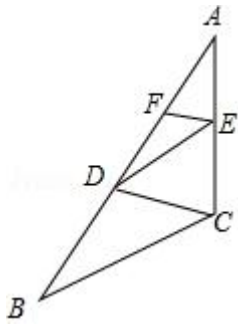


2017 年上海市宝山区中考数学二模试卷

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

1. (4 分) 5 的相反数是 ()
A. 2 B. -5 C. 5 D. $\frac{1}{5}$
2. (4 分) 方程 $3x^2 - 2x + 1 = 0$ 实数根的个数是 ()
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
3. (4 分) 下列函数中, 满足 y 的值随 x 的增大而增大的是 ()
A. $y = -2x$ B. $y = x - 3$ C. $y = \frac{1}{x}$ D. $y = x^2$
4. (4 分) 某老师在试卷分析中说: 参加这次考试的 41 位同学中, 考 121 分的人数最多, 虽然最高的同学获得了满分 150 分, 但是十分遗憾最低的同学仍然只得了 56 分, 其中分数居第 21 位的同学获得 116 分. 这说明本次考试分数的中位数是 ()
A. 21 B. 103 C. 116 D. 121
5. (4 分) 下列命题为真命题的是 ()
A. 由两边及一角对应相等的两三角形全等
B. 两个相似三角形的面积比等于其相似比
C. 同旁内角相等
D. 两组对边分别相等的四边形是平行四边形
6. (4 分) 如图, $\triangle ABC$ 中, 点 D、F 在边 AB 上, 点 E 在边 AC 上, 如果 $DE \parallel BC$, $EF \parallel CD$, 那么一定有 ()



- A. $DE^2=AD \cdot AE$ B. $AD^2=AF \cdot AB$ C. $AE^2=AF \cdot AD$ D. $AD^2=AE \cdot AC$

二、填空题 (本大题共 12 小题, 每小题 4 分, 共 48 分)

7. (4 分) 计算: $-\frac{5}{6} \div \frac{1}{3} =$ _____.

8. (4 分) 计算: $(2a - b)^2 =$ _____.

9. (4 分) 计算: $x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{x^3} =$ _____.

10. (4 分) 方程 $x + \sqrt{x} = 0$ 的解是_____.

11. (4 分) 如果正比例函数 $y = (k - 1)x$ 的图象经过原点和第一、第三象限, 那么 k _____.

12. (4 分) 二次函数 $y = x^2 - 2x$ 的图象的对称轴是直线_____.

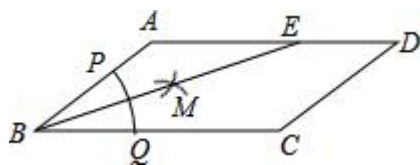
13. (4 分) 一枚 (形状为正方体的) 骰子可以掷出 1、2、3、4、5、6 这六个数中的任意一个, 用这个骰子随机掷出的一个数替代二次根式 $\sqrt{x-3}$ 中的字母 x , 使该二次根式有意义的概率是_____.

14. (4 分) 为了解某中学九年级学生的上学方式, 从该校九年级全体 300 名学生中, 随机抽查了 60 名学生, 结果显示有 5 名学生“骑共享单车上学”. 由此, 估计该校九年级全体学生中约有_____名学生“骑共享单车上学”.

15. (4 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中, 点 M 、 N 分别是边 AB 、 AC 的中点, 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{MN} =$ _____ (结果用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示).

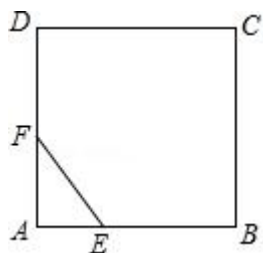
16. (4 分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AB=3$, $BC=5$, 以点 B 的圆心, 以任意长为

半径作弧，分别交 BA、BC 于点 P、Q，再分别以 P、Q 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}PQ$ 的长为半径作弧，两弧在 $\angle ABC$ 内交于点 M，连接 BM 并延长交 AD 于点 E，则 DE 的长为_____.



17. (4 分) 已知一条长度为 10 米的斜坡两端的垂直高度差为 6 米，那么该斜坡的坡角度数约为_____ (备用数据: $\tan 31^\circ = \cot 59^\circ \approx 0.6$, $\sin 37^\circ = \cos 53^\circ \approx 0.6$)

18. (4 分) 如图，E、F 分别为正方形 ABCD 的边 AB、AD 上的点，且 $AE=AF$ ，连接 EF，将 $\triangle AEF$ 绕点 A 逆时针旋转 45° ，使 E 落在 E_1 ，F 落在 F_1 ，连接 BE_1 并延长交 DF_1 于点 G，如果 $AB=2\sqrt{2}$ ， $AE=1$ ，则 $DG=$ _____.

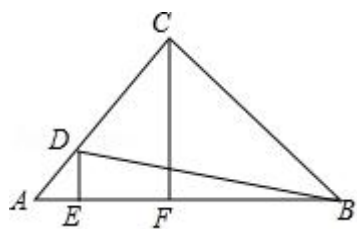


三、解答题 (本大题共 7 小题，共 78 分)

19. (10 分) 化简，再求值: $\frac{8}{x^2-4} + \frac{2}{x+2}$ ，其中 $x=\sqrt{5}$.

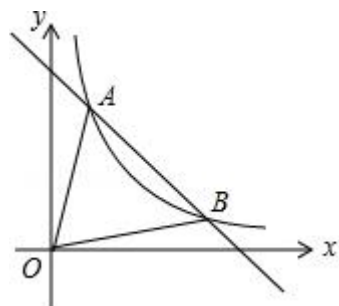
20. (10 分) 解方程组
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 16 \\ x^2 - 9y^2 = 0 \end{cases}$$
.

21. (10 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B=45^\circ$ ，点 D 为 $\triangle ABC$ 的边 AC 上一点，且 $AD:CD=1:2$ ，过 D 作 $DE \perp AB$ 于 E，C 作 $CF \perp AB$ 于 F，连接 BD，如果 $AB=7$ ， $BC=4\sqrt{2}$ ，求线段 CF 和 BE 的长度.



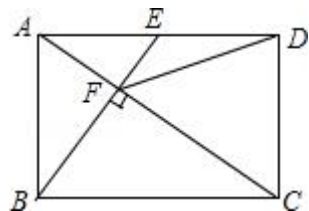
22. (10 分) 如图, 由正比例函数 $y = -x$ 沿 y 轴的正方向平移 4 个单位而成的一次函数 $y = -x + b$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 在第一象限的图象交于 A (1, n) 和 B 两点.

- (1) 求一次函数 $y = -x + b$ 和反比例函数的解析式;
- (2) 求 $\triangle ABO$ 的面积.



23. (12 分) 如图, 在矩形 ABCD 中, E 是 AD 边的中点, $BE \perp AC$, 垂足为点 F, 连接 DF,

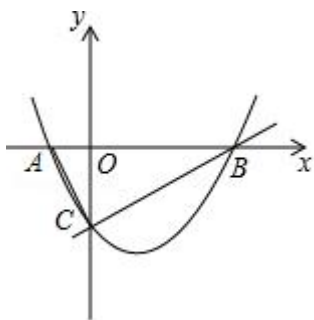
- (1) 求证: $CF = 2AF$;
- (2) 求 $\tan \angle CFD$ 的值.



24. (12 分) 如图, 已知直线 $y = \frac{1}{2}x - 2$ 与 x 轴交于点 B, 与 y 轴交于点 C, 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx - 2$ 与 x 轴交于 A、B 两点 (A 在 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C.

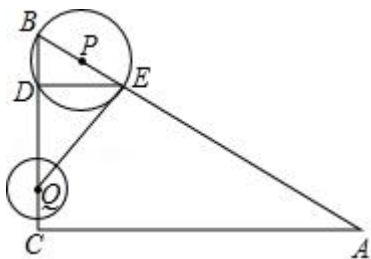
- (1) 求抛物线的解析式;
- (2) 点 M 是上述抛物线上一点, 如果 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ABC$ 相似, 求点 M 的坐标;

- (3) 连接 AC ，求顶点 D 、 E 、 F 、 G 在 $\triangle ABC$ 各边上的矩形 $DEFG$ 面积最大时，写出该矩形在 AB 边上的顶点的坐标.



25. (14 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB$ 为直角， $AB=10$ ， $\angle A=30^\circ$ ，半径为 1 的动圆 Q 的圆心从点 C 出发，沿着 CB 方向以 1 个单位长度/秒的速度匀速运动，同时动点 P 从点 B 出发，沿着 BA 方向也以 1 个单位长度/秒的速度匀速运动，设运动时间为 t 秒 ($0 < t \leq 5$) 以 P 为圆心， PB 长为半径的 $\odot P$ 与 AB 、 BC 的另一个交点分别为 E 、 D ，连结 ED 、 EQ .

- (1) 判断并证明 ED 与 BC 的位置关系，并求当点 Q 与点 D 重合时 t 的值；
- (2) 当 $\odot P$ 和 AC 相交时，设 CQ 为 x ， $\odot P$ 被 AC 截得的弦长为 y ，求 y 关于 x 的函数；并求当 $\odot Q$ 过点 B 时 $\odot P$ 被 AC 截得的弦长；
- (3) 若 $\odot P$ 与 $\odot Q$ 相交，写出 t 的取值范围.



2017 年上海市宝山区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1. (4 分) 5 的相反数是 ()

- A. 2 B. -5 C. 5 D. $\frac{1}{5}$

【考点】14: 相反数.

【分析】依据相反数的定义解答即可.

【解答】解: 5 的相反数是 -5.

故选: B.

【点评】本题主要考查的是相反数的定义, 掌握相反数的定义是解题的关键.

2. (4 分) 方程 $3x^2 - 2x + 1 = 0$ 实数根的个数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【考点】AA: 根的判别式.

【分析】根据方程的系数结合根的判别式即可得出 $\Delta = -8 < 0$, 由此即可得出原方程无解.

【解答】解: $\because$ 在方程 $3x^2 - 2x + 1 = 0$ 中, $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 1 = -8 < 0$,

$\therefore$ 方程 $3x^2 - 2x + 1 = 0$ 没有实数根.

故选: A.

【点评】本考查了根的判别式, 熟练掌握“当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数根”是解题的关键.

3. (4 分) 下列函数中, 满足 y 的值随 x 的增大而增大的是 ()

- A. $y = -2x$ B. $y = x - 3$ C. $y = \frac{1}{x}$ D. $y = x^2$

【考点】F5: 一次函数的性质; G4: 反比例函数的性质; H3: 二次函数的性质.

【分析】 根据一次函数、反比例函数、二次函数的性质考虑 4 个选项的单调性，
由此即可得出结论.

【解答】 解：A、在 $y = -2x$ 中， $k = -2 < 0$ ，

$\therefore y$ 的值随 x 的值增大而减小；

B、在 $y = x - 3$ 中， $k = 1 > 0$ ，

$\therefore y$ 的值随 x 的值增大而增大；

C、在 $y = \frac{1}{x}$ 中， $k = 1 > 0$ ，

$\therefore y$ 的值随 x 的值增大而减小；

D、二次函数 $y = x^2$ ，

当 $x < 0$ 时， y 的值随 x 的值增大而减小；

当 $x > 0$ 时， y 的值随 x 的值增大而增大.

故选：B.

【点评】 本题考查了一次函数的性质、反比例函数的性质以及二次函数的性质，
解题的关键是根据函数的性质考虑其单调性. 本题属于基础题，难度不大，
解决该题型题目时，熟悉各类函数的性质及其图象是解题的关键.

4. (4 分) 某老师在试卷分析中说：参加这次考试的 41 位同学中，考 121 分的人数最多，虽然最高的同学获得了满分 150 分，但是十分遗憾最低的同学仍然只得了 56 分，其中分数居第 21 位的同学获得 116 分. 这说明本次考试分数的中位数是 ()

A. 21

B. 103

C. 116

D. 121

【考点】 W4：中位数.

【分析】 根据中位数的定义解答即可得.

【解答】 解：由题意知，共有 41 为同学的数学成绩，

∴其中位数为第 21 名同学的成绩，即中位数为 116，

故选：C.

【点评】 本题主要考查中位数，熟练掌握中位数的定义：将一组数据按照从小到大（或从大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数就是这组数据的中位数. 如果这组数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数，是解题的关键.

5. (4 分) 下列命题为真命题的是 ()

- A. 由两边及一角对应相等的两三角形全等
- B. 两个相似三角形的面积比等于其相似比
- C. 同旁内角相等
- D. 两组对边分别相等的四边形是平行四边形

【考点】 O1: 命题与定理.

【分析】 利用三角形全等的判定、相似三角形的性质、平行线的性质及平行四边形的判定分别判断后即可确定正确的选项.

【解答】 解：A、由两边及夹角对应相等的两三角形全等，故错误，是假命题；

B、两个相似三角形的面积比等于相似比的平方，故错误，是假命题；

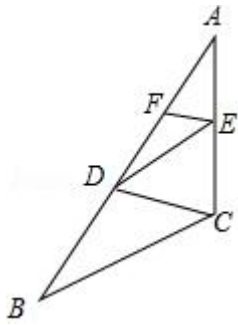
C、两直线平行，同旁内角互补，故错误，是假命题；

D、两组对边分别相等的四边形是平行四边形，故正确，是真命题，

故选：D.

【点评】 本题考查了命题与定理的知识，解题的关键是了解三角形全等的判定、相似三角形的性质、平行线的性质及平行四边形的判定，难度不大.

6. (4 分) 如图， $\triangle ABC$ 中，点 D、F 在边 AB 上，点 E 在边 AC 上，如果 $DE \parallel BC$ ， $EF \parallel CD$ ，那么一定有 ()



- A. $DE^2=AD \cdot AE$ B. $AD^2=AF \cdot AB$ C. $AE^2=AF \cdot AD$ D. $AD^2=AE \cdot AC$

【考点】 S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】 先证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 得到 $AD: AB=AE: AC$, 再证明 $\triangle AEF \sim \triangle ACD$

得到 $AF: AD=AE: AC$, 则 $AD: AB=AF: AD$, 然后利用比例的性质得到

$$AD^2=AF \cdot AB.$$

【解答】 解: $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore AD: AB=AE: AC,$$

$$\because EF \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ACD,$$

$$\therefore AF: AD=AE: AC,$$

$$\therefore AD: AB=AF: AD,$$

$$\therefore AD^2=AF \cdot AB.$$

故选: B.

【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质: 在判定两个三角形相似时, 应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件, 以充分发挥基本图形的作用, 寻找相似三角形的一般方法是通过作平行线构造相似三角形; 在利用相似三角形的性质时利用相似比表示线段之间的关系.

二、填空题 (本大题共 12 小题, 每小题 4 分, 共 48 分)

7. (4分) 计算: $-\frac{5}{6} \div \frac{1}{3} = -\frac{5}{2}$.

【考点】1D: 有理数的除法.

【专题】11: 计算题; 511: 实数.

【分析】原式利用除法法则变形, 计算即可得到结果.

【解答】解: 原式 $= -\frac{5}{6} \times 3 = -\frac{5}{2}$,

故答案为: $-\frac{5}{2}$

【点评】此题考查了有理数的除法, 熟练掌握除法法则是解本题的关键.

8. (4分) 计算: $(2a - b)^2 = 4a^2 - 4ab + b^2$.

【考点】4C: 完全平方公式.

【专题】11: 计算题; 512: 整式.

【分析】原式利用完全平方公式展开即可得到结果.

【解答】解: 原式 $= 4a^2 - 4ab + b^2$,

故答案为: $4a^2 - 4ab + b^2$

【点评】此题考查了完全平方公式, 熟练掌握完全平方公式是解本题的关键.

9. (4分) 计算: $x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{x^3} = x^2$.

【考点】2C: 实数的运算; 2F: 分数指数幂.

【专题】11: 计算题; 511: 实数.

【分析】原式利用分数指数幂, 以及平方根定义计算即可得到结果.

【解答】解: 原式 $= \sqrt{x} \cdot x \sqrt{x} = x^2$.

故答案为: x^2

【点评】此题考查了实数的运算, 以及分数指数幂, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

10. (4分) 方程 $x + \sqrt{x} = 0$ 的解是 0.

【考点】AG: 无理方程.

【分析】 本题含根号，计算比较不便，因此可先对方程两边平方，得到 $x=x^2$ ，再对方程进行因式分解即可解出本题.

【解答】 解：原方程变形为： $x=x^2$ 即 $x^2 - x=0$

$$\therefore (x-1)x=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 或 } x=1$$

$\therefore x=1$ 时不满足题意.

$$\therefore x=0.$$

故答案为：0.

【点评】 本题考查了一元二次方程的解法. 解一元二次方程常用的方法有直接开平方法，配方法，公式法，因式分解法，要根据方程的提点灵活选用合适的方法. 本题运用的是因式分解法和平方法.

11. (4 分) 如果正比例函数 $y=(k-1)x$ 的图象经过原点和第一、第三象限，那么 k >1 .

【考点】 F8: 一次函数图象上点的坐标特征.

【分析】 根据正比例函数的性质进行选择即可.

【解答】 解： $\therefore$ 正比例函数 $y=(k-1)x$ 的图象经过原点和第一、第三象限，

$$\therefore k-1>0,$$

$$\therefore k>1,$$

故答案为 >1 .

【点评】 本题考查了一次函数的性质，掌握一次函数的性质是解题的关键.

12. (4 分) 二次函数 $y=x^2-2x$ 的图象的对称轴是直线 $x=1$.

【考点】 H3: 二次函数的性质.

【分析】 先把二次函数 $y=x^2-2x$ 写成顶点坐标式 $y=(x-1)^2-1$ ，进而写出图象的对称轴方程.

【解答】解： $\because y = x^2 - 2x$,

$$\therefore y = (x - 1)^2 - 1,$$

$\therefore$ 二次函数的图象对称轴为 $x = 1$.

故答案为 $x = 1$.

【点评】 本题主要考查了二次函数的性质，解答本题的关键是把二次函数写出顶点坐标式，此题难度不大.

13. (4 分) 一枚 (形状为正方体的) 骰子可以掷出 1、2、3、4、5、6 这六个数中的任意一个，用这个骰子随机掷出的一个数替代二次根式 $\sqrt{x-3}$ 中的字母 x ，使该二次根式有意义的概率是 $\frac{2}{3}$.

【考点】 72: 二次根式有意义的条件; X4: 概率公式.

【分析】 据二次根式中被开方数的取值范围即二次根式中的被开方数是非负数，进而得出答案.

【解答】 解： $\because$ 1、2、3、4、5、6 这十个数中，

只有 $x = 3, 4, 5, 6$ 时，二次根式 $\sqrt{x-3}$ 中的字母 x 使所得二次根式有意义，

$$\therefore \text{二次根式 } \sqrt{x-3} \text{ 有意义的概率是: } \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

故答案为: $\frac{2}{3}$.

【点评】 此题主要考查了概率公式以及二次根式有意义的条件，得出具体符合题目的值是解题关键.

14. (4 分) 为了解某中学九年级学生的上学方式，从该校九年级全体 300 名学生中，随机抽查了 60 名学生，结果显示有 5 名学生“骑共享单车上学”. 由此，估计该校九年级全体学生中约有 25 名学生“骑共享单车上学”.

【考点】 V5: 用样本估计总体.

【分析】 用样本中“骑共享单车上学”的人数所占比例乘以总人数 300 即可得.

【解答】 解： 根据题意，估计该校九年级全体学生中“骑共享单车上学”的人数为

$$300 \times \frac{5}{60} = 25 \text{ 名},$$

故答案为：25.

【点评】 本题考查了用样本的数据特征来估计总体的数据特征，利用样本中的数据对整体进行估算是统计学中最常用的估算方法.

15. (4分) 已知在 $\triangle ABC$ 中，点M、N分别是边AB、AC的中点，如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$ (结果用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示).

【考点】 KX: 三角形中位线定理; LM: *平面向量.

【分析】 由 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 利用三角形法则求解即可求得 $\overrightarrow{BC}$, 又由在 $\triangle ABC$ 中, D、E分别是边AB、边AC的中点, 可得DE是 $\triangle ABC$ 的中位线, 然后利用三角形中位线的性质求解即可求得答案.

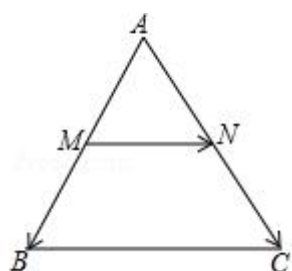
【解答】 解: $\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$,

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}.$$

又 $\because$ 点M、N分别是边AB、AC的中点,

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}).$$

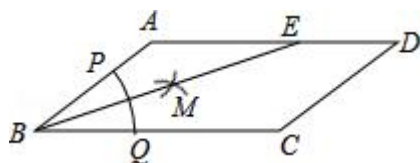
故答案是: $\frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$.



【点评】 此题考查了平面向量的知识以及三角形中位线的性质. 注意掌握三角形法则的应用.

16. (4分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AB=3$, $BC=5$, 以点B的圆心, 以任意长为半径作弧, 分别交BA、BC于点P、Q, 再分别以P、Q为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}PQ$ 的长为半径作弧, 两弧在 $\angle ABC$ 内交于点M, 连接BM并延长交AD于点E,

则 DE 的长为 2.



【考点】 L5: 平行四边形的性质.

【分析】 根据作图过程可得 BE 平分 $\angle ABC$; 再根据角平分线的性质和平行四边形的性质可证明 $\angle AEB = \angle CBE$, 证出 $AE = AB = 3$, 即可得出 DE 的长.,

【解答】 解: 根据作图的方法得: BE 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle ABE = \angle CBE$$

$\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC, AD = BC = 5,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle CBE,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle AEB,$$

$$\therefore AE = AB = 3,$$

$$\therefore DE = AD - AE = 5 - 3 = 2;$$

故答案为: 2.

【点评】 此题考查了平行四边形的性质、等腰三角形的判定. 熟练掌握平行四边形的性质, 证出 $AE = AB$ 是解决问题的关键.

17. (4 分) 已知一条长度为 10 米的斜坡两端的垂直高度差为 6 米, 那么该斜坡的坡角度数约为 37° (备用数据: $\tan 31^\circ = \cot 59^\circ \approx 0.6$, $\sin 37^\circ = \cos 53^\circ \approx 0.6$)

【考点】 T9: 解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题.

【分析】 根据题意求出斜坡的坡角的正弦, 计算即可.

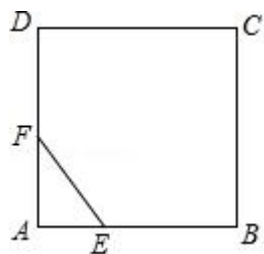
【解答】解：斜坡的坡角的正弦值为： $\frac{6}{10}=0.6$ ，

则斜坡的坡角度数约为 37° ，

故答案为： 37° 。

【点评】本题考查的是解直角三角形的应用－坡度坡角问题，掌握坡度坡角的概念、熟记锐角三角函数的定义是解题的关键。

18. (4 分) 如图，E、F 分别为正方形 ABCD 的边 AB、AD 上的点，且 $AE=AF$ ，连接 EF，将 $\triangle AEF$ 绕点 A 逆时针旋转 45° ，使 E 落在 E_1 ，F 落在 F_1 ，连接 BE_1 并延长交 DF_1 于点 G，如果 $AB=2\sqrt{2}$ ， $AE=1$ ，则 $DG=\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 。



【考点】LE：正方形的性质；R2：旋转的性质。

【专题】11：计算题。

【分析】连接 AC、 F_1E_1 、 DE_1 ， F_1E_1 交 AD 于 M，延长 BE_1 交 DF_1 于 H，如图，先利用正方形的性质得到 $\angle DAC=\angle BAC=45^\circ$ ，再根据旋转的性质得 $\angle E_1AE=\angle FAF_1=45^\circ$ ， $AE_1=AF_1=AE=AF=1$ ，于是可判断点 E_1 在 AC 上， $\triangle AE_1F_1$ 为等腰直角三角形，再证明 $E_1F_1\parallel AB$ ，作 $E_1N\perp AB$ 于 N，计算出 $BE_1=\sqrt{5}$ ，易证得 $\triangle ABE_1\cong\triangle ADE_1\cong\triangle ADF_1$ 得到 $DE_1=DF_1=BE_1=\sqrt{5}$ ， $\angle ABH=\angle ADH$ ，接着利用面积法计算出 $E_1H=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ，然后计算出 $HF_1=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ，所以 $DH=DF_1-HF_1=\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 。

【解答】解：连接 AC、 F_1E_1 、 DE_1 ， F_1E_1 交 AD 于 M，延长 BE_1 交 DF_1 于 H，如图，

$\therefore$ 四边形 ABCD 为正方形，

$$\therefore \angle DAC = \angle BAC = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle AEF$ 绕点 A 逆时针旋转 45° ,

$$\therefore \angle E_1AE = \angle FAF_1 = 45^\circ, \quad AE_1 = AF_1 = AE = AF = 1,$$

$\therefore$ 点 E_1 在 AC 上, $\triangle AE_1F_1$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle AE_1F_1 = 45^\circ, \quad E_1F_1 = \sqrt{2}, \quad AM = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore E_1F_1 \parallel AB, \quad DM = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

作 $E_1N \perp AB$ 于 N, 如图, $AN = E_1N = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\therefore BE = AB - AN = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore BE_1 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{5},$$

易证得 $\triangle ABE_1 \cong \triangle ADE_1 \cong \triangle ADF_1$,

$$\therefore DE_1 = DF_1 = BE_1 = \sqrt{5}, \quad \angle ABH = \angle ADH,$$

$$\therefore \angle DHB = \angle DAB = 90^\circ,$$

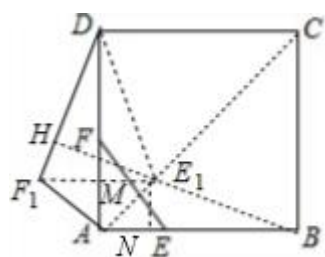
$$\therefore \frac{1}{2}DM \cdot E_1F_1 = \frac{1}{2} \cdot E_1H \cdot DF_1,$$

$$\therefore E_1H = \frac{\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{在 Rt}\triangle HF_1E_1 \text{ 中, } HF_1 = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore DH = DF_1 - HF_1 = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

故答案为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.



【点评】 本题考查了旋转的性质：对应点到旋转中心的距离相等；对应点与旋转

中心所连线段的夹角等于旋转角；旋转前、后的图形全等．也考查了等腰直角三角形的性质和正方形的性质．

三、解答题（本大题共 7 小题，共 78 分）

19. (10 分) 化简，再求值： $\frac{8}{x^2-4} + \frac{2}{x+2}$ ，其中 $x=\sqrt{5}$ ．

【考点】6D：分式的化简求值．

【专题】11：计算题．

【分析】首先化简 $\frac{8}{x^2-4} + \frac{2}{x+2}$ ，然后把 $x=\sqrt{5}$ 代入化简后的算式，求出算式的值是多少即可．

【解答】解： $\frac{8}{x^2-4} + \frac{2}{x+2}$

$$= \frac{8}{x^2-4} + \frac{2x-4}{x^2-4}$$
$$= \frac{2x+4}{x^2-4}$$
$$= \frac{2}{x-2}$$

当 $x=\sqrt{5}$ 时，

$$\text{原式} = \frac{2}{\sqrt{5}-2} = 2\sqrt{5}+4$$

【点评】此题主要考查了分式的化简求值问题，要熟练掌握，化简求值，一般是先化简为最简分式或整式，再代入求值．化简时不能跨度太大，而缺少必要的步骤．

20. (10 分) 解方程组 $\begin{cases} x^2-2xy+y^2=16 \\ x^2-9y^2=0 \end{cases}$ ．

【考点】AF：高次方程．

【专题】4：解题方法．

【分析】由于组中的两个高次方程都能分解为两个一次方程，所以先分解组中的两个二元二次方程，得到四个一元一次方程，重新组合成二元一次方程组，求出的四个二元一次方程组的解就是原方程的解．

【解答】 解:
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 16 \text{①} \\ x^2 - 9y^2 = 0 \text{②} \end{cases}$$

由①, 得 $(x - y)^2 = 16$,

所以 $x - y = 4$ 或 $x - y = -4$.

由②, 得 $(x + 3y)(x - 3y) = 0$,

即 $x + 3y = 0$ 或 $x - 3y = 0$

所以原方程组可化为:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + 3y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x - y = 4 \\ x - 3y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x - y = -4 \\ x + 3y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x - y = -4 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

解这些方程组, 得

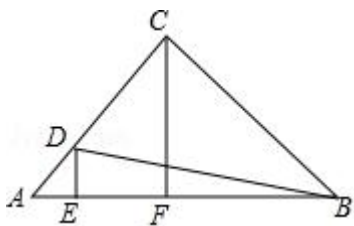
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -6 \\ y = -2 \end{cases}.$$

所以原方程组的解为: $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -6 \\ y = -2 \end{cases}.$

【点评】 本题考查了二元二次方程组的解法. 解决本题的关键是利用完全平方公式、平方差公式化二元二次方程组为四个一元一次方程组.

21. (10 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 45^\circ$, 点 D 为 $\triangle ABC$ 的边 AC 上一点,

且 $AD:CD = 1:2$, 过 D 作 $DE \perp AB$ 于 E, C 作 $CF \perp AB$ 于 F, 连接 BD, 如果 $AB = 7$, $BC = 4\sqrt{2}$, 求线段 CF 和 BE 的长度.



【考点】 S4: 平行线分线段成比例; T7: 解直角三角形.

【分析】 根据等腰直角三角形的性质求出 CF、BF, 根据平行线分线段成比例定理求出 EF, 计算即可.

【解答】 解: $\because CF \perp AB$, $\angle B = 45^\circ$, $BC = 4\sqrt{2}$,

$\therefore CF = BF = 4$,

$$\therefore AF=AB-BF=3,$$

$$\therefore DE \perp AB, CF \perp AB,$$

$$\therefore DE \parallel CF,$$

$$\therefore \frac{AE}{EF} = \frac{AD}{CD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore EF=2,$$

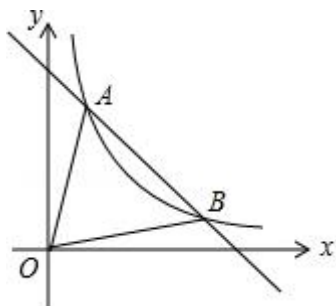
$$\therefore BE=EF+BF=6.$$

【点评】 本题考查的是平行线分线段成比例定理，灵活运用定理、找准对应关系是解题的关键.

22. (10 分) 如图，由正比例函数 $y = -x$ 沿 y 轴的正方向平移 4 个单位而成的一次函数 $y = -x + b$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 在第一象限的图象交于 A (1, n) 和 B 两点.

(1) 求一次函数 $y = -x + b$ 和反比例函数的解析式;

(2) 求 $\triangle ABO$ 的面积.



【考点】 G8: 反比例函数与一次函数的交点问题; Q3: 坐标与图形变化 - 平移.

【分析】 (1) 根据“上加下减”即可求出一次函数的解析式，将 $x=1$ 代入一次函数解析式中求出 n 值，根据点 A 的坐标利用反比例函数图象上点的坐标特征即可求出反比例函数解析式;

(2) 联立一次函数与反比例函数解析式成方程组，通过解方程组求出点 B 的坐

标，设直线 $y = -x + 4$ 与 x 轴的交点为 M ，与 y 轴的交点为 N ，利用一次函数图象上点的坐标特征可求出点 M 、 N 的坐标，根据三角形的面积结合 $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle MON} - S_{\triangle AON} - S_{\triangle BOM}$ 即可求出 $\triangle ABO$ 的面积。

【解答】 解：（1） $\because$ 正比例函数 $y = -x$ 沿 y 轴的正方向平移 4 个单位得到一次函数 $y = -x + b$ ，

$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y = -x + 4$ 。

$\because$ 点 $A(1, n)$ 在直线 $y = -x + 4$ 上，

$\therefore n = 3$ ，

$\therefore A(1, 3)$ 。

$\because$ 点 $A(1, 3)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象上，

$\therefore k = 1 \times 3 = 3$ ，

$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y = \frac{3}{x}$ 。

（2）联立一次函数与反比例函数解析式成方程组，

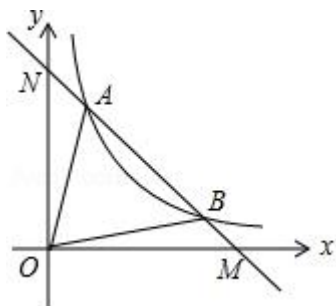
$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = \frac{3}{x} \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

$\therefore B(3, 1)$ 。

设直线 $y = -x + 4$ 与 x 轴的交点为 M ，与 y 轴的交点为 N ，

$\therefore M(4, 0)$ ， $N(0, 4)$ ，

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle MON} - S_{\triangle AON} - S_{\triangle BOM} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 4 \times 1 - \frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 4.$$



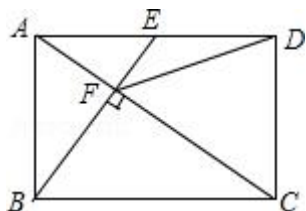
【点评】 本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题、一次函数图象上点的坐标特征、反比例函数图象上点的坐标特征以及三角形的面积，解题的关键是：

- (1) 利用一次函数图象上点的坐标特征找出点 A 的坐标；(2) 利用分割图形求面积法求出 $\triangle ABO$ 的面积.

23. (12 分) 如图，在矩形 ABCD 中，E 是 AD 边的中点， $BE \perp AC$ ，垂足为点 F，连接 DF，

(1) 求证： $CF=2AF$ ；

(2) 求 $\tan \angle CFD$ 的值.



【考点】 LB：矩形的性质；S9：相似三角形的判定与性质；T7：解直角三角形.

【分析】 (1) 由 $AD \parallel BC$ ，推出 $\triangle AEF \sim \triangle CBF$ ，得出对应边成比例，即可得出结论；

(2) 作 $DH \perp AC$ 于 H，证出 $DH \parallel BE$ ，得出比例式 $AF: FH = AE: ED = 1: 1$ ，
 $AF = FH = HC$ ，设 $AF = a$ ，则 $AH = 2a$ ， $CH = a$ ，证明 $\triangle ADH \sim \triangle DCH$ ，得出对应边成比例求出 $DH = \sqrt{2}a$ ，再由三角函数定义即可得出答案.

【解答】 (1) 证明： $\because E$ 是 AD 的中点，

$$\therefore AE=DE=\frac{1}{2}AD,$$

$\therefore$ 四边形 ABCD 是矩形,

$$\therefore AD \parallel BC, AD=BC,$$

$$\therefore BC=2AE, \triangle AEF \sim \triangle CBF,$$

$$\therefore AF:CF=AE:BC=1:2,$$

$$\therefore CF=2AF;$$

(2) 解: 作 $DH \perp AC$ 于 H, 如图所示:

$$\therefore BE \perp AC,$$

$$\therefore DH \parallel BE,$$

$$\therefore AF:FH=AE:ED=1:1,$$

$$\therefore AF=FH=HC,$$

设 $AF=a$, 则 $AH=2a$, $CH=a$,

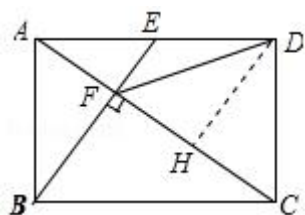
$$\therefore \angle DAH = \angle CDH = 90^\circ - \angle ADH, \angle AHD = \angle DHC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ADH \sim \triangle DCH,$$

$$\therefore \frac{DH}{HC} = \frac{AH}{DH}, \text{ 即 } \frac{DH}{a} = \frac{2a}{DH},$$

解得: $DH = \sqrt{2}a$,

$$\therefore \tan \angle CFD = \frac{DH}{FH} = \sqrt{2}.$$



【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质, 矩形的性质, 三角函数, 平行线分线段成比例定理等知识; 熟练掌握矩形的性质, 证明三角形相似是解决问

题的关键.

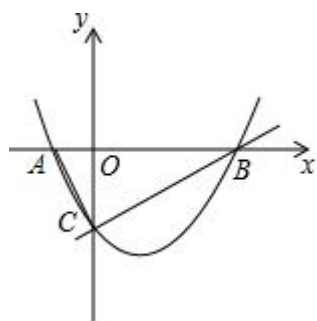
24. (12分) 如图, 已知直线 $y = \frac{1}{2}x - 2$ 与 x 轴交于点 B , 与 y 轴交于点 C , 抛

物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx - 2$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点 (A 在 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C .

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 点 M 是上述抛物线上一点, 如果 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ABC$ 相似, 求点 M 的坐标;

(3) 连接 AC , 求顶点 D 、 E 、 F 、 G 在 $\triangle ABC$ 各边上的矩形 $DEFG$ 面积最大时, 写出该矩形在 AB 边上的顶点的坐标.



【考点】 HF: 二次函数综合题.

【分析】 (1) 先求得点 B 和点 C 的坐标, 然后将 $B(4, 0)$ 代入抛物线的解析式求得 b 的值即可;

(2) 先求得抛物线的对称轴, 然后利用抛物线的对称性求得点 A 的坐标, 依据勾股定理的逆定理可判定 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 且 $\angle BCA = 90^\circ$, 则 $\triangle ABM \cong \triangle ABC$, 则点 M 与点 C 关于 $x = \frac{3}{2}$ 对称;

(3) 此题应分两种情况考虑: ①矩形有两个顶点在 AB 边上 (设这两点为 D 、 E), 首先设出 DG 的长为 m , 利用相似三角形 $\triangle CFG \sim \triangle CBA$ 得到的比例线段, 可求得 GF 的表达式, 进而可根据矩形的面积公式求出关于矩形的面积和 m 的函数关系式, 根据函数的性质即可得到矩形的最大面积及对应的 m 值, 从而确定出矩形的四顶点的坐标; ②矩形有一个顶点在 AB 边上 (设为 D), 此

时 C、F 重合，方法同①，首先设 $DE=n$ ，由 $\triangle ADG \sim \triangle ABC$ 求出 DG 的长，进而根据矩形的面积公式得到关于矩形的面积和 n 的函数关系式，从而根据函数的性质求得矩形的最大面积和对应的 n 值，进而确定矩形的四个顶点坐标.

【解答】 解：(1) 把 $x=0$ 代入直线的解析式得： $y=-2$,

$\therefore C(0, -2)$.

将 $y=0$ 代入直线的解析式得： $0=\frac{1}{2}x-2$ ，解得 $x=4$,

$\therefore B(4, 0)$.

将点 B (4, 0) 代入抛物线的解析式得： $8+4b-2=0$ ，解得 $b=-\frac{3}{2}$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2$.

(2) $\therefore$ 抛物线的对称轴为 $x=\frac{3}{2}$ ， B (4, 0)，

$\therefore A(-1, 0)$.

$\therefore AB=5$ ， $AC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ ， $BC=\sqrt{4^2+2^2}=4\sqrt{5}$.

$\therefore AC^2+BC^2=AB^2$.

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形，且 $\angle BCA=90^\circ$.

$\therefore M$ 为抛物线上的一点，

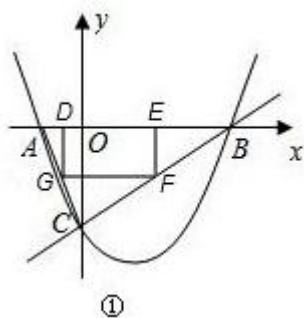
$\therefore$ 不可能由 $MB \perp AB$ 或 $MA \perp AB$.

$\therefore$ 当 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ABC$ 相似时，一定有 $\angle AMB=90^\circ$.

$\therefore \triangle BAM \cong \triangle ABC$.

$\therefore$ 点 M 的坐标为 (3, -2).

(3) ①如图①所示，矩形 DEFG 中 D、E 在 AB 边上.



设 $DG=EF=m$;

由于 $FG \parallel x$ 轴, 则 $\triangle CGF \sim \triangle CAB$, $\frac{2-m}{2} = \frac{FG}{5}$,

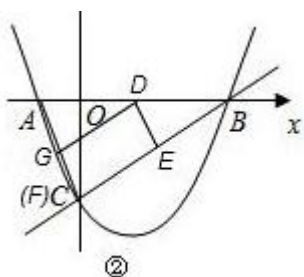
解得 $FG = 5 - \frac{5}{2}m$;

故矩形的面积 $S = DG \cdot FG = (5 - \frac{5}{2}m) m = -\frac{5}{2}m^2 + 5m$, 即 $S = -\frac{5}{2}(m-1)^2 + \frac{5}{2}$,

故 $m=1$ 时, 矩形的面积最大为 2.5;

此时 $D(-\frac{1}{2}, 0)$, $E(2, 0)$, $G(-\frac{1}{2}, -1)$, $F(2, -1)$;

②如图②所示, 矩形 DEFG 中, F、C 重合, D 在 AB 边上.



设 $DE=CG=n$, 同①可得: $\frac{\sqrt{5}-n}{\sqrt{5}} = \frac{DG}{2\sqrt{5}}$ 即 $DG = 2\sqrt{5} - 2n$;

故矩形的面积 $S = DE \cdot DG = (2\sqrt{5} - 2n) n = -2(n - \frac{\sqrt{5}}{2})^2 + \frac{5}{2}$, 即当 $n = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 时,

矩形的最大面积为 2.5;

此时 $BD = 5 \times \frac{DE}{\sqrt{5}} = \frac{5}{2}$, $OD = OB - BD = \frac{3}{2}$, 即 $D(\frac{3}{2}, 0)$;

综上所述, 矩形的最大面积为 2.5, 此时矩形在 AB 边上的顶点坐标为 $(-\frac{1}{2}, 0)$,

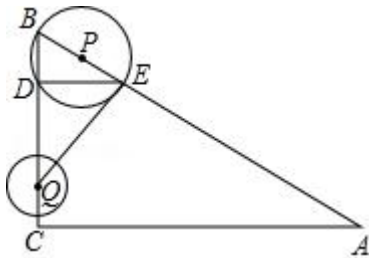
$(2, 0)$ 或 $(\frac{3}{2}, 0)$.

【点评】 此题考查了二次函数解析式的确定、直角三角形的判定、矩形面积的计算方法、二次函数最值的应用等知识, 要注意 (3) 题中, 矩形的摆放方法有

两种，不要漏解

25. (14 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB$ 为直角， $AB=10$ ， $\angle A=30^\circ$ ，半径为 1 的动圆 Q 的圆心从点 C 出发，沿着 CB 方向以 1 个单位长度/秒的速度匀速运动，同时动点 P 从点 B 出发，沿着 BA 方向也以 1 个单位长度/秒的速度匀速运动，设运动时间为 t 秒 ($0 < t \leq 5$) 以 P 为圆心， PB 长为半径的 $\odot P$ 与 AB 、 BC 的另一个交点分别为 E 、 D ，连结 ED 、 EQ 。

- (1) 判断并证明 ED 与 BC 的位置关系，并求当点 Q 与点 D 重合时 t 的值；
- (2) 当 $\odot P$ 和 AC 相交时，设 CQ 为 x ， $\odot P$ 被 AC 截得的弦长为 y ，求 y 关于 x 的函数；并求当 $\odot Q$ 过点 B 时 $\odot P$ 被 AC 截得的弦长；
- (3) 若 $\odot P$ 与 $\odot Q$ 相交，写出 t 的取值范围。



【考点】MR：圆的综合题。

【分析】(1) 根据直径所对的圆周角是直角，可知 $\angle BDE = \angle BCA = 90^\circ$ ，由此即可证明；

(2) 如图 3 中，设 $\odot P$ 和 AC 相交于 M 、 N 。 $BP=CQ=t$ ， $AP=AB-BP=10-t$ ，过点 P 作 $PH \perp AC$ 于 H 。在 $Rt\triangle APH$ 中，由 $\angle A=30^\circ$ ，推出 $PH=\frac{1}{2}AP=\frac{1}{2}(10-t)$ ，在 $Rt\triangle PHN$ 中， $NH=\sqrt{PN^2-PH^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3t^2+20t-100}$ ，推出 $MN=2MH=\sqrt{3t^2+20t-100}$ ，即 $y=\sqrt{3t^2+20t-100}$ ，由此即可角问题。

(3) 当 $\odot P$ 与 $\odot Q$ 外切时，如图 4 中，作 $PH \perp BC$ 于 H 。易知此时 $\angle QBP=60^\circ$ ， $BQ=5-t$ ， $PQ=t+1$ ， $BP=t$ ，在 $Rt\triangle PHQ$ 中，利用勾股定理即可列出方程解

决问题.

【解答】解：(1) 结论： $DE \perp BC$. 理由如下：

如图 1 中，

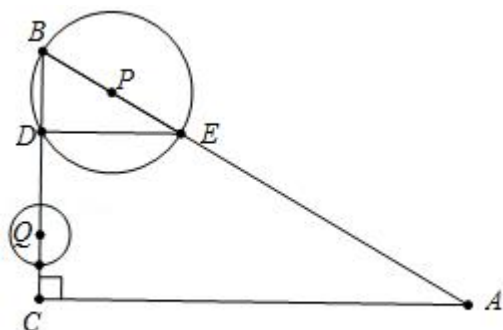


图1

$\because BE$ 是直径,

$\therefore \angle BDE = 90^\circ$,

$\therefore DE \perp BC$,

$\because \angle BCA = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$,

$\therefore DE \parallel AC$,

$\therefore \triangle BDE \sim \triangle BCA$,

$\therefore \frac{BD}{BE} = \frac{BC}{BA} = \frac{1}{2}$,

如图 2 中，当 C、D 重合时，设 $CQ = CD = t$ ，则 $BD = 5 - t$ ， $BE = 2t$ ，

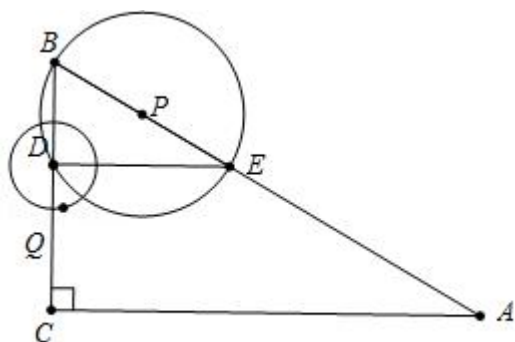


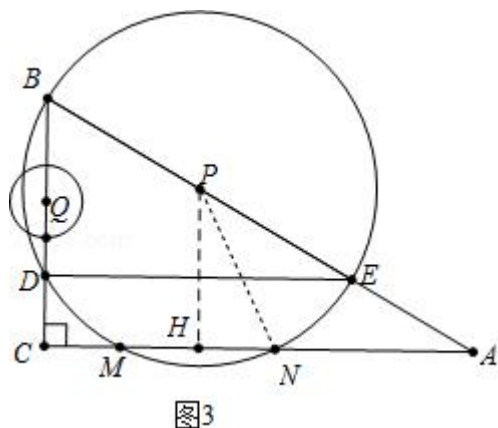
图2

$\therefore \frac{5-t}{2t} = \frac{1}{2}$,

$\therefore t = \frac{5}{2}$.

∴ 当 $t = \frac{5}{2}$ 时, Q 与 D 重合.

(2) 如图 3 中, 设 $\odot P$ 和 AC 相交于 M、N. $BP = CQ = t$, $AP = AB - BP = 10 - t$,
过点 P 作 $PH \perp AC$ 于 H.



在 $Rt\triangle APH$ 中, $\because \angle A = 30^\circ$,

$$\therefore PH = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}(10 - t),$$

在 $Rt\triangle PHN$ 中, $NH = \sqrt{PN^2 - PH^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3t^2 + 20t - 100}$,

$$MN = 2MH = \sqrt{3t^2 + 20t - 100},$$

$$\text{即 } y = \sqrt{3t^2 + 20t - 100},$$

当 $\odot O$ 经过点 B 点时, $CQ = CB - QB = 4$,

将 $t = \frac{4}{1}$ 代入得到, $MN = 2\sqrt{7}$,

(3) 当 $\odot P$ 与 $\odot Q$ 外切时, 如图 4 中, 作 $PH \perp BC$ 于 H. 易知此时 $\angle QBP = 60^\circ$,

$$BQ = 5 - t, PQ = t + 1, BP = t,$$

