

2020-2021 学年上海市虹口区九年级（上）期末数学试卷（一模）

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.

1. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 如果 $BC = 3$, $AC = 4$, 那么 $\tan A$ 的值是 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

2. (4 分) 如果向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是单位向量, 那么下列等式中, 成立的是 ()

- A. $\vec{a} = \vec{b}$ B. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ C. $\vec{a} + \vec{b} = 2$ D. $\vec{a} - \vec{b} = 0$

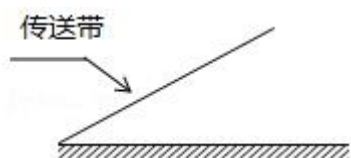
3. (4 分) 下列函数中, 属于二次函数的是 ()

- A. $y = \frac{1}{x^2 - 2}$ B. $y = \sqrt{x^2 - 2}$
C. $y = x^2 - 2$ D. $y = (x - 2)^2 - x^2$

4. (4 分) 将抛物线 $y = x^2 - 3$ 向右平移 2 个单位后得到的新抛物线表达式是 ()

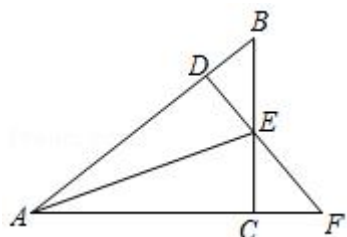
- A. $y = x^2 - 1$ B. $y = x^2 - 5$ C. $y = (x + 2)^2 - 3$ D. $y = (x - 2)^2 - 3$

5. (4 分) 如图, 传送带和地面所成斜坡的坡度 $i = 1 : 2.4$, 如果它把某物体从地面送到离地面 10 米高的地方, 那么该物体所经过的路程是 ()



- A. 10 米 B. 24 米 C. 25 米 D. 26 米

6. (4 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, D 是边 AB 上一点, 过 D 作 $DF \perp AB$ 交边 BC 于点 E , 交 AC 的延长线于点 F , 联结 AE , 如果 $\tan \angle EAC = \frac{1}{3}$, $S_{\triangle CEF} = 1$, 那么 $S_{\triangle ABC}$ 的值是 ()



- A. 3 B. 6 C. 9 D. 12

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）请将结果直接填入答题纸的相应位置.

7. (4分) 如果 $a:b=3:2$, 那么 $\frac{a}{a+b} =$ _____.

8. (4分) 计算: $3\vec{a} - \frac{1}{2}(2\vec{a} - 4\vec{b}) =$ _____.

9. (4分) 如果抛物线 $y=x^2-a$ 经过点 $(2, 0)$, 那么 a 的值是_____.

10. (4分) 如果抛物线 $y=(k+1)x^2$ 有最高点, 那么 k 的取值范围是_____.

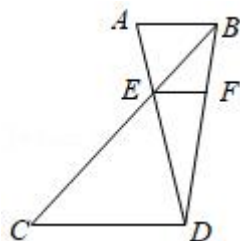
11. (4分) 如果抛物线 l 经过点 $A(-2, 0)$ 和 $B(5, 0)$, 那么该抛物线的对称轴是直线_____.

12. (4分) 沿着 x 轴正方向看, 抛物线 $y=x^2-2$ 在 y 轴左侧的部分是_____的(填“上升”或“下降”).

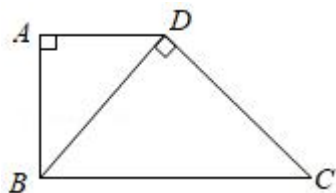
13. (4分) 点 P 是线段 AB 上的一点, 如果 $AP^2 = BP \cdot AB$, 那么 $\frac{AP}{AB}$ 的值是_____.

14. (4分) 已知 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, 顶点 A, B, C 分别与顶点 A', B', C' 对应, $AD, A'D'$ 分别是 $BC, B'C'$ 边上的中线, 如果 $BC=3, AD=2.4, B'C'=2$, 那么 $A'D'$ 的长是_____.

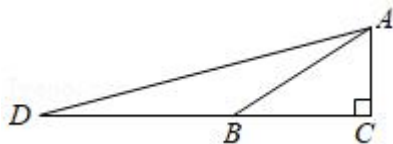
15. (4分) 如图, $AB \parallel CD$, AD, BC 相交于点 E 过 E 作 $EF \parallel CD$ 交 BD 于点 F , 如果 $AB=3, CD=6$, 那么 EF 的长是_____.



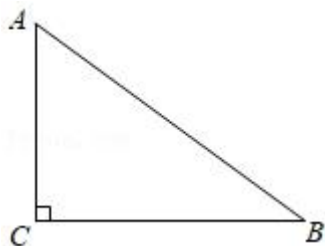
16. (4分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle A = 90^\circ$, $\angle BDC = 90^\circ$, $AD=4, BC=9$, 那么 $BD =$ _____.



17. (4分) 如图, 图中提供了一种求 $\cot 15^\circ$ 的方法. 作 $\text{Rt}\triangle ABC$, 使 $\angle C = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, 再延长 CB 到点 D , 使 $BD = BA$, 联结 AD , 即可得 $\angle D = 15^\circ$. 如果设 $AC = t$, 则可得 $CD = (2 + \sqrt{3})t$, 那么 $\cot 15^\circ = \cot D = \frac{CD}{AC} = 2 + \sqrt{3}$. 运用以上方法, 可求得 $\cot 22.5^\circ$ 的值是_____.



18. (4分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 8$. D 是 BC 的中点, 点 E 在边 AB 上, 将 $\triangle BDE$ 沿直线 DE 翻折, 使得点 B 落在同一平面内的点 B' 处, 线段 $B'D$ 交边 AB 于点 F , 联结 AB' . 当 $\triangle AB'F$ 是直角三角形时, BE 的长为_____.



三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

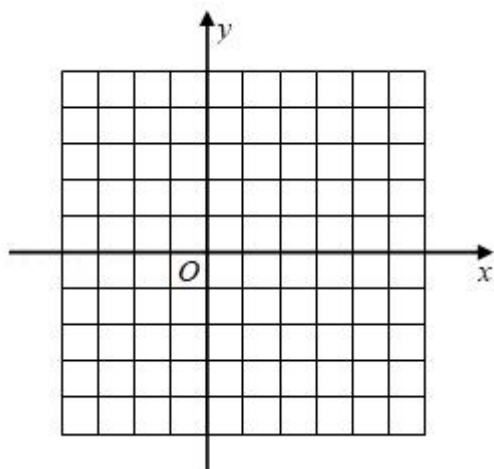
19. (10分) 计算: $\frac{\tan^2 45^\circ}{\cot 30^\circ - 2\cos 45^\circ} - 2\sin 60^\circ$.

20. (10分) 已知二次函数的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$.

(1) 用配方法把该二次函数的解析式化为 $y = a(x+m)^2 + k$ 的形式;

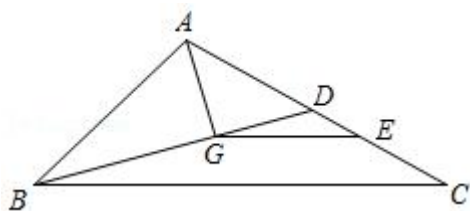
(2) 选取适当的数据填入下表, 并在如图所示的平面直角坐标系 xOy 内描点, 画出该函数的图象.

x	...	_____	_____	_____	_____	_____	...
y	...	_____	_____	_____	_____	_____	...



21. (10分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 联结 AG , 联结 BG 并延长交边 AC 于点 D , 过点 G 作 $GE \parallel BC$ 交边 AC 于点 E .

- (1) 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{BG}$;
- (2) 当 $AG \perp BD$, $BG = 6$, $\angle GAD = 45^\circ$ 时, 求 AE 的长.



22. (10 分) 图 1 是一款家用落地式取暖器. 如图 2 是其放置在地面上时的侧面示意图, 其中矩形 $ABCD$ 是取暖器的主体, 等腰梯形 $BEFC$ 是底座, $BE = CF$, 烘干架连杆 GH 可绕边 CD 上一点 H 旋转, 以调节角度. 已知 $CD = 50\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$, $EF = 20\text{cm}$, $DH = 12\text{cm}$, $GH = 15\text{cm}$, $\angle CFE = 30^\circ$. 当 $\angle GHD = 53^\circ$ 时, 求点 G 到地面的距离. (精确到 0.1cm)
- (参考数据: $\sin 53^\circ \approx 0.80$, $\cos 53^\circ \approx 0.60$, $\tan 53^\circ \approx 1.33$, $\sqrt{3} \approx 1.73$)



图1

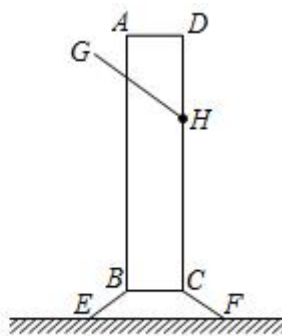
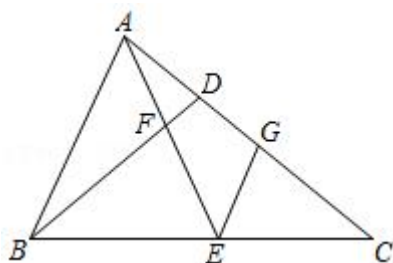


图2

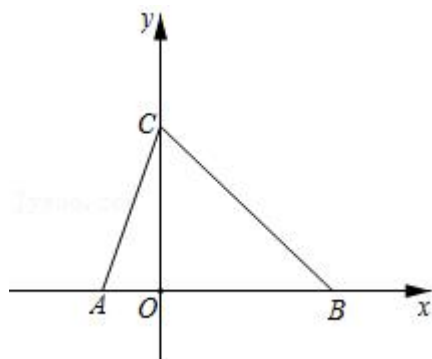
23. (12 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 G 在边 AC 上, 点 E 在边 BC 上, $DB = DC$, $EG \parallel AB$, AE 、 BD 交于点 F , $BF = AG$.
- (1) 求证: $\triangle BFE \sim \triangle CGE$;
- (2) 当 $\angle AEG = \angle C$ 时, 求证: $AB^2 = AG \cdot AC$.



24. (12 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 A 、 B 两点.
- (1) 当该抛物线经过点 C 时, 求该抛物线的表达式;

(2) 在(1)题的条件下, 点 P 为该抛物线上一点, 且位于第三象限, 当 $\angle PBC = \angle ACB$ 时, 求点 P 的坐标;

(3) 如果抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点 D 位于 $\triangle BOC$ 内, 求 a 的取值范围.

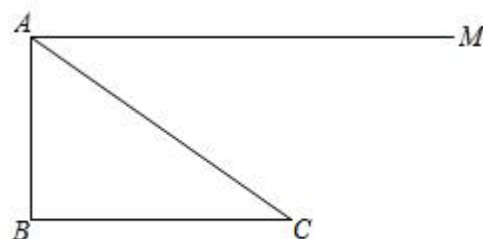
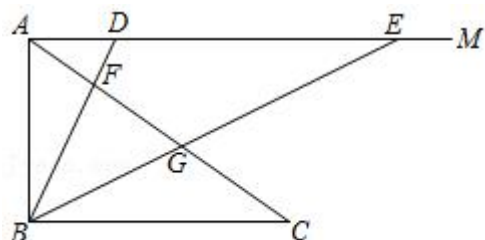


25. (14分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 3$, $BC = 4$, 过点 A 作射线 $AM \parallel BC$, 点 D 、 E 是射线 AM 上的两点 (点 D 不与点 A 重合, 点 E 在点 D 右侧), 联结 BD 、 BE 分别交边 AC 于点 F 、 G , $\angle DBE = \angle C$.

(1) 当 $AD = 1$ 时, 求 FB 的长;

(2) 设 $AD = x$, $FG = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出 x 的取值范围;

(3) 联结 DG 并延长交边 BC 于点 H , 如果 $\triangle DBH$ 是等腰三角形, 请直接写出 AD 的长.



备用图

2020-2021 学年上海市虹口区九年级（上）期末数学试卷（一模）

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.

1. (4 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 如果 $BC = 3$, $AC = 4$, 那么 $\tan A$ 的值是 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【分析】根据锐角三角函数的定义可得答案.

【解答】解: 在 $\triangle ABC$ 中, $\because \angle C = 90^\circ$, $BC = 3$, $AC = 4$,

$$\therefore \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4},$$

故选: A.

【点评】本题主要考查锐角三角函数的定义, 理解锐角三角函数的定义是解决问题的前提.

2. (4 分) 如果向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是单位向量, 那么下列等式中, 成立的是 ()

- A. $\vec{a} = \vec{b}$ B. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ C. $\vec{a} + \vec{b} = 2$ D. $\vec{a} - \vec{b} = 0$

【分析】根据平面向量的性质进行一一判断.

【解答】解: A、向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同时, 该等式才成立, 故本选项不符合题意.

B、由题意知, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 故本选项符合题意.

C、当向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反时, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$, 故本选项不符合题意.

D、当向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同时, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$, 故本选项不符合题意.

故选: B.

【点评】本题主要考查了平面向量, 注意: 平面向量既有大小, 又有方向.

3. (4 分) 下列函数中, 属于二次函数的是 ()

- A. $y = \frac{1}{x^2 - 2}$ B. $y = \sqrt{x^2 - 2}$
C. $y = x^2 - 2$ D. $y = (x - 2)^2 - x^2$

【分析】利用二次函数定义进行分析即可.

【解答】解：A、含有分式，不是二次函数，故此选项不合题意；

B、含有二次根式，不是二次函数，故此选项不合题意；

C、是二次函数，故此选项符合题意；

D、 $y = (x - 2)^2 - x^2 = -4x + 4$ ，不是二次函数，故此选项不合题意；

故选：C.

【点评】此题主要考查了二次函数，关键是掌握判断函数是否是二次函数，首先是要看它的右边是否为整式，若是整式且仍能化简的要先将其化简，然后再根据二次函数的定义作出判断，要抓住二次项系数不为0这个关键条件.

4. (4分) 将抛物线 $y = x^2 - 3$ 向右平移2个单位后得到的新抛物线表达式是 ()

A. $y = x^2 - 1$ B. $y = x^2 - 5$ C. $y = (x + 2)^2 - 3$ D. $y = (x - 2)^2 - 3$

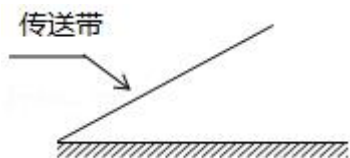
【分析】根据平移的规律即可求得答案.

【解答】解：将抛物线 $y = x^2 - 3$ 向右平移2个单位后得到的新抛物线表达式是 $y = (x - 2)^2 - 3$

故选：D.

【点评】本题主要考查二次函数的图象与几何变换，掌握平移的规律是解题的关键，即“左加右减，上加下减”.

5. (4分) 如图，传送带和地面所成斜坡的坡度 $i = 1 : 2.4$ ，如果它把某物体从地面送到离地面10米高的地方，那么该物体所经过的路程是 ()



A. 10 米 B. 24 米 C. 25 米 D. 26 米

【分析】根据坡度的概念求出 BC ，根据勾股定理计算，得到答案.

【解答】解：作 $AB \perp CB$ 于 B ,

由题意得， $AB = 10$ 米，

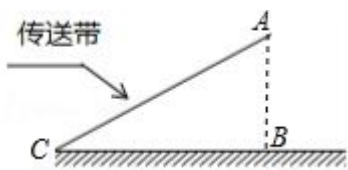
$\because$ 斜坡的坡度 $i = 1 : 2.4$,

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2.4}, \text{ 即 } \frac{10}{BC} = \frac{1}{2.4},$$

解得， $BC = 24$,

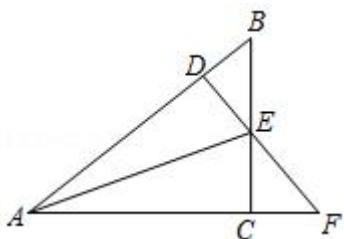
$$\text{由勾股定理得, } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26 \text{ (米)},$$

故选：D.



【点评】 本题考查的是解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题，掌握坡度是坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比是解题的关键.

6. (4分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， D 是边 AB 上一点，过 D 作 $DF \perp AB$ 交边 BC 于点 E ，交 AC 的延长线于点 F ，联结 AE ，如果 $\tan \angle EAC = \frac{1}{3}$ ， $S_{\triangle CEF} = 1$ ，那么 $S_{\triangle ABC}$ 的值是 ()



- A. 3 B. 6 C. 9 D. 12

【分析】 根据 $\tan \angle EAC = \frac{1}{3}$ ，可得 $\frac{EC}{AC} = \frac{1}{3}$ ，由 $\triangle EFC \sim \triangle ABC$ ，可得相似比为 $\frac{1}{3}$ ，从而得到面积比为 $\frac{1}{9}$ ，进而求出答案.

【解答】 解： $\because \angle ACB = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle BAC + \angle B = 90^\circ$ ，
 又 $\because DF \perp AB$ ，
 $\therefore \angle ADF = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle BAC + \angle F = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle B = \angle F$ ，
 又 $\because \angle ECF = \angle ACB = 90^\circ$ ，
 $\therefore \triangle ECF \sim \triangle ACB$ ，
 $\therefore \frac{EC}{AC} = \frac{CF}{BC} = \tan \angle EAC = \frac{1}{3}$ ，
 $\therefore \frac{S_{\triangle ECF}}{S_{\triangle ACB}} = \frac{1}{9}$ ，
 又 $\because S_{\triangle ECF} = 1$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 9,$$

故选：C.

【点评】 本题考查锐角三角函数的意义，相似三角形的性质和判断，掌握相似三角形的性质是解决问题的关键.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）请将结果直接填入答题纸的相应位置.

7. (4 分) 如果 $a:b=3:2$ ，那么 $\frac{a}{a+b} = -\frac{3}{5}$.

【分析】 根据已知条件得出 $b = \frac{2}{3}a$ ，再代入要求的式子进行计算即可得出答案.

【解答】 解： $\because a:b=3:2$,

$$\therefore 2a = 3b,$$

$$\therefore b = \frac{2}{3}a,$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{a}{a+\frac{2}{3}a} = \frac{3}{5};$$

故答案为： $\frac{3}{5}$.

【点评】 本题考查了比例线段：熟练掌握比例的性质是解决此题的关键.

8. (4 分) 计算： $3\vec{a} - \frac{1}{2}(2\vec{a} - 4\vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$.

【分析】 先利用乘法结合律取括号，然后合并同类项.

【解答】 解：原式 $= 3\vec{a} - \vec{a} + 2\vec{b} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$.

故答案是： $2\vec{a} + 2\vec{b}$.

【点评】 本题主要考查了平面向量，实数的运算法则同样应用于平面向量的计算.

9. (4 分) 如果抛物线 $y = x^2 - a$ 经过点 $(2, 0)$ ，那么 a 的值是 4.

【分析】 把已知点的坐标代入抛物线解析式可求出 a 的值.

【解答】 解：把 $(2, 0)$ 代入 $y = x^2 - a$ 得 $4 - a = 0$ ，解得 $a = 4$.

故答案为 4.

【点评】 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征：二次函数图象上点的坐标满足其解析式.

10. (4 分) 如果抛物线 $y = (k+1)x^2$ 有最高点，那么 k 的取值范围是 $k < -1$.

【分析】根据二次函数的性质可知，当抛物线有最高点时，开口向下，二次项系数 $k+1 < 0$.

【解答】解：∵ 抛物线 $y = (k+1)x^2$ 有最高点，

∴ $k+1 < 0$ ，即 $k < -1$.

故答案为： $k < -1$.

【点评】本题主要考查了二次函数的性质. 用到的知识点：对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 来说，当 $a > 0$ 时，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 开口向上，抛物线有最低点；当 $a < 0$ 时，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 开口向下，抛物线有最高点.

11. (4分) 如果抛物线 l 经过点 $A(-2, 0)$ 和 $B(5, 0)$ ，那么该抛物线的对称轴是直线 $x = \frac{3}{2}$.

【分析】据点 A, B 的坐标，利用二次函数的性质可求出抛物线的对称轴，此题得解.

【解答】解：∵ 抛物线经过点 $A(-2, 0)$ 和点 $B(5, 0)$ ，

∴ 抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}$.

故答案为： $x = \frac{3}{2}$.

【点评】本题考查了二次函数的性质，根据抛物线的对称性，找出抛物线的对称轴是解题的关键.

12. (4分) 沿着 x 轴正方向看，抛物线 $y = x^2 - 2$ 在 y 轴左侧的部分是下降的 (填“上升”或“下降”).

【分析】根据二次函数的性质解答即可.

【解答】解：∵ 抛物线 $y = x^2 - 2$ 的开口向上，对称轴为 y 轴，

∴ 在对称轴左侧 y 随 x 的增大而减小，

∴ 抛物线 $y = x^2 - 2$ 在 y 轴左侧的部分是下降的，

故答案为：下降.

【点评】本题考查二次函数的图象及性质；熟练掌握二次函数的图象及性质是解题的关键.

13. (4分) 点 P 是线段 AB 上的一点，如果 $AP^2 = BP \cdot AB$ ，那么 $\frac{AP}{AB}$ 的值是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

【分析】由题意得点 P 是线段 AB 的黄金分割点，则 $AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$ ，即可得出答案.

【解答】解：∵ 点 P 是线段 AB 上的一点， $AP^2 = BP \cdot AB$ ，

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AB}{AP},$$

$\therefore$ 点 P 是线段 AB 的黄金分割点,

$$\therefore AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB,$$

$$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

故答案为: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

【点评】 本题考查了黄金分割: 把线段 AB 分成两条线段 AC 和 BC ($AC > BC$), 且使 AC 是 AB 和 BC 的比例中项 (即 $AB:AC = AC:BC$), 叫做把线段 AB 黄金分割, 点 C 叫做线段 AB 的黄金分割点.

14. (4 分) 已知 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, 顶点 A 、 B 、 C 分别与顶点 A' 、 B' 、 C' 对应, AD 、 $A'D'$ 分别是 BC 、 $B'C'$ 边上的中线, 如果 $BC = 3$, $AD = 2.4$, $B'C' = 2$, 那么 $A'D'$ 的长是 1.6.

【分析】 利用“相似三角形的周长比等于对应的中线的比”求解即可.

【解答】 解: $\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, AD 和 $A'D'$ 是它们的对应中线, $BC = 3$, $AD = 2.4$, $B'C' = 2$,

$$\therefore BC: B'C' = AD: A'D',$$

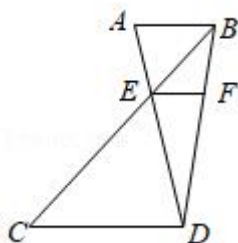
$$\therefore 2.4: A'D' = 3: 2,$$

$$\therefore A'D' \text{ 的长是 } 1.6,$$

故答案为: 1.6.

【点评】 本题考查相似三角形的性质, 解题的关键是记住相似三角形的性质, 灵活运用所学知识解决问题.

15. (4 分) 如图, $AB \parallel CD$, AD 、 BC 相交于点 E 过 E 作 $EF \parallel CD$ 交 BD 于点 F , 如果 $AB = 3$, $CD = 6$, 那么 EF 的长是 2.



【分析】 由 $AB \parallel CD$ 可得出 $\triangle ABE \sim \triangle DCE$, 利用相似三角形的性质可得出 $\frac{BE}{CE} = \frac{1}{2}$, 由

$EF \parallel CD$ 可得出 $\triangle BEF \sim \triangle BCD$, 再利用相似三角形的性质可求出 EF 的长.

【解答】 解: $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DCE,$$

$$\therefore \frac{BE}{CE} = \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore EF \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle BEF \sim \triangle BCD,$$

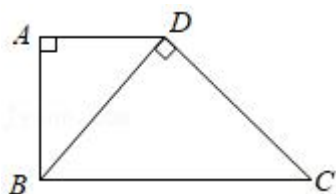
$$\therefore \frac{EF}{CD} = \frac{BE}{BC} = \frac{BE}{BE+CE}, \text{ 即 } \frac{EF}{6} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore EF = 2.$$

故答案为: 2.

【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质以及平行线的性质, 牢记两个相似三角形的对应边的比相等是解题的关键.

16. (4分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle A = 90^\circ$, $\angle BDC = 90^\circ$, $AD = 4$, $BC = 9$, 那么 $BD = \underline{6}$.



【分析】 通过证明 $\triangle ABD \sim \triangle DCB$, 可得 $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{BC}$, 可求解.

【解答】 解: $\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC,$$

$$\text{又 } \because \angle A = \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCB,$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{BD}{BC},$$

$$\therefore BD^2 = 4 \times 9,$$

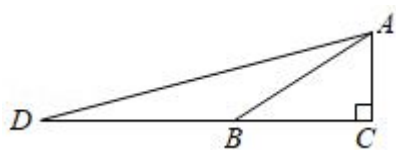
$$\therefore BD = 6,$$

故答案为: 6.

【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质, 梯形的性质, 掌握相似三角形的判定定理是解题的关键.

17. (4分) 如图, 图中提供了一种求 $\cot 15^\circ$ 的方法. 作 $\text{Rt}\triangle ABC$, 使 $\angle C = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, 再延长 CB 到点 D , 使 $BD = BA$, 联结 AD , 即可得 $\angle D = 15^\circ$. 如果设 $AC = t$,

则可得 $CD = (2 + \sqrt{3})t$, 那么 $\cot 15^\circ = \cot D = \frac{CD}{AC} = 2 + \sqrt{3}$. 运用以上方法, 可求得 $\cot 22.5^\circ$ 的值是 $\sqrt{2} + 1$.



【分析】利用题中的方法构建一个 $\text{Rt}\triangle ADC$, 使 $\angle D = 22.5^\circ$, 然后利用余切的定义求解.

【解答】解: 作 $\text{Rt}\triangle ABC$, 使 $\angle C = 90^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$, 再延长 CB 到点 D , 使 $BD = BA$, 联结 AD ,

$$\because AB = BD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle D,$$

$$\because \angle ABC = \angle BAD + \angle D,$$

$$\therefore \angle D = \frac{1}{2} \angle ABC = 22.5^\circ,$$

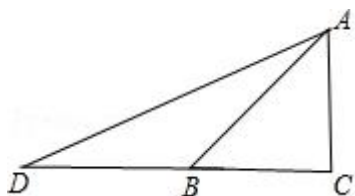
$$\text{设 } AC = t, \text{ 则 } BC = t, AB = \sqrt{2}t,$$

$$\therefore CD = BC + BD = t + \sqrt{2}t = (\sqrt{2} + 1)t,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ADC \text{ 中, } \cot D = \frac{CD}{AC} = \frac{(\sqrt{2} + 1)t}{t} = \sqrt{2} + 1,$$

$$\therefore \cot 22.5^\circ = \sqrt{2} + 1.$$

故答案为 $\sqrt{2} + 1$.



【点评】本题考查了解直角三角形: 在直角三角形中, 由已知元素求未知元素的过程就是解直角三角形. 灵活应用勾股定理和锐角三角函数的定义是解决此类问题的关键.

18. (4分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 8$. D 是 BC 的中点, 点 E 在边 AB 上, 将 $\triangle BDE$ 沿直线 DE 翻折, 使得点 B 落在同一平面内的点 B' 处, 线段 $B'D$ 交边 AB 于点 F , 联结 AB' . 当 $\triangle AB'F$ 是直角三角形时, BE 的长为 2 或 $\frac{40}{17}$.

$$\therefore \frac{6}{10} = \frac{\frac{16}{5} - x}{x},$$

解得 $x = 2$.

$$\therefore BE = 2.$$

②如图2中，当 $\angle AB'F = 90^\circ$ 时，连接 AD ，作 $EH \perp AB'$ 交 AB' 的延长线于 H 。

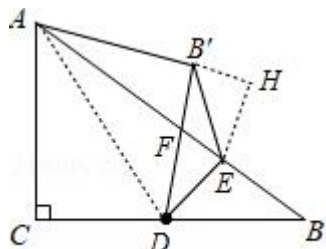


图2

$$\because AD = AD, CD = DB',$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADC \cong \text{Rt}\triangle ADB' \quad (HL),$$

$$\therefore AC = AB' = 6,$$

$\because$ 将 $\triangle BDE$ 沿直线 DE 翻折，

$$\therefore \angle B = \angle DB'E,$$

$$\because AB' \perp DB', EH \perp AH,$$

$$\therefore DB' \parallel EH,$$

$$\therefore \angle DB'E = \angle B'EH,$$

$$\therefore \angle B = \angle B'EH,$$

$$\therefore \sin \angle B = \sin \angle B'EH,$$

$$\text{设 } BE = x, \text{ 则 } B'H = \frac{3}{5}x, EH = \frac{4}{5}x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AEH \text{ 中, } AH^2 + EH^2 = AE^2,$$

$$\therefore \left(\frac{3}{5}x + 6\right)^2 + \left(\frac{4}{5}x\right)^2 = (10 - x)^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{40}{17},$$

$$\therefore BE = \frac{40}{17}.$$

$$\text{则 } BE \text{ 的长为 } 2 \text{ 或 } \frac{40}{17}.$$

$$\text{故答案为: } 2 \text{ 或 } \frac{40}{17}.$$

【点评】 本题考查了翻折变换、勾股定理、解直角三角形、相似三角形的判定与性质、

全等三角形的判定和性质等知识，解题的关键是学会用分类讨论的思想解决问题．

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19.（10 分）计算： $\frac{\tan^2 45^\circ}{\cot 30^\circ - 2\cos 45^\circ} - 2\sin 60^\circ$.

【分析】直接利用特殊角的三角函数值以及二次根式的性质分别化简得出答案．

$$\begin{aligned} \text{【解答】解：原式} &= \frac{1^2}{\sqrt{3} - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \sqrt{3} \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

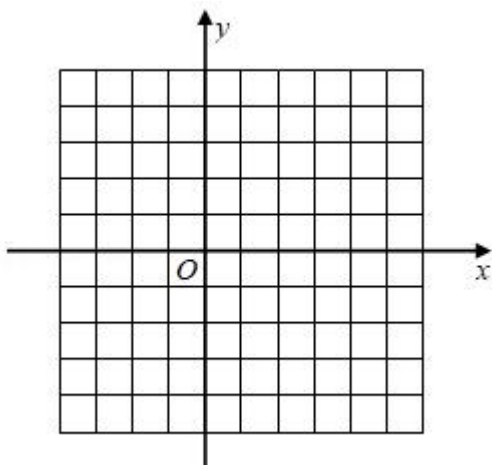
【点评】此题主要考查了特殊角的三角函数值以及二次根式的混合运算，正确化简二次根式是解题关键．

20.（10 分）已知二次函数的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$.

（1）用配方法把该二次函数的解析式化为 $y = a(x+m)^2 + k$ 的形式；

（2）选取适当的数据填入下表，并在如图所示的平面直角坐标系 xOy 内描点，画出该函数的图象．

x	...	<u>0</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	...
y	...	<u>0</u>	<u>$-\frac{3}{2}$</u>	<u>-2</u>	<u>$-\frac{3}{2}$</u>	<u>0</u>	...



【分析】（1）利用配方法把将二次函数 $y = x^2 - 4x - 1$ 的解析式化为 $y = a(x+m)^2 + k$ 的形式；

（2）根据对称轴为 $x = 2$ ，可在对称轴两侧取整数点，描点画出图象即可．

【解答】解：(1) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - 4x)$$

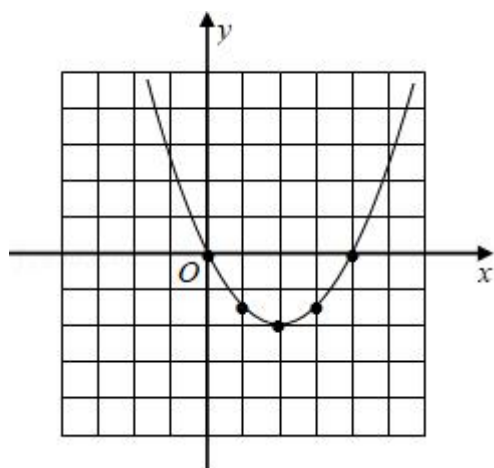
$$= \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4 - 4)$$

$$= \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 2;$$

(2) 列表：

x	...	0	1	2	3	4	...
y	...	0	$-\frac{3}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	0	...

描点、连线画出函数图象如图：

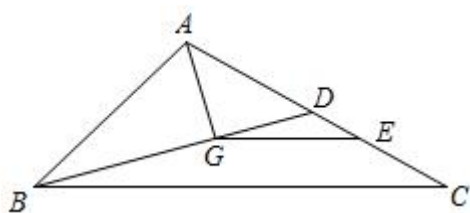


【点评】本题考查了二次函数的图象和性质，二次函数图象上点的坐标特征，画二次函数图象的五步：1. 开口方向，2. 对称轴，3. 顶点坐标，4. 与 x 轴的交点坐标，5. 与 y 轴的交点坐标.

21. (10 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，联结 AG ，联结 BG 并延长交边 AC 于点 D ，过点 G 作 $GE \parallel BC$ 交边 AC 于点 E .

(1) 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{BG}$ ；

(2) 当 $AG \perp BD$ ， $BG = 6$ ， $\angle GAD = 45^\circ$ 时，求 AE 的长.



【分析】(1) 利用三角形法则求出 $\overrightarrow{BD}$ ，再根据 $BG = 2DG$ ，即可解决问题.

(2) 首先证明 $AG = DG = 3$ ，推出 $AD = DC = 3\sqrt{2}$ ，利用相似三角形的性质求出 DE ，即可解决问题.

【解答】解：(1) $\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore AD = DC, BG = 2GD,$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}.$$

$$(2) \because AG \perp BD,$$

$$\therefore \angle AGD = \angle AGB = 90^\circ,$$

$$\because \angle GAD = 45^\circ,$$

$$\therefore GA = GD,$$

$$\because BG = 2GD,$$

$$\therefore AG = GD = 3,$$

$$\therefore AD = DC = \sqrt{2}AG = 3\sqrt{2},$$

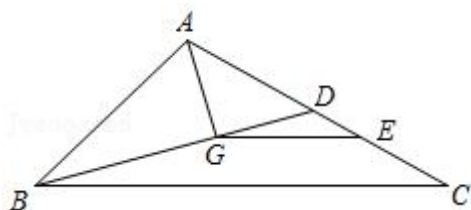
$$\because GE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle DGE \sim \triangle DBC,$$

$$\therefore \frac{DE}{DC} = \frac{DG}{DB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore DE = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore AE = AD + DE = 4\sqrt{2}.$$



【点评】本题考查平面向量，三角形的重心，相似三角形的判定和性质等知识，解题的

关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型．

22. (10分) 图1是一款家用落地式取暖器．如图2是其放置在地面上时的侧面示意图，其中矩形 $ABCD$ 是取暖器的主体，等腰梯形 $BEFC$ 是底座， $BE = CF$ ，烘干架连杆 GH 可绕边 CD 上一点 H 旋转，以调节角度．已知 $CD = 50\text{cm}$ ， $BC = 8\text{cm}$ ， $EF = 20\text{cm}$ ， $DH = 12\text{cm}$ ， $GH = 15\text{cm}$ ， $\angle CFE = 30^\circ$ ．当 $\angle GHD = 53^\circ$ 时，求点 G 到地面的距离．（精确到 0.1cm ）
（参考数据： $\sin 53^\circ \approx 0.80$ ， $\cos 53^\circ \approx 0.60$ ， $\tan 53^\circ \approx 1.33$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$ ）



图1

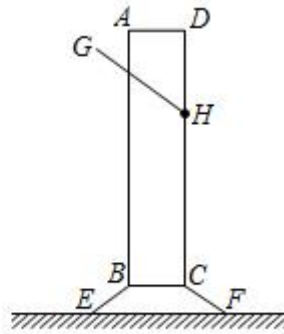


图2

【分析】 如图，过点 G 作 $GT \perp EF$ 于 T ， $GR \perp CD$ 于 R ，延长 AB 交 EF 于 P ，延长 DC 交 EF 于 Q ，则四边形 $GRQT$ ，四边形 $BPQC$ 都是矩形．首先证明 $EP = FQ = 6$ ，解直角三角形求出 CQ ， RH ， CH 即可解决问题．

【解答】 解：如图，过点 G 作 $GT \perp EF$ 于 T ， $GR \perp CD$ 于 R ，延长 AB 交 EF 于 P ，延长 DC 交 EF 于 Q ，则四边形 $GRQT$ ，四边形 $BPQC$ 都是矩形．

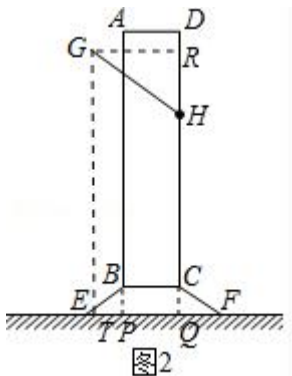


图2

$\because$ 四边形 $BCFE$ 是等腰梯形，

$\therefore BE = CF$ ， $\angle BEP = \angle CFQ$ ，

$\because \angle BPE = \angle CQF = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle BPE \cong \triangle CQF$ (AAS)，

$\therefore EP = QF = \frac{1}{2}(EF - BC) = 6(\text{cm})$ ，

在 $\text{Rt}\triangle CQF$ 中, $CQ = QF \cdot \tan 30^\circ = 2\sqrt{3} \approx 3.46$ (cm),

在 $\text{Rt}\triangle GHR$ 中, $RH = GH \cdot \cos 53^\circ \approx 15 \times 0.60 = 9$ (cm),

$\therefore CD = 50\text{cm}, DH = 12\text{cm},$

$\therefore CH = CD - DH = 38$ (cm),

$\therefore GT = RQ = RH + HC + CQ = 9 + 38 + 3.46 \approx 50.5$ (cm),

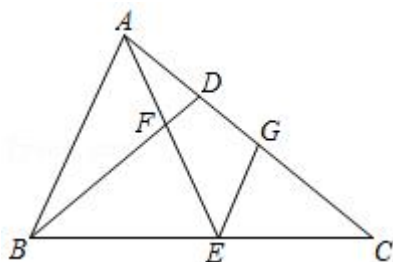
答: 点 G 到地面的距离为 50.5cm .

【点评】 本题考查解直角三角形的应用, 等腰梯形的性质, 全等三角形的判定和性质等知识, 解题的关键是理解题意, 学会添加常用辅助线, 构造全等三角形解决问题, 属于中考常考题型.

23. (12分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, G 在边 AC 上, 点 E 在边 BC 上, $DB = DC$, $EG \parallel AB$, AE, BD 交于点 F , $BF = AG$.

(1) 求证: $\triangle BFE \sim \triangle CGE$;

(2) 当 $\angle AEG = \angle C$ 时, 求证: $AB^2 = AG \cdot AC$.



【分析】 (1) 由平行线分线段成比例可得 $\frac{CE}{BE} = \frac{CG}{AG}$, 进而可得 $\frac{CE}{BE} = \frac{CG}{BF}$, 由等腰三角形的性质可得 $\angle DBC = \angle DCB$, 由相似三角形的判定可得结论;

(2) 通过证明 $\triangle ABE \sim \triangle CBA$, 可得 $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{AB}$, 可得结论.

【解答】 证明: (1) $\because DB = DC$,

$\therefore \angle DBC = \angle DCB$,

$\because EG \parallel AB$,

$\therefore \frac{CE}{BE} = \frac{CG}{AG}$,

$\because BF = AG$,

$\therefore \frac{CE}{BE} = \frac{CG}{BF}$,

$\therefore \triangle BFE \sim \triangle CGE$;

(2) $\because \triangle BFE \sim \triangle CGE$,

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle BEF = \angle GEC, \angle BFE = \angle EGC, \\
&\therefore \angle AEG = \angle C, \angle GEB = \angle AEG + \angle AEB = \angle C + \angle EGC, \\
&\therefore \angle AEB = \angle EGC, \\
&\therefore \angle BEF = \angle GEC = \angle BFE = \angle EGC, \\
&\therefore BE = BF, EC = GC, \\
&\therefore BE = AG, \\
&\therefore GE \parallel AB, \\
&\therefore \angle AEG = \angle BAE, \\
&\therefore \angle BAE = \angle C, \\
&\text{又} \because \angle ABE = \angle ABC, \\
&\therefore \triangle ABE \sim \triangle CBA, \\
&\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{AB}, \\
&\therefore AB^2 = AC \cdot BE = AC \cdot AG.
\end{aligned}$$

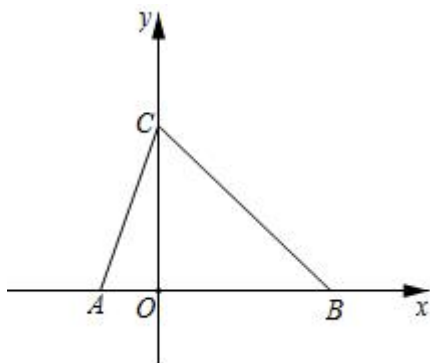
【点评】本题考查了相似三角形的判定和性质，等腰三角形的性质，证明 $\triangle ABE \sim \triangle CBA$ 是本题的关键。

24. (12分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$ ，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 A 、 B 两点。

(1) 当该抛物线经过点 C 时，求该抛物线的表达式；

(2) 在(1)题的条件下，点 P 为该抛物线上一点，且位于第三象限，当 $\angle PBC = \angle ACB$ 时，求点 P 的坐标；

(3) 如果抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点 D 位于 $\triangle BOC$ 内，求 a 的取值范围。



【分析】(1) 设抛物线的解析式为 $y = a(x - 3)(x + 1)$ ，将点 C 的坐标代入求得 a 的值，可得抛物线的解析式；

(2) 先根据点 B 和 C 的坐标证明 $\triangle OCB$ 是等腰直角三角形, 得 $\angle OBC = \angle OCB = 45^\circ$, 根据等式的性质得: $\angle OAC = \angle PBO$, 利用三角函数列式可得 OE 的长, 利用待定系数法求 PB 的解析式, 联立抛物线和直线 PB 的解析式组成方程组可得点 P 的坐标即可;

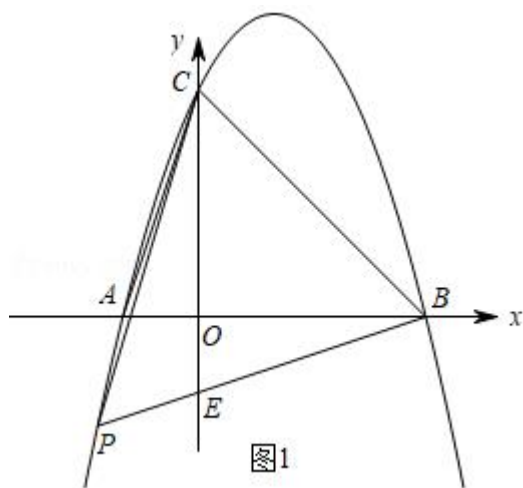
(3) 先确定抛物线的对称轴, 计算边界点 D 的坐标和对应 a 的值, 根据图形可知: 符合条件的 a 一定是负数, 从而得解.

【解答】 解: (1) 设抛物线的解析式为 $y = a(x-3)(x+1)$.

将点 C 的坐标 $(0, 3)$ 代入得: $-3a = 3$, 解得: $a = -1$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$;

(2) 如图 1, 设 PB 交 y 轴于点 E ,



$\because C(0, 3), B(3, 0)$,

$\therefore OB = OC = 3$,

$\because \angle COB = 90^\circ$,

$\therefore \angle OCB = \angle OBC = 45^\circ$,

又 $\because \angle ACB = \angle PCB$,

$\therefore \angle ACB - \angle OCB = \angle PCB - \angle OBC$, 即 $\angle OCA = \angle PBO$,

$\therefore \tan \angle OCA = \tan \angle PBO$, 即 $\frac{OA}{OC} = \frac{OE}{OB}$,

$\therefore \frac{1}{3} = \frac{OE}{3}$,

$\therefore OE = 1$,

$\because$ 点 P 在第三象限,

$\therefore E(0, -1)$,

设 PB 的解析式为: $y = kx + b$ ($k \neq 0$),

把 $E(0, -1)$ 和 $B(3, 0)$ 代入得: $\begin{cases} b=-1 \\ 3k+b=0 \end{cases}$,

$$\text{解得: } \begin{cases} k=\frac{1}{3} \\ b=-1 \end{cases}$$

$\therefore PB$ 的解析式为: $y = \frac{1}{3}x - 1$,

$$\text{则 } \begin{cases} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = \frac{1}{3}x - 1 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = -\frac{4}{3} \\ y_2 = -\frac{13}{9} \end{cases},$$

$$\therefore P\left(-\frac{4}{3}, -\frac{13}{9}\right);$$

(3) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 A 、 B 两点,

$$\therefore \text{对称轴是: 直线 } x = \frac{3-1}{2} = 1,$$

$\because B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$,

同理得 BC 的解析式为: $y = -x + 3$,

当 $x = 1$ 时, $y = 2$,

当顶点 $D(1, 2)$ 时, 设抛物线的解析式为 $y = a(x-3)(x+1)$,

$$\text{把顶点 } D(1, 2) \text{ 代入得: } a = -\frac{1}{2},$$

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点 D 位于 $\triangle BOC$ 内, a 的取值范围是 $-\frac{1}{2} < a < 0$.

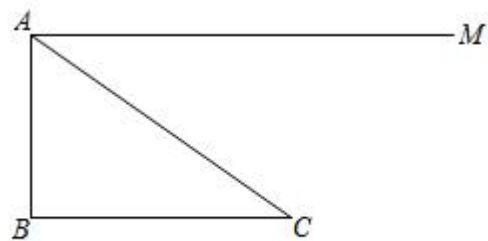
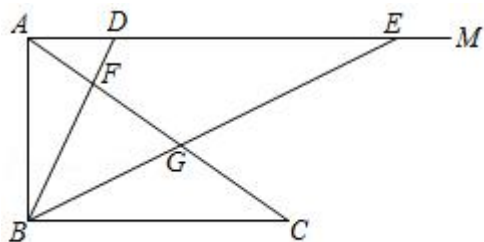
【点评】 本题主要考查的是二次函数的综合应用, 解答本题主要应用了待定系数法求一次函数、二次函数的解析式, 三角函数, 对称的性质, 二次函数的性质等知识, 熟知利用方程组的解确定两函数的交点坐标是本题的关键.

25. (14分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 3$, $BC = 4$, 过点 A 作射线 $AM \parallel BC$, 点 D 、 E 是射线 AM 上的两点 (点 D 不与点 A 重合, 点 E 在点 D 右侧), 联结 BD 、 BE 分别交边 AC 于点 F 、 G , $\angle DBE = \angle C$.

(1) 当 $AD = 1$ 时, 求 FB 的长;

(2) 设 $AD = x$, $FG = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出 x 的取值范围;

(3) 联结 DG 并延长交边 BC 于点 H , 如果 $\triangle DBH$ 是等腰三角形, 请直接写出 AD 的长.



备用图

【分析】(1) 利用勾股定理计算 AC 和 BD 的长，再证明 $\triangle ADF \sim \triangle CBF$ ，列比例式可得 BF 的长；

(2) 如图 1，先证明 $\triangle ADF \sim \triangle BGF$ ，得 $\frac{AF}{BF} = \frac{DF}{FG}$ ，再证明 $\triangle ADF \sim \triangle CBF$ ，得 $\frac{DF}{BF} = \frac{AF}{CF} = \frac{AD}{BC} = \frac{x}{4}$ ，分别表示 DF ， AF 和 BF 的长，代入比例式计算即可；根据 $\angle DBE$ 无限接近 $\angle DBC$ 时， AD 的值接近 4，可得 x 的取值；

(3) 分三种情况：①当 $BD = DH$ 时，②当 $BD = BH$ 时，③当 $BH = DH$ 时，分别根据平行线分线段成比例定理列比例式，结合方程可解答．

【解答】解：(1) $\because AM \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle DAB + \angle ABC = 180^\circ,$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB = 90^\circ,$$

$$\text{由勾股定理得：} BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

$$\because AM \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle CBF,$$

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{DF}{BF},$$

$$\because AD = 1,$$

$$\therefore \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{10} - BF}{BF},$$

$$\therefore BF = \frac{4\sqrt{10}}{5};$$

(2) 如图 1， $\because AM \parallel BC$ ，

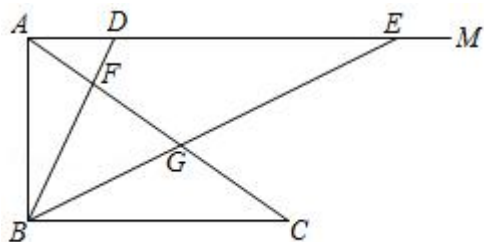


图1

$$\therefore \angle C = \angle CAM,$$

$$\because \angle DBE = \angle C,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle CAM,$$

$$\because \angle BFG = \angle AFD,$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle BGF,$$

$$\therefore \frac{AF}{BF} = \frac{DF}{FG},$$

$$\therefore AF \cdot FG = BF \cdot DF,$$

$$\because AM \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle CBF,$$

$$\therefore \frac{DF}{BF} = \frac{AF}{CF} = \frac{AD}{BC} = \frac{x}{4},$$

$$\therefore \frac{DF}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{x}{x+4}, \quad \frac{AF}{AC} = \frac{x}{x+4},$$

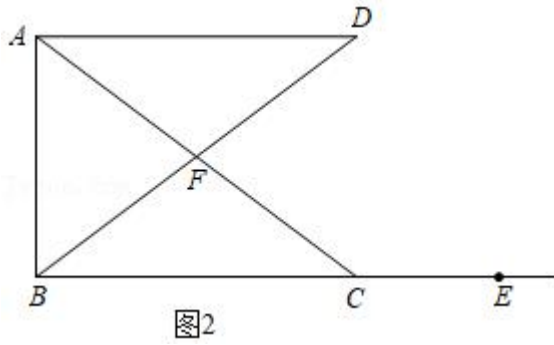
$$\therefore DF = \frac{x\sqrt{x^2+9}}{x+4}, \quad AF = \frac{5x}{x+4},$$

$$\text{同理得: } BF = \frac{4\sqrt{x^2+9}}{x+4},$$

$$\therefore y \cdot \frac{5x}{x+4} = \frac{x\sqrt{x^2+9}}{x+4} \cdot \frac{4\sqrt{x^2+9}}{x+4},$$

$$\therefore y = \frac{4x^2+36}{5x+20};$$

如图2, 当点 E 在直线 BC 上时, $\angle DBC = \angle ACB = \angle ADB$,



$$\because AB = BA, \angle ABC = \angle DAB,$$

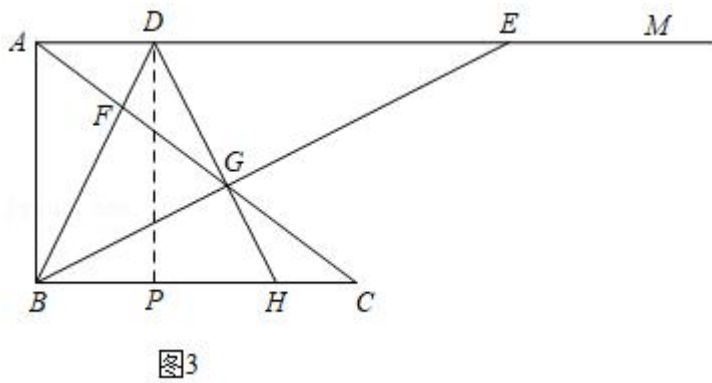
$$\therefore \triangle DAB \cong \triangle CBA \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AD = BC = 4,$$

$$\therefore x \text{ 的取值范围是 } 0 < x < 4;$$

(3) 分三种情况:

①当 $BD = DH$ 时, 如图 3, 过点 D 作 $DP \perp BC$ 于 P ,



$$\because BD = DH,$$

$$\therefore BP = PH = AD = x,$$

$$\therefore CH = 4 - 2x, \angle DBP = \angle DHP,$$

$$\therefore \angle DBE + \angle GBH = \angle C + \angle CGH,$$

$$\therefore \angle CGH = \angle GBH,$$

$$\because \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle CHG \sim \triangle CGB,$$

$$\therefore \frac{CG}{BC} = \frac{CH}{CG},$$

$$\therefore CG^2 = 4(4 - 2x),$$

$$\because AD \parallel CH,$$

$$\therefore \frac{AD}{CH} = \frac{AG}{CG}, \text{ 即 } \frac{AD+CH}{CH} = \frac{AG+CG}{CG},$$

$$\therefore \frac{x+4-2x}{4-2x} = \frac{5}{CG},$$

$$\therefore CG = \frac{5(4-2x)}{4-x},$$

$$\therefore 4(4-2x) = \frac{25(4-2x)^2}{(4-x)^2},$$

$$\therefore 2x^2 + 9x - 18 = 0,$$

$$\therefore x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -6 \text{ (舍)},$$

$$\therefore AD = \frac{3}{2};$$

②当 $BD = BH$ 时, 如图 4,

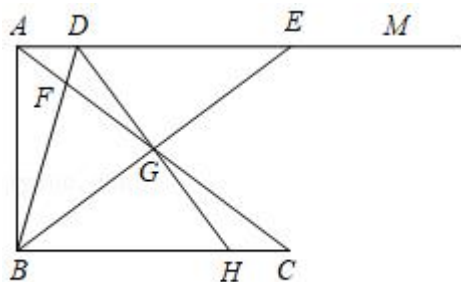


图4

由勾股定理得: $BD = BH = \sqrt{x^2 + 9}$,

$$\text{由 (2) 同理得: } CG = CF - FG = \frac{20}{x+4} - \frac{4x^2+36}{5(x+4)} = \frac{4(4-x)}{5},$$

$$\because AD \parallel CH,$$

$$\therefore \frac{AD}{CH} = \frac{AG}{CG},$$

$$\therefore \frac{AD+CH}{CH} = \frac{AG+CG}{CG}, \text{ 即 } \frac{x+4-\sqrt{x^2+9}}{4-\sqrt{x^2+9}} = \frac{5}{\frac{4(4-x)}{5}},$$

$$\therefore (9+4x)\sqrt{x^2+9} = 4(x^2+9),$$

$$\text{解得: } x = \frac{7}{8},$$

$$\therefore AD = \frac{7}{8};$$

③当 $BH = DH$ 时, 如图 5, 过点 D 作 $DK \perp BC$ 于 K ,

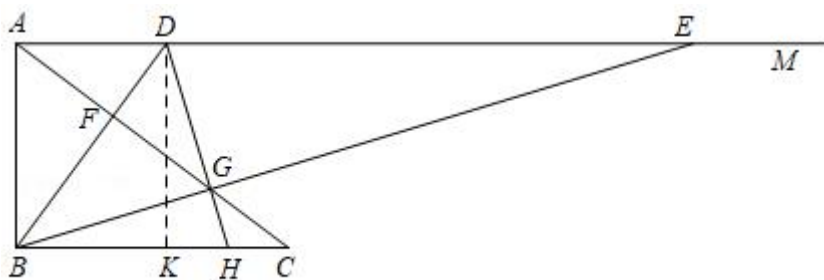


图5

设 $KH = a$,

$$\because BK = AD = x,$$

$$\therefore DH = BH = x + a,$$

在 $\text{Rt}\triangle DKH$ 中, 由勾股定理得: $DK^2 + KH^2 = DH^2$,

$$\therefore 3^2 + a^2 = (x + a)^2,$$

$$\therefore a = \frac{9 - x^2}{2x},$$

$$\therefore CH = 4 - BH = 4 - x - \frac{9 - x^2}{2x} = \frac{-x^2 + 8x - 9}{2x},$$

$$\because AD \parallel CH,$$

$$\therefore \frac{AD}{CH} = \frac{AG}{CG},$$

$$\therefore \frac{AD + CH}{CH} = \frac{AG + CG}{CG}, \text{ 即 } \frac{x + \frac{-x^2 + 8x - 9}{2x}}{\frac{-x^2 + 8x - 9}{2x}} = \frac{5}{\frac{4(4 - x)}{5}},$$

$$\therefore \frac{x^2 + 8x - 9}{x^2 - 8x + 9} = \frac{25}{4(x - 4)},$$

$$\therefore (x^2 + 9)(4x - 9) = 0,$$

$$\therefore x = \frac{9}{4},$$

$$\therefore AD = \frac{9}{4},$$

综上, AD 的长是 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{7}{8}$ 或 $\frac{9}{4}$.

【点评】 本题属于三角形的综合题, 考查了相似三角形的判定和性质, 勾股定理, 等腰三角形的性质和判定等知识, 解题的关键是学会利用分类讨论的思想解决问题, 并与方程相结合, 本题计算量大, 属于中考压轴题.