5 : 3$, 求 AF 的长.

【答案】(1) 证明见解析

(2) ① $\tan \angle FDC = \frac{36}{7}$ 或 2; ② $AF = 8\sqrt{5}$

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle ACD \sim \triangle BED$, 从而得出 $\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{DE}$, 进而得出 $\triangle DBA \sim \triangle DEC$;

(2) ①由两种情形: 当 $DC = CD$ 时, 可推出 $AD = BD$, 可设 $CD = x$, $BC = 3a$, $AC = 4a$, 则 $AD = BD = 3a + x$, 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中勾股定理得: $x^2 + (4a)^2 = (3a + x)^2$, 从而 $x = \frac{7}{6}a$, 进而得出 $CD = \frac{7}{6}a$, $CF = AF + AC = 6a$, 从而求得 $\tan \angle FDC = \frac{CF}{CD} = \frac{36}{7}$; 当 $CE = CD$ 时, 根据 $\triangle DBA \sim \triangle DEC$ 得出 $\frac{AB}{AD} = \frac{CE}{CD}$, 从而 $AB = AD$, 进一步得出结果;

②根据 (1) 可设 $BD = \sqrt{5}t$, $AD = 2t$, 设 $BC = 3a$, $AC = 4a$, $AB = 5a$, 先由条件 $DE = \frac{\sqrt{5}}{2}CD$, 确定 $AB = BD$, 进而表示出 EX 和 AX , 作 $DN \parallel CF$, 交 BE 的延长线于点 N , 设 AC 与 BE 的交点为 X , 可得出 $\triangle DMN \sim \triangle FMX$, 从而 $\frac{DN}{FX} = \frac{MN}{MX} = \frac{DM}{FM} = \frac{3}{5}$, 从而得出 $FX = \frac{5}{3}DN$, 可证得 $\triangle DNE \cong \triangle AXE$, 从而得出 $EN = EX = \frac{\sqrt{5}}{2}a$, $DN = AX = \frac{5}{2}a$, 从而表示出 $NX = EN + EX = \sqrt{5}a$, $FX = \frac{5}{3}DN = \frac{25}{6}a$, 进而得出 $AF = FX - AX = \frac{5}{3}a$, 根据 $\frac{MN}{MX} = \frac{3}{5}$ 得出 $MN = \frac{3}{8}NX = \frac{3\sqrt{5}a}{8}$, 进而根据 $EN - MN = ME$ 列出方程 $\frac{\sqrt{5}}{2}a - \frac{3\sqrt{5}}{8}a = 3$, 从而求得 a 的值, 进一步得出结果.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle EBD = \angle DAC$, $\angle D = \angle D$,

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BED$,

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{DE},$$

$\therefore \triangle DBA \sim \triangle DEC$;

【小问 2 详解】

解: ①当 $DC = CD$ 时,

由 (1) 知: $\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{DE}$,

$$\therefore AD = BD,$$

设 $CD = x$, $BC = 3a$, $AC = 4a$, 则 $AD = BD = 3a + x$,

则 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $AD = 3a + x$, $AC = 4a$, $CD = x$,

由勾股定理得: $x^2 + (4a)^2 = (3a + x)^2$,

$$\therefore x = \frac{7}{6}a,$$

$$\therefore CD = \frac{7}{6}a,$$

$$\because AC = 2AF,$$

$$\therefore AF = 2a,$$

$$\therefore CF = AF + AC = 6a,$$

$$\therefore \tan \angle FDC = \frac{CF}{CD} = \frac{36}{7},$$

当 $CE = CD$ 时,

由 (1) 知: $\triangle DBA \sim \triangle DEC$,

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{CE}{CD},$$

$$\therefore AB = AD,$$

$$\because AC \perp BD,$$

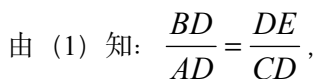
$$\therefore CD = CB = 3a,$$

$$\because CF = 6a,$$

$$\therefore \tan \angle FDC = \frac{CF}{CD} = 2,$$

综上所述: $\tan \angle FDC = \frac{36}{7}$ 或 2;

②如图,



$$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore CD = BD - CD = \sqrt{5}t - 3a ,$$

由勾股定理得, $CD^2 + AC^2 = AD^2$,

$$\therefore t_1 = \sqrt{5}a, \quad t_2 = 5\sqrt{5}a \quad (\text{舍去}),$$

$$\therefore AB = BD,$$

$$\therefore \angle BED = \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\therefore AE = DE = \sqrt{5}a,$$

$$\therefore EX = \frac{1}{2}AE = \frac{\sqrt{5}}{2}a ,$$

$$\therefore AX = \sqrt{AE^2 + EX^2} = \frac{5}{2}a,$$

作 $DN \parallel CF$ ，交 BE 的延长线于点 N ，设 AC 与 BE 的交点为 X ，

$$\therefore \angle N = \angle AXE, \quad \triangle DMN \sim \triangle FMX,$$

$$\therefore \frac{DN}{FX} = \frac{MN}{MX} = \frac{DM}{FM} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore FX = \frac{5}{3}DN,$$

$$\therefore \angle AEX = \angle DEN,$$

$$\therefore \triangle DNE \cong \triangle AXE (\text{AAS}),$$

$$\therefore EN = EX = \frac{\sqrt{5}}{2}a, \quad DN = AX = \frac{5}{2}a,$$

$$\therefore NX = EN + EX = \sqrt{5}a, \quad FX = \frac{5}{3}DN = \frac{25}{6}a,$$

$$\therefore AF = FX - AX = \frac{25}{6}a - \frac{5}{2}a = \frac{5}{3}a,$$

$$\therefore \frac{MN}{MX} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore MN = \frac{3}{8}NX = \frac{3\sqrt{5}a}{8},$$

由 $EN - MN = ME$ 得，

$$\frac{\sqrt{5}}{2}a - \frac{3\sqrt{5}}{8}a = 3,$$

$$\therefore a = \frac{24\sqrt{5}}{5},$$



电子版资料 小学 初中 高中

名师教学 - 务实课程 - 注重教辅

淘宝搜索店铺：优尖升教育

客服微信：DEM2008

手机淘宝扫一扫：



扫描二维码逛本店

ONLINE EDUCATION

为您的课程，我们一直在努力

最新资讯请认准“优尖升教育”，淘宝唯一一家，其他都是旧版



淘宝店铺网址：shop492842749.taobao.com

$$\therefore AF = \frac{5}{3}a = 8\sqrt{5}.$$

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定和性质，解直角三角形，等腰三角形的判定和性质等知识，解决问题的关键是作辅助线，构造相似三角形.