

2021 学年第二学期教学质量调研测试卷 (2) 九年级数学

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列各数中, 无理数是 ()

- A. $\frac{6}{5}$ B. $0.\dot{3}$ C. $\sqrt{7}$ D. $\sqrt[3]{27}$.

【答案】C

【解析】

【分析】分别根据无理数、有理数的定义即可判定选择项.

【详解】 $\frac{6}{5}$ 、 $0.\dot{3}$ 、 $\sqrt[3]{27}=3$ 属于有理数;

$\sqrt{7}$ 属于无理数;

故选: C.

【点睛】此题主要考查了无理数的定义, 注意带根号的要开不尽方才是无理数, 无限不循环小数为无理数. 如 π , $\sqrt{7}$, $0.8080080008\ldots$ (每两个 8 之间依次多 1 个 0) 等形式.

2. 如果最简二次根式 $\sqrt{3x-5}$ 与 $\sqrt{x+3}$ 是同类二次根式, 那么 x 的值是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】D

【解析】

【分析】根据最简二次根式的定义: 二次根式化成最简二次根式后, 如果被开方数相同, 这几个二次根式叫做同类二次根式. 进行求解即可.

【详解】 $\because$ 最简二次根式 $\sqrt{3x-5}$ 与 $\sqrt{x+3}$ 是同类二次根式,

$$\therefore 3x-5=x+3,$$

$$\therefore x=4,$$

故选: D.

【点睛】本题考查同类二次根式, 熟练掌握同类二次根式的定义是解题的关键.

3. 将抛物线 $y=2x^2$ 向右平移 1 个单位, 再向上平移 2 个单位后, 所得新抛物线和原抛物线相比, 不变的是 ()

- A. 对称轴 B. 开口方向 C. 和 y 轴的交点 D. 顶点.

【答案】B

【解析】

【分析】求出平移后的抛物线，再比较对称轴，顶点，开口方向，与 y 轴交点，进而求解.

【详解】 $y = 2x^2$ 的对称轴为 y 轴，开口向上，与 y 轴交点 $(0, 0)$ ，顶点 $(0, 0)$

将抛物线 $y = 2x^2$ 向右平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位后解析式为： $y = 2(x-1)^2 + 2$

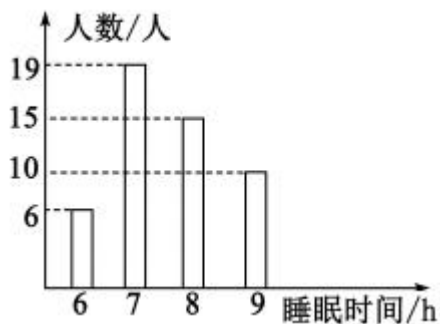
$\therefore$ 平移后对称轴为 $x = 1$ ，开口向上，与 y 轴交点 $(0, 4)$ ，顶点 $(1, 2)$

$\therefore$ 开口方向不变

故选：B

【点睛】本题考查二次函数图象与几何变换，解题关键是掌握二次函数的性质，掌握二次函数图象平移的规律.

4. 为了落实“作业、睡眠、手机、读物、体质”等五项管理要求，了解学生的睡眠状况，调查了一个班 50 名学生每天的睡眠时间，绘成睡眠时间频数分布直方图如图所示，则所调查学生睡眠时间的众数，中位数分别为（ ）



A. 7 h; 7 h

B. 8 h; 7.5 h

C. 7 h ; 7.5 h

D. 8 h; 8 h

【答案】C

【解析】

【分析】根据众数的定义及所给频数分布直方图可知，睡眠时间为 7 小时的人数最多，根据中位数的定义，把睡眠时间按从小到大排列，第 25 和 26 位学生的睡眠时间的平均数是中位数，从而可得结果.

【详解】由频数分布直方图知，睡眠时间为 7 小时的人数最多，从而众数为 7h;

把睡眠时间按从小到大排列，第 25 和 26 位学生的睡眠时间的平均数是中位数，

而第 25 位学生的睡眠时间为 7h，第 26 位学生的睡眠时间为 8h，其平均数为 7.5h，

故选：C.

【点睛】本题考查了频数分布直方图，众数和中位数，读懂频数分布直方图，掌握众数和中位数的定义是解决本题的关键.

5. 下列命题是真命题的是（ ）

A. 对角线相等的四边形是平行四边形

- B. 对角线互相平分且相等的四边形是矩形
C. 对角线互相垂直的四边形是菱形
D. 对角线互相垂直平分的四边形是正方形

【答案】B

【解析】

【分析】A、根据平行四边形的判定定理作出判断；B、根据矩形的判定定理作出判断；C、根据菱形的判定定理作出判断；D、根据正方形的判定定理作出判断.

【详解】解：A、对角线互相平分的四边形是平行四边形；故本选项错误，不符合题意；
B、对角线互相平分且相等的四边形是矩形；故本选项正确，符合题意；
C、对角线互相垂直的平行四边形是菱形；故本选项错误，不符合题意；
D、对角线互相垂直平分且相等的四边形是正方形；故本选项错误，不符合题意；
故选：B.

【点睛】本题综合考查了正方形、矩形、菱形及平行四边形的判定. 解答此题时，必须理清矩形、正方形、菱形与平行四边形间的关系.

6. $Rt\triangle ABC$ 中，已知 $\angle C = 90^\circ$, $BC = 3$, $AC = 4$ ，以点 A 、 B 、 C 为圆心的圆分别记作圆 A 、圆 B 、圆 C ，这三个圆的半径长都是 2，那么下列结论中，正确的是（ ）

- A. 圆 A 与圆 C 相交 B. 圆 B 与圆 C 外切 C. 圆 A 与圆 B 外切 D. 圆 A 与圆 B 外离.

【答案】D

【解析】

【分析】根据三角形的三边长确定两圆的圆心距，与两圆的半径的和比较后即可确定正确的选项.

【详解】 $\because \angle C = 90^\circ$, $BC = 3$, $AC = 4$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5,$$

$\therefore$ 三个圆的半径长都等于 2,

$\therefore$ 任意两圆的圆心距都是 4,

$\therefore$ 圆 A 与圆 C 外切，圆 B 与圆 C 相交，圆 A 与圆 B 外离，

故选：D.

【点睛】本题考查了圆与圆的位置关系，解题的关键是根据圆的两边的长求得第三边的长，然后根据两圆的半径之和和两圆的圆心距的大小关系确定两圆的位置关系，难度不大.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. 计算： $(-2mn^3)^2 =$ _____.

【答案】 $4m^2n^6$ ## $4n^6m^2$

【解析】

【分析】 利用积的乘方运算方法直接计算即可

【详解】 $(-2mn^3)^2 = (-2)^2 m^2 (n^3)^2 = 4m^2n^6$,

故答案为: $4m^2n^6$.

【点睛】 本题考查积的乘方运算, 牢记积的乘方公式是解题关键, 注意 $(abc)^m = a^m b^m c^m$.

8. 分解因式: $xy^3 - 9xy =$ _____.

【答案】 $xy(y+3)(y-3)$

【解析】

【分析】 原式提取公因式, 再利用平方差公式分解即可.

【详解】 解: $xy^3 - 9xy = xy(y^2 - 9) = xy(y+3)(y-3)$

故答案为 $xy(y+3)(y-3)$.

【点睛】 此题考查了提公因式法与公式法的综合运用, 熟练掌握因式分解的方法是解本题的关键.

9. 方程 $\sqrt{3x-1} = 2$ 的根是_____.

【答案】 $x = \frac{5}{3}$.

【解析】

【详解】 试题分析: $\because \sqrt{3x-1} = 2$, $\therefore 3x-1=4$, $\therefore x=\frac{5}{3}$, 经检验 $x=\frac{5}{3}$ 是原方程组的解, 故答案为 $x=\frac{5}{3}$.

考点: 无理方程.

10. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - nx - m + 3 = 0$ 有两个相等的实数根, 那么 m 的值为_____.

【答案】 2 或 -6 ## -6 或 2

【解析】

【分析】 根据一元二次方程有两个相等的实数根得到 $\Delta=0$, 求出 m 的值即可.

【详解】 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - nx - m + 3 = 0$ 有两个相等的实数根.

$$\therefore \Delta = m^2 - 4(-m+3) = 0.$$

解得 $m_1 = 2, m_2 = -6$.

故答案为: 2 或 -6.

【点睛】 此题主要考查了一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系: (1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数

根；(2) $\Delta=0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根；(3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根.

11. 函数 $y = \frac{x}{\sqrt{3x+1}}$ 中自变量 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x > -\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 根据二次根式的被开方数不小于零，分母不为零即可求解.

【详解】 由题意得： $3x+1 > 0$

解得： $x > -\frac{1}{3}$

故答案为： $x > -\frac{1}{3}$.

【点睛】 考查了函数自变量的取值范围，自变量的取值范围必须使含有自变量的表达式都有意义.

12. 当 $0 < k < 1$ 时，一次函数 $y = (k-1)x + k$ 的图像不经过第_____象限.

【答案】 三

【解析】

【分析】 根据 $k-1 < 0$ ， $k > 0$ 判断即可.

【详解】 $\because 0 < k < 1$,

$\therefore k-1 < 0$,

$\therefore$ 函数图像一定经过第二、第四象限；

$\because b=k > 0$,

$\therefore$ 图像与 y 轴交于正半轴，

$\therefore$ 函数图像一定经过第一象限；

$\therefore$ 函数图像一定不经过第三象限；

故答案为： 三.

【点睛】 本题考查了一次函数图像的分布，熟练掌握根据 k ， b 判断图像的分布是解题的关键.

13. 一个不透明的袋子里装有 3 个红球和 5 个黑球，它们除颜色外其余都相同. 从袋中任意摸出一个球是红球的概率为_____.

【答案】 $\frac{3}{8}$

【解析】

【分析】 用红球的个数除以球的总个数即可.

【详解】 解： 从袋中任意摸出一个球有 8 种等可能结果，其中摸出的小球是红球的有 3 种结果，

所以从袋中任意摸出一个球是红球的概率为 $\frac{3}{8}$,

故答案为: $\frac{3}{8}$.

【点睛】 本题主要考查概率公式, 解题的关键是掌握随机事件 A 的概率 $P(A) = \text{事件 } A \text{ 可能出现的结果数} \div \text{所有可能出现的结果数}$.

14. 《九章算术》是我国古代数学的经典著作, 书中有一个问题: “今有黄金九枚, 白银一十一枚, 称之重适等, 交易其一, 金轻十三两, 问金、银一枚各重几何?” 意思是: 甲袋中装有黄金 9 枚 (每枚黄金重量相同), 乙袋中装有白银 11 枚 (每枚白银重量相同), 称重两袋相同, 两袋互相交换 1 枚后, 甲袋比乙袋轻了 13 两 (袋子重量忽略不计), 问黄金、白银每枚各种多少两? 设黄金重 x 两, 每枚白银重 y 两, 根据题意可列方程组为_____.

【答案】
$$\begin{cases} 9x = 11y \\ (10y + x) - (8x + y) = 13 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 根据题意甲袋中装有黄金 9 枚 (每枚黄金重量相同), 乙袋中装有白银 11 枚 (每枚白银重量相同), 称重两袋相同. 故可得 $9x = 11y$, 再根据两袋互相交换 1 枚后, 甲袋比乙袋轻了 13 两, 可得 $(10y + x) - (8x + y) = 13$, 因此可得二元一次方程组.

【详解】 根据题意可得甲袋中的黄金 9 枚和乙袋中的白银 11 枚质量相等, 可得 $9x = 11y$, 再根据两袋互相交换 1 枚后, 甲袋比乙袋轻了 13 两. 故可得 $(10y + x) - (8x + y) = 13$.

因此
$$\begin{cases} 9x = 11y \\ (10y + x) - (8x + y) = 13 \end{cases}$$

所以答案为
$$\begin{cases} 9x = 11y \\ (10y + x) - (8x + y) = 13 \end{cases}$$

【点睛】 本题主要考查二元一次方程组的应用, 关键在于理解题意, 这是中考的必考题, 必须熟练掌握.

15. 一个多边形的内角和是外角和的 2 倍, 则这个多边形的边数为_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 利用多边形的外角和以及多边形的内角和定理即可解决问题.

【详解】 解: $\because$ 多边形的外角和是 360 度, 多边形的内角和是外角和的 2 倍,
 $\therefore$ 内角和是 720 度,
 $720 \div 180 + 2 = 6$,

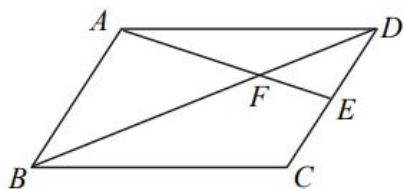
∴这个多边形是六边形.

故答案为: 6.

【点睛】 本题主要考查了多边形的内角和定理与外角和定理, 熟练掌握定理是解题的关键.

16. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 是边 CD 中点, 联结 AE 交对角线 BD 于 F , 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$,

那么 $\overrightarrow{BF}$ 可用 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示为_____.



【答案】 $\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$

【解析】

【分析】 由平行四边形的性质及已知可证明 $BF: FD = BA: ED = 2: 1$, 得 $BF = \frac{2}{3}BC$, 然后根据 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ 即可解决问题.

【详解】 解: ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB = CD, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{CD} = -\vec{a},$$

∵ 点 E 是边 CD 中点,

$$\therefore ED = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}BA,$$

$$\therefore \overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\vec{a},$$

∵ $DE \parallel AB$,

$$\therefore BF: FD = BA: ED = 2: 1,$$

$$\therefore BF = \frac{2}{3}BD$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{b} - \vec{a},$$

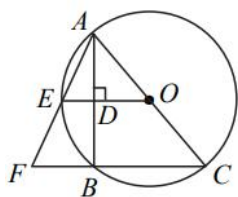
$$\therefore \overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a},$$

故答案为: $\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}$

【点睛】 本题考查平面向量的运算, 平行四边形的性质等知识, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中

考常考题型.

17. 如图, $\odot O$ 是 $Rt\triangle ABC$ 的外接圆, $OE \perp AB$ 交 $\odot O$ 于点 E , 垂足为点 D , AE, CB 的延长线交于点 F . 如果 $OD = 3, AB = 8$, 那么 FC 的长是_____.



【答案】 10

【解析】

【分析】 由 $OE \perp AB$, 得 $AD = BD$, 且 OD 是 $\triangle ABC$ 的中位线, OE 是三角形 AFC 的中位线, 根据勾股定理求出圆的半径即可.

【详解】 $\because OE \perp AB$,

$$\therefore AD = BD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4,$$

$$\because OA = OC,$$

$\therefore OD$ 为三角形 ABC 的中位线,

$$\therefore OD \parallel BC,$$

$$\text{又} \because OD = 3,$$

$$\therefore OA = \sqrt{AD^2 + OD^2} = 5$$

$$\therefore OE = OA = 5,$$

$\because OE \parallel CF$, 点 O 是 AC 中点,

$$\therefore AE : EF = AO : OC = 1,$$

即 E 为 AF 中点,

$\therefore OE$ 是三角形 ACF 的中位线,

$$\therefore CF = 2OE = 2 \times 5 = 10,$$

故答案为: 10.

【点睛】 本题主要考查垂径定理、勾股定理、三角形中位线等知识点, 熟练掌握勾股定理和三角形中位线的性质是解题的关键.

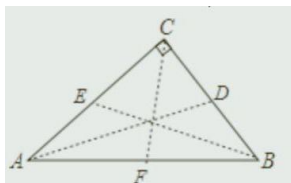
18. 如果三角形一条边上的中线恰好等于这条边的长, 那么我们称这个三角形为“匀称三角形”. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ, AC > BC$, 若 $Rt\triangle ABC$ 是“匀称三角形”, 那么 $BC : AC : AB =$ _____.

【答案】 $\sqrt{3} : 2 : \sqrt{7}$

【解析】

【分析】作 $Rt\triangle ABC$ 的三条中线 AD , BE , CF , 由题中定义得当 BE 为 $Rt\triangle ABC$ 的中线时, $Rt\triangle ABC$ 为“匀称三角形”, 设 $AC=2a$, 则 $CE=a$, $BE=2a$, 在 $Rt\triangle BCE$ 中, 根据勾股定理得 $BC=\sqrt{3}a$, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, 根据勾股定理得 $AB=\sqrt{7}a$, 即可得.

【详解】解: 如图所示, 作 $Rt\triangle ABC$ 的三条中线 AD , BE , CF ,



$$\because \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore CF = \frac{1}{2}AB \neq BA,$$

即 CF 不能为匀称三角形中线,

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AD > AC > BC$,

即 AD 不能成为“匀称三角形”的中线,

$\therefore$ 当 BE 为 $Rt\triangle ABC$ 的中线时, $Rt\triangle ABC$ 为“匀称三角形”,

设 $AC=2a$, 则 $CE=a$, $BE=2a$,

在 $Rt\triangle BCE$ 中, 根据勾股定理得,

$$BC = \sqrt{BE^2 - CE^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a,$$

在 $Rt\triangle ABC$ 中, 根据勾股定理得,

$$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{(\sqrt{3}a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{7}a$$

$$\therefore BC : AC : AB = \sqrt{3}a : 2a : \sqrt{7}a = \sqrt{3} : 2 : \sqrt{7},$$

故答案为: $\sqrt{3} : 2 : \sqrt{7}$.

【点睛】本题考查了新定义, 勾股定理, 解题的关键是理解新定义.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $2^{-1} + \sin 30^\circ - \frac{1}{\sqrt{3}+1} - (\sqrt{3}-1)^0$

【答案】 $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】对每一项分别进行化简，然后根据实数的运算法则求得计算结果.

【详解】原式 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2} - 1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

【点睛】本题主要考查了实数的综合运算能力，是各地中考题中常见的计算题型. 解决此类题目的关键是熟练掌握负整数指数幂、零指数幂、分母有理化、特殊角度的三角函数值等考点的运算.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x+2y=2 \textcircled{1} \\ x^2-5xy+4y^2=0 \textcircled{2} \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ y_1 = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = \frac{4}{3} \\ y_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

【解析】

【分析】将方程②因式分解，得到两个新的方程，原方程组转化为两个新的方程组，求解即可.

【详解】由②得: $(x-y)(x-4y)=0$,

$$x-y=0 \text{ 或 } x-4y=0,$$

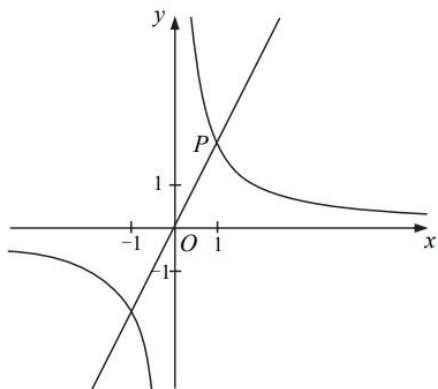
因此，原方程组可以化为两个二元一次方程组

$$\begin{cases} x+2y=2 \\ x-y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+2y=2 \\ x-4y=0 \end{cases}.$$

分别解这两个方程组，得原方程组的解是
$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ y_1 = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = \frac{4}{3} \\ y_2 = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

【点睛】本题考查二元一次方程组，因式分解；注意将②式因式分解转化为两个方程是本题关键.

21. 已知在平面直角坐标系 xOy 中，正比例函数与反比例函数的图象交于点 $P(1,2)$ ，直线 AB 垂直于 x 轴，垂足为点 C (点 C 在原点的右侧)，并分别与正比例函数和反比例函数的图象相交于点 A, B ，且 $AC+BC=5$.



(1) 求正比例函数和反比例函数的解析式:

(2) 求 $\triangle AOB$ 的面积.

【答案】 (1) $y = 2x$; $y = \frac{2}{x}$

(2) 3 或 $\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】 (1) 根据正比例函数与反比例函数的图象, 先设出函数的解析式, 利用待定系数法可求出 k_1, k_2 , 即可分别得到函数的表达式;

(2) 设点 $C(x, 0)$, 则 $A(x, 2x), B\left(x, \frac{2}{x}\right)$, 根据 $AC + BC = 5$, 可分情况求得 A, B, C 的坐标, 进而根据三角形面积公式求得面积.

【小问 1 详解】

解: 设正比例函数解析式为 $y = k_1x (k_1 \neq 0)$

反比例函数解析式为 $y = \frac{k_2}{x} (k_2 \neq 0)$

$\because$ 函数 $y = k_1x$ 和 $y = \frac{k_2}{x}$ 的图象经过点 $P(1, 2)$

将其分别代入两个函数, 解得

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 2$$

$\therefore$ 正比例函数的表达式为 $y = 2x$;

反比例函数的表达式为 $y = \frac{2}{x}$.

【小问 2 详解】

解: 设点 $C(x, 0)$, 则根据函数表达式 $A(x, 2x), B\left(x, \frac{2}{x}\right)$

$$\because AC + BC = 5$$

$$\therefore 2x + \frac{2}{x} = 5$$

$$\text{解得 } 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$x - \frac{5}{4} = \pm \frac{3}{4}$$

$$x = 2 \text{ 或 } x = \frac{1}{2}$$

如图 1, 当 $x = 2$ 时, $C(2, 0), A(2, 4), B(2, 1)$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OC = \frac{1}{2} \times (4 - 1) \times 2 = 3$$

如图 2, 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $C(\frac{1}{2}, 0), A(\frac{1}{2}, 1), B(\frac{1}{2}, 4)$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OC = \frac{1}{2} \times (4 - 1) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$\therefore \triangle AOB$ 的面积为: 3 或 $\frac{3}{4}$.

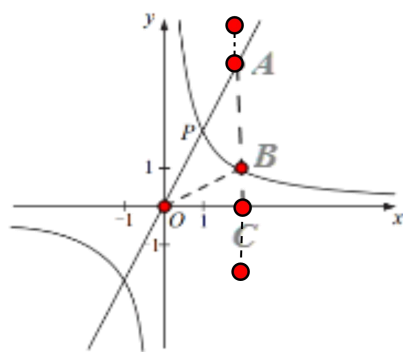


图 1

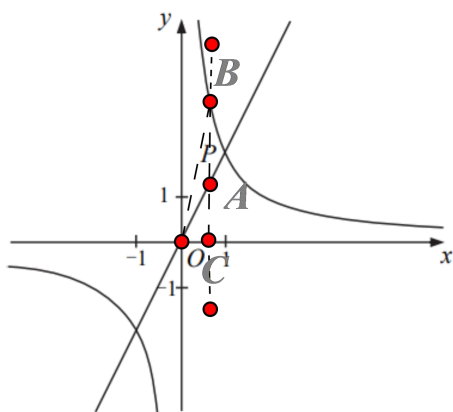


图 2

【点睛】本题考查函数的图象与性质，待定系数法求函数表达式，函数与图形面积问题，解分式方程等知识，熟练掌握函数的图象与性质是解题的关键.

22. 为解决群众“健身去哪儿”问题，某区 2021 年新建、改建 90 个市民益智健身苑点，如图 1 是某益智健身苑点中的“侧摆器”. 锻炼方法：面对器械，双手紧握扶手，双脚站立于踏板上，腰部发力带动下肢做左右摆式运动.



图1

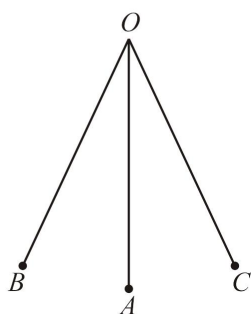


图2

(1) 如图 2 是侧摆器的抽象图，已知摆臂 OA 的长度为 80 厘米，在侧摆运动过程中，点 A 为踏板中心在侧摆运动过程中的最低点位置，点 B 为踏板中心在侧摆运动过程中的最高点位置， $\angle BOA = 25^\circ$ ，求踏板中心点在最高位置与最低位置时的高度差. (精确到 0.1 厘米)

($\sin 25^\circ \approx 0.423, \cos 25^\circ \approx 0.906, \tan 25^\circ \approx 0.466$)

(2) 小杰在侧摆器上进行锻炼，原计划消耗 400 大卡的能量，由于小杰加快了运动频率，每小时能量消耗比原计划增加了 100 大卡，结果比原计划提早 12 分钟完成任务，求小杰原计划完成锻炼需多少小时?

【答案】(1) 踏板中心点在最高位置与最低位置时的高度差是 7.5 厘米

(2) 小杰原计划锻炼 1 小时完成

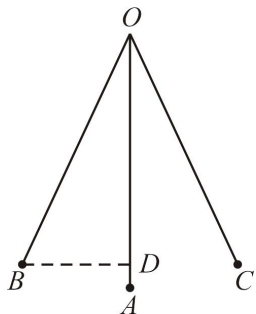
【解析】

【分析】(1) 过点 B 作 $BD \perp OA$ 垂足为 D ，通过三角函数计算即可；

(2) 设小杰原计划 x 小时完成锻炼，根据“原计划消耗 400 大卡的能量，由于小杰加快了运动频率，每小时能量消耗比原计划增加了 100 大卡，结果比原计划提早 12 分钟完成任务”列分式方程，解方程即可.

【小问 1 详解】

过点 B 作 $BD \perp OA$ 垂足为 D ,



在 $Rt\triangle BOD$ 中, $OD = BO \cdot \cos \angle BOA \approx 80 \times 0.906 = 72.48$

$$AD = OA - OD = 80 - 72.48 \approx 7.5 \text{ (cm)}$$

答: 踏板中心点在最高位置与最低位置时的高度差是 7.5 厘米.

【小问 2 详解】

设小杰原计划 x 小时完成锻炼.

由题意得:
$$\frac{400}{x - \frac{1}{5}} - \frac{400}{x} = 100;$$

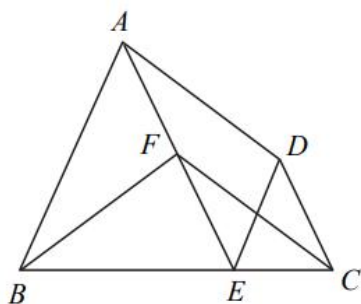
解方程的:
$$x_1 = 1, x_2 = -\frac{4}{5},$$

经检验, $x_1 = 1, x_2 = -\frac{4}{5}$ 都是原方程的根, 但 $x = -\frac{4}{5}$ 不合题意舍去.

答: 小杰原计划锻炼 1 小时完成.

【点睛】 本题考查三角函数的实际应用、分式方程的实际应用, 根据题意找准等量关系是解题的关键.

23. 已知: 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = \angle BCD$, 点 E 在边 BC 上, 且 $AE \parallel CD$ $DE \parallel AB$, 作 $CF \parallel AD$ 交线段 AE 于点 F , 连接 BF .



(1) 求证: $\triangle ABF \cong \triangle EAD$:

(2) 如果 $BE^2 = AB \cdot EF$, 求证: $\angle ECF = \angle BAE$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 先通过两组平行线等角对等边, 证明 $AB = AE, DE = DC$; 再通过两组对边平行证明四边形 $AFCD$ 是平行四边形, 最后通过平行四边形的性质挖掘条件, 即可证明全等

(2) 利用平行四边形对边平行, 得到 $\angle FBE = \angle ECF$, 再将题目条件 $BE^2 = AB \cdot EF$ 转化为 $\frac{BE}{AE} = \frac{EF}{BE}$, 利用边角边证明 $\triangle EBF \sim \triangle EAB$, 最后利用相似对应角相等, 即可得到结论

【小问 1 详解】

$$\because AE \parallel CD, \therefore \angle AEB = \angle DCE$$

$$\because DE \parallel AB$$

$$\therefore \angle ABE = \angle DEC, \angle BAF = \angle AED$$

$$\because \angle ABC = \angle BCD$$

$$\therefore \angle ABE = \angle AEB, \angle DCE = \angle DEC$$

$$\therefore AB = AE, DE = DC$$

$$\because AF \parallel CD, AD \parallel CF$$

$$\therefore \text{四边形 } AFCD \text{ 是平行四边形}$$

$$\therefore AF = CD$$

$$\therefore AF = DE$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle EAD$$

【小问 2 详解】

$$\because \triangle ABF \cong \triangle EAD$$

$$\therefore BF = AD$$

在 $\square AFCD$ 中, $AD = CF$

$$\therefore BF = CF$$

$$\therefore \angle FBE = \angle ECF$$

$$\therefore BE^2 = AB \cdot EF, AB = AE, \frac{BE}{AE} = \frac{EF}{BE}$$

$$\text{在 } \triangle EBF \text{ 与 } \triangle EAB \text{ 中 } \begin{cases} \frac{BE}{AE} = \frac{EF}{BE} \\ \angle BEF = \angle AEB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EBF \sim \triangle EAB$$

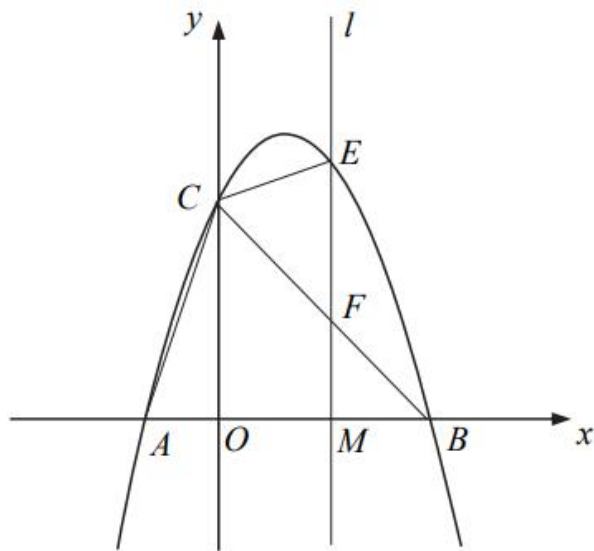
$$\therefore \angle FBE = \angle BAE$$

$$\therefore \angle FBE = \angle ECF$$

$$\therefore \angle ECF = \angle BAE$$

【点睛】本题考查平行四边形的判定和性质，三角形全等，相似；注意第一小问平行四边形的判定和性质是重点，第二小问相似三角形的判定和性质是重点

24. 如图. 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = ax^2 + 2x + c (a \neq 0)$ 与 x 轴交于点 A 、 B , 与 y 轴交于点 C , 点 A 的坐标为 $(-1, 0)$, 对称轴为直线 $x = 1$. 点 M 为线段 OB 上的一个动点, 过点 M 作直线 l 平行于 y 轴交直线 BC 于点 F , 交抛物线 $y = ax^2 + 2x + c (a \neq 0)$ 于点 E .



(1) 求抛物线的解析式;

(2) 当以 C 、 E 、 F 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似时, 求线段 EF 的长度;

(3) 如果将 $\triangle ECF$ 沿直线 CE 翻折, 点 F 恰好落在 y 轴上点 N 处, 求点 N 的坐标.

【答案】(1) $y = -x^2 + 2x + 3$

$$(2) EF = \frac{9}{4}$$

$$(3) N \text{ 的坐标是 } (0, 3\sqrt{2} + 1)$$

【解析】

【分析】(1) 根据抛物线过点 $A(-1, 0)$ ，对称轴为直线 $x = 1$ 列方程计算即可；

(2) 求出 B 、 C 坐标及直线 BC 解析式，由 $OB = OC$ 可得 $\angle MBF = \angle FBM = \angle CFE = 45^\circ$ ，再设 E 、 F 的坐标，根据相似计算即可；

(3) 由翻折结合 $EF \parallel y$ 轴可得 $CF = EF$ ，设 E 、 F 坐标计算即可。

【小问 1 详解】

$$\text{由题意得: } \begin{cases} 0 = a - 2 + c \\ -\frac{2}{2a} = 1 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -1 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\therefore \text{所求的抛物线的解析式是: } y = -x^2 + 2x + 3$$

【小问 2 详解】

$$\text{由题意得: } B(3, 0), C(0, 3),$$

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 的解析式为: } y = -x + 3$$

$$\therefore OB = OC,$$

$$\therefore \angle MBF = \angle FBM = \angle CFE = 45^\circ$$

$$\text{设 } F(m, -m + 3), \text{ 则 } E(m, -m^2 + 2m + 3)$$

$$EF = -m^2 + 2m + 3 - (-m + 3) = -m^2 + 3m, CF = \sqrt{(0 - m)^2 + (3 + m - 3)^2} = \sqrt{2}m$$

当以 C 、 E 、 F 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似时，

$$\textcircled{1} \text{ 若 } \frac{EF}{AB} = \frac{CF}{CB}, \text{ 则 } \frac{-m^2 + 3m}{4} = \frac{\sqrt{2}m}{3\sqrt{2}},$$

$$\therefore m = \frac{5}{3} \text{ 或 } m = 0 \quad (\text{舍去})$$

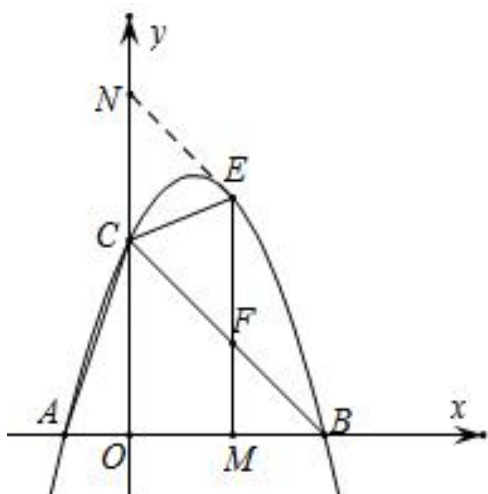
$$\therefore EF = -m^2 + 3m = \frac{20}{9}$$

②若 $\frac{CF}{AB} = \frac{EF}{CB}$, 则 $\frac{\sqrt{2}m}{4} = \frac{-m^2+3m}{3\sqrt{2}}$,

$\therefore m = \frac{3}{2}$ 或 $m = 0$ (舍去)

$\therefore EF = -m^2 + 3m = \frac{9}{4}$

【小问3 详解】



$\because \triangle CEN$ 是由 $\triangle CEF$ 沿直线 CE 翻折而得

$\therefore CN = CF, \angle NCE = \angle ECF$,

$\therefore NC \parallel EF$,

$\therefore \angle NCE = \angle CEF$,

$\therefore \angle ECF = \angle CEF$,

$\therefore CF = EF$

设 $F(n, -n+3)$, 则 $E(n, -n^2+2n+3)$

$EF = -n^2 + 2n + 3 - (-n + 3) = -n^2 + 3n, CF = \sqrt{(0-n)^2 + (3+n-3)^2} = \sqrt{2}n$

$\therefore -n^2 + 3n = \sqrt{2}n$,

解得: $n = 3 - \sqrt{2}$ 或 $n = 0$ (舍去)

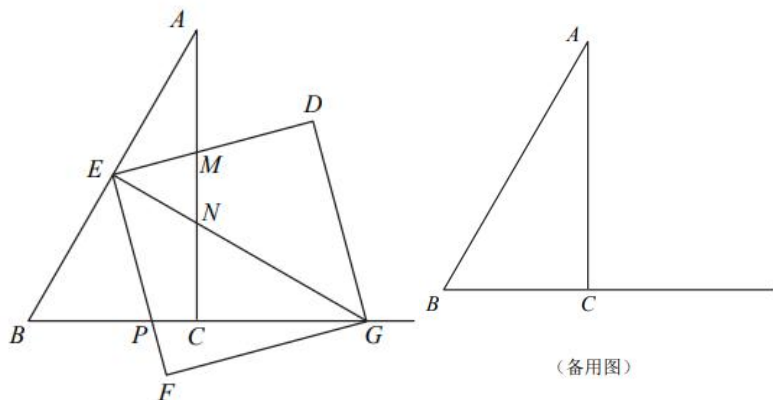
$\therefore CF = \sqrt{2}n = 3\sqrt{2} - 2$

$\therefore ON = OC + CN = OC + CF = 3\sqrt{2} + 1$

$\therefore N$ 的坐标是 $(0, 3\sqrt{2} + 1)$

【点睛】 本题考查二次函数的综合应用，涉及解析式、三角形相似的判定与性质、对称变换等知识，解题的关键是用含字母的代数式表示相关的线段长度，根据已知列方程求解.

25. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ, \angle CAB = 30^\circ, AB = 10$. 点 E 是线段 AB 上一动点，点 G 在 BC 的延长线上，且 $CG = AE$ ，连接 EG ，以线段 EG 为对角线作正方形 $EDGF$ ，边 ED 交 AC 边于点 M ，线段 EG 交 AC 边于点 N ，边 EF 交 BC 边于点 P .



- (1) 求证: $NG = 2EN$;
- (2) 设 $AE = x$, $\triangle AEN$ 的面积为 y , 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出 x 的定义域;
- (3) 连接 NP , 当 $\triangle EPN$ 是直角三角形时, 求 AE 的值.

【答案】 (1) 见解析 (2) $y = \frac{5}{12}\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{12}x^2$; 定义域为 $0 \leq x \leq 10$

(3) AE 的值为 $40 - 20\sqrt{3}$, $\frac{125 - 25\sqrt{3}}{11}$

【解析】

【分析】 (1) 过点 E 作 $EH \parallel BC$ 交 AC 于 H , 可得 $\triangle EHN \sim \triangle GCN$, 根据直角三角形的性质可得 $EH = \frac{1}{2}AE$, 从而得到 $EH = \frac{1}{2}CG$, 即可求证;

(2) 根据直角三角形的性质可得 $AC = 5\sqrt{3}$, $EH = \frac{1}{2}x$, $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}x$. 从而得到 $CH = 5\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x$, 再由 $\triangle EHN \sim \triangle GCN$, 可得 $CN = 2HN$, 从而得到 $HN = \frac{5\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}x$, 进而得到

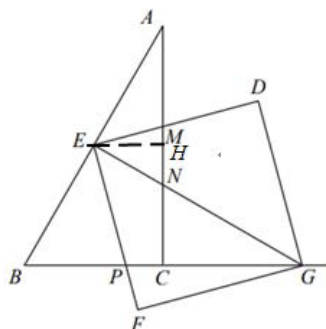
$AN = AH + HN = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \left(\frac{5\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}x\right) = \frac{5}{3}\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 即可求解;

(3) 分两种情况讨论: 当 $\angle PNE = 90^\circ$ 时, 当 $\angle EPN = 90^\circ$ 时, 过 E 点作 $EQ \perp BC$ 交 BC 边于 Q 点, 即

可求解.

【小问 1 详解】

证明：过点 E 作 $EH \parallel BC$ 交 AC 于 H ，



$$\therefore \angle ACB = \angle AHE, \quad \triangle EHN \sim \triangle GCN,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \angle CAB = 30^\circ,$$

$$\therefore EH = \frac{1}{2} AE,$$

$$\because CG = AE,$$

$$\therefore EH = \frac{1}{2} CG,$$

$$\because EH \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{EN}{NG} = \frac{EH}{CG},$$

$$\therefore NG = 2EN$$

【小问 2 详解】

$$\text{解：} \because \angle C = 90^\circ, \angle CAB = 30^\circ, AB = 10$$

$$\therefore BC = \frac{1}{2} AB = 5.$$

$$\therefore AC = 5\sqrt{3},$$

$$\because AE = x,$$

$$\therefore EH = \frac{1}{2}x, AH = \frac{\sqrt{3}}{2}x. \quad CG = x,$$

$$\therefore CH = 5\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

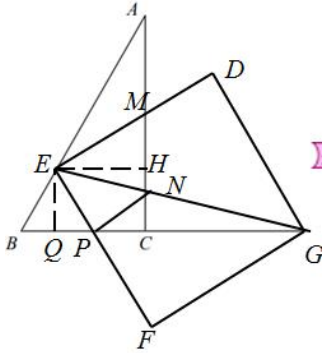
$$\text{由 (1) 得：} \triangle EHN \sim \triangle GCN,$$

由 (2) 得: $CN=2HN$,

$$\therefore EH = CN = 2HN,$$

$$\therefore \frac{1}{2}x = 2\left(\frac{5\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}x\right), \text{ 解得: } x = 40 - 20\sqrt{3},$$

当 $\angle EPN = 90^\circ$ 时, 过 E 点作 $EQ \perp BC$ 交 BC 边于 Q 点,



$$\therefore \angle EPQ + \angle CPN = 90^\circ,$$

$$\therefore AC \perp BC,$$

$$\therefore \angle CPN + \angle CNP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CNP = \angle EPQ,$$

$\therefore$ 四边形 $DEFG$ 是正方形,

$$\therefore \angle PEN = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle PNE = \angle PEN = 45^\circ,$$

$$\therefore EP=PN,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle EQP = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle EQP \cong \triangle PCN,$$

$$\therefore EQ=CP, \quad PQ=CN,$$

$$\because EH \perp AC, \quad BC \perp AC,$$

$$\therefore CH = EQ = AC - AH = 5\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\therefore EQ = CP = 5\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\therefore PQ = CN = HN = 2 \left(\frac{5\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}x \right),$$

$$\because EQ \perp BC,$$

$$\therefore EQ \parallel AC,$$

$$\therefore \angle BEQ = 30^\circ,$$

$$\therefore BQ = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}(10-x) = 5 - \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore 5\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{2}{3}\left(5\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + 5 - \frac{1}{2}x = 5,$$

$$\text{解得: } x = \frac{125 - 25\sqrt{3}}{11}.$$

$$\text{综上所述, } AE \text{ 的值 } 40 - 20\sqrt{3} \text{ 或 } \frac{125 - 25\sqrt{3}}{11}.$$

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定和性质，直角三角形的性质，正方形的性质，求函数解析式等知识，熟练掌握相似三角形的判定和性质，直角三角形的性质，正方形的性质是解题的关键.

免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>)
致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群
出品的《老师请开讲》私享直播课等
增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>)
是学科网旗下智能题库，拥有小初高全
学科超千万精品试题，提供智能组卷、
拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能