

2020-2021 学年上海市松江区九年级（上）期末数学试卷（一模）

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 如果两个相似三角形对应边的比为 1: 4，那么它们的周长比是（ ）

- A. 1: 2 B. 1: 4 C. 1: 8 D. 1: 16

2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = \alpha$ ， $BC = 2$ ，那么 AC 的长为（ ）

- A. $2\sin\alpha$ B. $2\cos\alpha$ C. $2\tan\alpha$ D. $2\cot\alpha$

3. 将抛物线 $y = 2x^2$ 向右平移 3 个单位，能得到的抛物线是（ ）

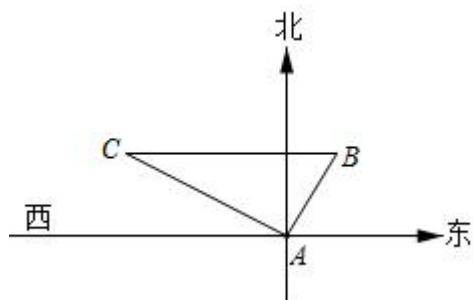
- A. $y = 2x^2 + 3$ B. $y = 2x^2 - 3$ C. $y = 2(x + 3)^2$ D. $y = 2(x - 3)^2$

2

4. 已知 $\vec{a} = 2\vec{b}$ ，下列说法中不正确的是（ ）

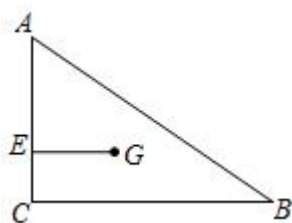
- A. $\vec{a} - 2\vec{b} = 0$ B. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同
C. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ D. $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$

5. 如图，一艘船从 A 处向北偏东 30° 的方向行驶 10 千米到 B 处，再从 B 处向正西方向行驶 20 千米到 C 处，这时这艘船与 A 的距离（ ）



- A. 15 千米 B. 10 千米 C. $10\sqrt{3}$ 千米 D. $5\sqrt{3}$ 千米

6. 如图，已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心， $GE \perp AC$ ，垂足为 E ，如果 $CB = 8$ ，则线段 GE 的长为（ ）



A. $\frac{5}{3}$

B. $\frac{7}{3}$

C. $\frac{8}{3}$

D. $\frac{10}{3}$

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 已知 $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$, 则 $\frac{x-y}{y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 已知线段 MN 的长是 $4cm$, 点 P 是线段 MN 的黄金分割点, 则较长线段 MP 的长是 $\underline{\hspace{2cm}} cm$.

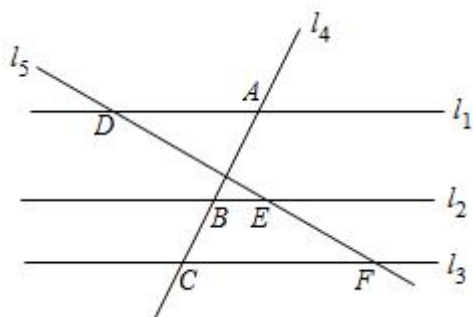
9. 计算: $\sin 30^\circ \cdot \cot 60^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$, $\cos A = \frac{3}{4}$, 那么 AB 的长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

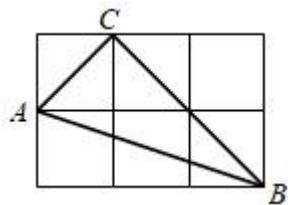
11. 一个边长为 2 厘米的正方形, 如果它的边长增加 x ($x > 0$) 厘米, 则面积随之增加 y 平方厘米, 那么 y 关于 x 的函数解析式为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

12. 已知点 $A(2, y_1)$ 、 $B(3, y_2)$ 在抛物线 $y = x^2 - 2x + c$ (c 为常数) 上, 则 $y_1 \underline{\hspace{2cm}} y_2$ (填 “>”、“=” 或 “<”).

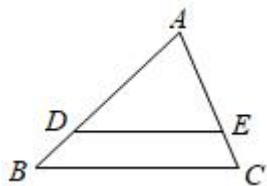
13. 如图, 已知直线 l_1 、 l_2 、 l_3 分别交直线 l_4 于点 A 、 B 、 C , 交直线 l_5 于点 D 、 E 、 F , 且 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, $AB = 4$, $AC = 6$, $DF = 10$, 则 $DE = \underline{\hspace{2cm}}$.



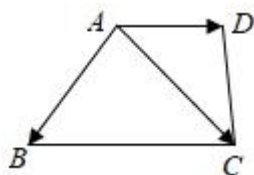
14. 如图, $\triangle ABC$ 在边长为 1 个单位的方格纸中, $\triangle ABC$ 的顶点在小正方形顶点位置, 那么 $\angle ABC$ 的正弦值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



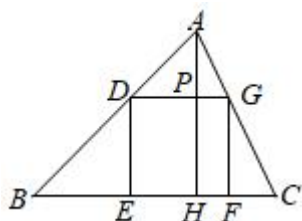
15. 如图, 已知点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB 和 AC 上, $DE \parallel BC$, $\frac{DE}{BC} = \frac{3}{4}$, 四边形 $DBCE$ 的面积等于 7, 则 $\triangle ADE$ 的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



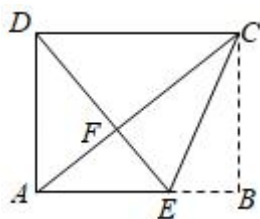
16. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $BC = 2AD$ ，设向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ，用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AC}$ 为_____.



17. 如图，正方形 $DEFG$ 的边 EF 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上，顶点 D 、 G 分别在边 AB 、 AC 上. 已知 $\triangle ABC$ 的边 $BC = 16\text{cm}$ ，高 AH 为 10cm ，则正方形 $DEFG$ 的边长为_____ cm .

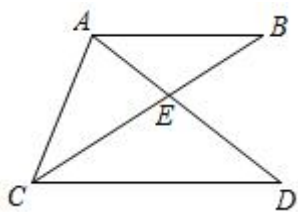


18. 如图，已知矩形纸片 $ABCD$ ，点 E 在边 AB 上，且 $BE = 1$ ，将 $\triangle CBE$ 沿直线 CE 翻折，使点 B 落在对角线 AC 上的点 F 处，联结 DF ，如果点 D 、 F 、 E 在同一直线上，则线段 AE 的长为_____.



三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

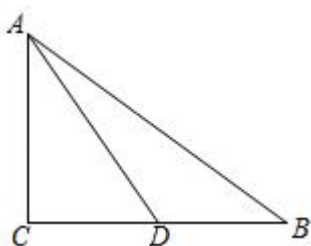
19. (10 分) 用配方法把二次函数 $y = 3x^2 - 6x + 5$ 化为 $y = a(x+m)^2 + k$ 的形式，并指出这个函数图象的开口方向、对称轴和顶点坐标.
20. (10 分) 如图，已知 $AB \parallel CD$ ， AD 、 BC 相交于点 E ， $AB = 6$ ， $BE = 4$ ， $BC = 9$ ，联结 AC .
- (1) 求线段 CD 的长；
 - (2) 如果 $AE = 3$ ，求线段 AC 的长.



21. (10分) 如图, 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\sin \angle ABC = \frac{3}{5}$, 点 D 在边 BC 上, $BD = 4$, 联结 AD , $\tan \angle DAC = \frac{2}{3}$.

(1) 求边 AC 的长;

(2) 求 $\cot \angle BAD$ 的值.

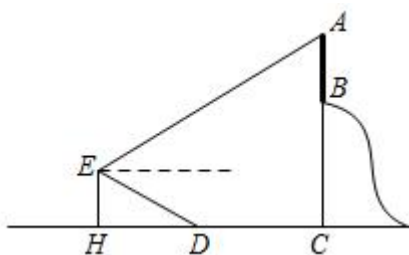


22. (10分) 如图, 垂直于水平面的 $5G$ 信号塔 AB 建在垂直于水平面的悬崖边 B 点处 (点 A 、 B 、 C 在同一直线上). 某测量员从悬崖底 C 点出发沿水平方向前行 60 米到 D 点, 再沿斜坡 DE 方向前行 65 米到 E 点 (点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 在同一平面内), 在点 E 处测得 $5G$ 信号塔顶端 A 的仰角为 37° , 悬崖 BC 的高为 92 米, 斜坡 DE 的坡度 $i = 1:2.4$.

(1) 求斜坡 DE 的高 EH 的长;

(2) 求信号塔 AB 的高度.

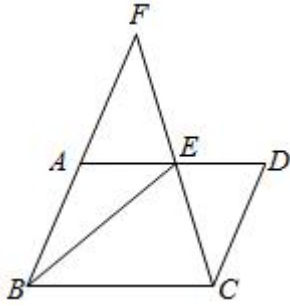
(参考数据: $\sin 37^\circ \approx 0.60$, $\cos 37^\circ \approx 0.80$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$.)



23. (12分) 如图, 已知在 $\square ABCD$ 中, E 是边 AD 上一点, 联结 BE 、 CE , 延长 BA 、 CE 相交于点 F , $CE^2 = DE \cdot BC$.

(1) 求证: $\angle EBC = \angle DCE$;

(2) 求证: $BE \cdot EF = BF \cdot AE$.



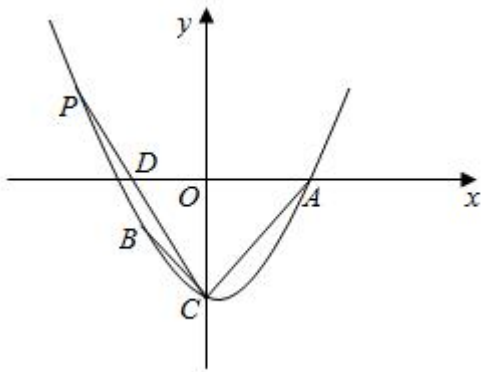
24. (12 分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 2$ 经过点 $A(2, 0)$ 和 $B(-1, -1)$, 与 y 轴交于点 C .

(1) 求这个抛物线的表达式;

(2) 如果点 P 是抛物线位于第二象限上一点, PC 交 x 轴于点 D , $\frac{PD}{DC} = \frac{2}{3}$.

①求 P 点坐标;

②点 Q 在 x 轴上, 如果 $\angle QCA = \angle PCB$, 求点 Q 的坐标.

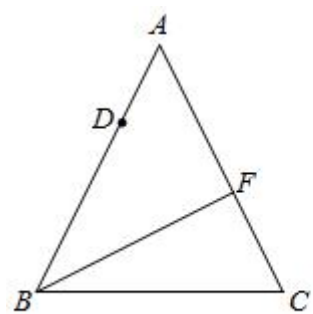


25. (14 分) 如图, 已知在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5\sqrt{5}$, $\tan \angle ABC = 2$, $BF \perp AC$, 垂足为 F , 点 D 是边 AB 上一点 (不与 A, B 重合).

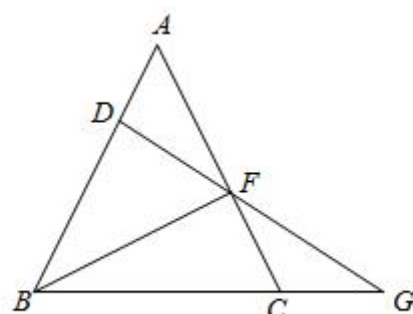
(1) 求边 BC 的长;

(2) 如图 2, 延长 DF 交 BC 的延长线于点 G , 如果 $CG = 4$, 求线段 AD 的长;

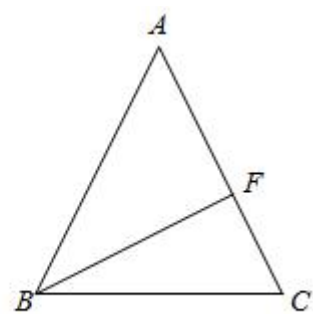
(3) 过点 D 作 $DE \perp BC$, 垂足为 E , DE 交 BF 于点 Q , 联结 DF , 如果 $\triangle DQF$ 和 $\triangle ABC$ 相似, 求线段 BD 的长.



(图 1)



(图 2)



(备用图)

2020-2021 学年上海市松江区九年级（上）期末数学试卷（一模）

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 如果两个相似三角形对应边的比为 1: 4, 那么它们的周长比是 ()

- A. 1: 2 B. 1: 4 C. 1: 8 D. 1: 16

【分析】直接利用相似三角形的性质得出答案.

【解答】解: $\because$ 两个相似三角形对应边的比为 1: 4,

$\therefore$ 它们的周长比是: 1: 4.

故选: B.

2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$, $BC = 2$, 那么 AC 的长为 ()

- A. $2\sin\alpha$ B. $2\cos\alpha$ C. $2\tan\alpha$ D. $2\cot\alpha$

【分析】根据锐角三角函数的意义求解后, 再做出判断即可.

【解答】解: $\because \cot A = \frac{AC}{BC}$, $BC = 2$,

$\therefore AC = BC \cdot \cot\alpha = 2\cot\alpha$,

故选: D.

3. 将抛物线 $y = 2x^2$ 向右平移 3 个单位, 能得到的抛物线是 ()

- A. $y = 2x^2 + 3$ B. $y = 2x^2 - 3$ C. $y = 2(x + 3)^2$ D. $y = 2(x - 3)^2$

2

【分析】根据“左加右减、上加下减”的原则进行解答即可.

【解答】解: 由“左加右减”的原则可知, 抛物线 $y = 2x^2$ 向右平移 3 个单位, 能得到的抛物线是 $y = 2(x - 3)^2$.

故选: D.

4. 已知 $\vec{a} = 2\vec{b}$, 下列说法中不正确的是 ()

- A. $\vec{a} - 2\vec{b} = 0$ B. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同
C. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ D. $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$

【分析】根据平面向量的性质进行一一判断.

【解答】解：A、由 $\vec{a} = 2\vec{b}$ 得到： $\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{0}$ ，故本选项说法不正确。

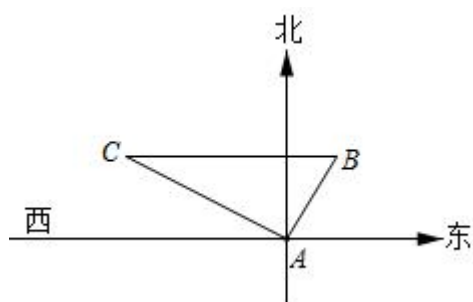
B、由 $\vec{a} = 2\vec{b}$ 知， $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同，故本选项说法正确。

C、由 $\vec{a} = 2\vec{b}$ 知， $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同，则 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，故本选项说法正确。

D、由 $\vec{a} = 2\vec{b}$ 知， $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ ，故本选项说法正确。

故选：A。

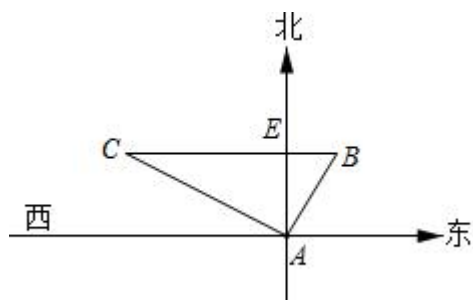
5. 如图，一艘船从 A 处向北偏东 30° 的方向行驶 10 千米到 B 处，再从 B 处向正西方向行驶 20 千米到 C 处，这时这艘船与 A 的距离（ ）



- A. 15 千米 B. 10 千米 C. $10\sqrt{3}$ 千米 D. $5\sqrt{3}$ 千米

【分析】根据直角三角形的三角函数得出 AE ， BE ，进而得出 CE ，利用勾股定理得出 AC 即可。

【解答】解：如图，



$$\because BC \perp AE,$$

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\because \angle EAB = 30^\circ, AB = 10 \text{ 米},$$

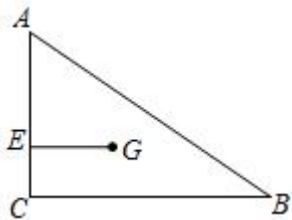
$$\therefore BE = 5 \text{ 米}, AE = 5\sqrt{3} \text{ 米},$$

$$\therefore CE = BC - BE = 20 - 5 = 15 \text{ (米)},$$

$$\therefore AC = \sqrt{CE^2 + AE^2} = \sqrt{15^2 + (5\sqrt{3})^2} = 10\sqrt{3} \text{ (米)},$$

故选：C.

6. 如图，已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心， $GE \perp AC$ ，垂足为 E ，如果 $CB = 8$ ，则线段 GE 的长为（ ）



- A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{7}{3}$ C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{10}{3}$

【分析】延长 AG 交 BC 于 D ，如图，利用三角形重心的性质得到 $CD = BD = 4$ ， $AG = 2GD$ ，再证明 $GE \parallel CD$ ，则可判断 $\triangle AEG \sim \triangle ACD$ ，然后利用相似比可求出 EG 的长.

【解答】解：延长 AG 交 BC 于 D ，如图，

$\because$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore CD = BD = \frac{1}{2}BC = 4, AG = 2GD,$$

$\because GE \perp AC$,

$$\therefore \angle AEG = 90^\circ,$$

而 $\angle C = 90^\circ$,

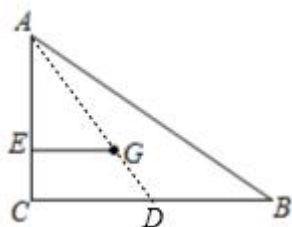
$$\therefore GE \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle ACD,$$

$$\therefore \frac{EG}{CD} = \frac{AG}{AD} = \frac{AG}{AG+GD} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore EG = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}.$$

故选：C.



二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 已知 $\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$ ，则 $\frac{x-y}{y} = -\frac{2}{3}$.

【分析】根据题意，设 $x = 5k$ ， $y = 3k$ ，代入即可求得 $\frac{x-y}{y}$ 的值.

【解答】解：由题意，设 $x = 5k$ ， $y = 3k$ ，

$$\therefore \frac{x-y}{y} = \frac{5k-3k}{3k} = \frac{2}{3}.$$

故答案为： $\frac{2}{3}$.

8. 已知线段 MN 的长是 $4cm$ ，点 P 是线段 MN 的黄金分割点，则较长线段 MP 的长是 $(2\sqrt{5} - 2) cm$.

【分析】根据黄金分割的概念得到 $MP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}MN$ ，把 $MN = 4cm$ 代入计算即可.

【解答】解： $\because P$ 是线段 MN 的黄金分割点，

$$\therefore MP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}MN,$$

而 $MN = 4cm$ ，

$$\therefore MP = 4 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} = (2\sqrt{5} - 2) cm.$$

故答案为 $(2\sqrt{5} - 2)$.

9. 计算： $\sin 30^\circ \cdot \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

【分析】直接利用特殊角的三角函数值化简得出答案.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解：原式} &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

故答案为： $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

10. 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $\cos A = \frac{3}{4}$ ，那么 AB 的长为 8 .

【分析】根据锐角三角函数的意义求解后，再做出判断即可.

【解答】解： $\because \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$ ， $AC = 6$ ，

$$\therefore AB = \frac{AC}{\cos A} = 8,$$

故答案为： 8 .

11. 一个边长为 2 厘米的正方形，如果它的边长增加 x ($x > 0$) 厘米，则面积随之增加 y 平方厘米，那么 y 关于 x 的函数解析式为 $y = x^2 + 4x$.

【分析】根据“面积的增加量就是边长增加前后的两个正方形的面积差”可得答案.

【解答】解：由题意得，

$$y = (2+x)^2 - 2^2 = x^2 + 4x,$$

故答案为： $y = x^2 + 4x$.

12. 已知点 $A(2, y_1)$ 、 $B(3, y_2)$ 在抛物线 $y = x^2 - 2x + c$ (c 为常数) 上，则 y_1 < y_2 (填“>”、“=”或“<”).

【分析】先求得开口方向和对称轴，再根据二次函数的性质进行判断即可.

【解答】解： $\because y = x^2 - 2x + c$,

$\therefore$ 抛物线的开口向上，对称轴是直线 $x = -\frac{-2}{2 \times 1} = 1$,

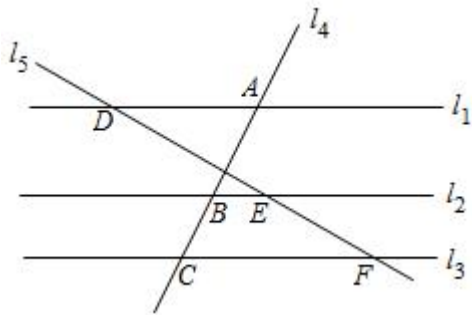
$\therefore$ 在对称轴的右侧， y 随 x 的增大而增大，

$$\because 1 < 2 < 3,$$

$$\therefore y_1 < y_2,$$

故答案为：<.

13. 如图，已知直线 l_1 、 l_2 、 l_3 分别交直线 l_4 于点 A 、 B 、 C ，交直线 l_5 于点 D 、 E 、 F ，且 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ， $AB = 4$ ， $AC = 6$ ， $DF = 10$ ，则 $DE = \underline{\frac{20}{3}}$.



【分析】直接根据平行线分线段成比例定理得到 $\frac{DE}{DF} = \frac{AB}{AC}$ ，然后根据比例的性质可计算出 DE 的长.

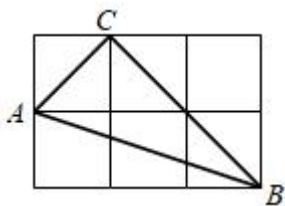
【解答】解： $\because l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$,

$$\therefore \frac{DE}{DF} = \frac{AB}{AC}, \text{ 即 } \frac{DE}{10} = \frac{4}{6},$$

$$\therefore DE = \frac{20}{3}.$$

故答案为 $\frac{20}{3}$.

14. 如图， $\triangle ABC$ 在边长为 1 个单位的方格纸中， $\triangle ABC$ 的顶点在小正方形顶点位置，那么 $\angle ABC$ 的正弦值为 $\underline{\frac{\sqrt{5}}{5}}$.



【分析】根据题意和图形，可以求得 AC 、 BC 和 AB 的长，然后根据勾股定理的逆定理可以判断 $\triangle ACB$ 的形状，然后即可求得 $\angle ABC$ 的正弦值．

【解答】解：由图可得，

$$AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad AB = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}, \quad BC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

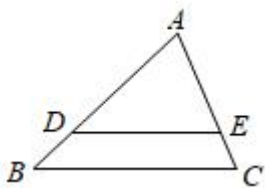
$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

$\therefore \triangle ACB$ 是直角三角形，

$$\therefore \sin \angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

故答案为： $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ．

15. 如图，已知点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB 和 AC 上， $DE \parallel BC$ ， $\frac{DE}{BC} = \frac{3}{4}$ ，四边形 $DBCE$ 的面积等于 7，则 $\triangle ADE$ 的面积为 9 ．



【分析】由 $DE \parallel BC$ 可判定 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，根据相似三角形的面积比等于相似比的平方，可得

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = \frac{9}{16}, \quad \text{从而求得} \quad \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\text{四边形}DBCE}} = \frac{9}{7}, \quad \text{即可求得} \triangle ADE \text{ 的面积}$$

为 9．

【解答】解： $\because DE \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = \frac{9}{16},$$

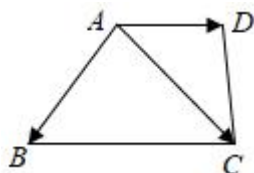
$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\text{四边形}DBCE}} = \frac{9}{7},$$

$\because$ 四边形 $DBCE$ 的面积等于 7，

$$\therefore S_{\triangle ADE} = 9.$$

故答案为: 9.

16. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $BC = 2AD$, 设向量 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AC}$ 为 $\underline{\vec{a} + 2\vec{b}}$.



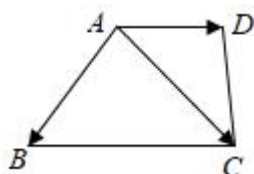
【分析】根据梯形的性质和三角形法则解答.

【解答】解: 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $\because AD \parallel BC$, $BC = 2AD$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$,

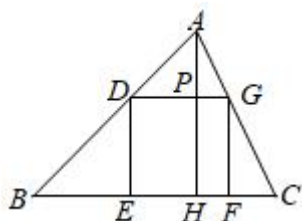
$$\therefore \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD} = 2\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + 2\vec{b},$$

故答案是: $\vec{a} + 2\vec{b}$.



17. 如图, 正方形 $DEFG$ 的边 EF 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上, 顶点 D 、 G 分别在边 AB 、 AC 上. 已知 $\triangle ABC$ 的边 $BC = 16\text{cm}$, 高 AH 为 10cm , 则正方形 $DEFG$ 的边长为 $\underline{\frac{80}{13}}\text{cm}$.



【分析】设正方形 $DEFG$ 的边长为 $x\text{cm}$, 则 $DE = PH = x\text{cm}$, 所以 $AP = (10 - x)\text{cm}$, 再证明 $\triangle ADG \sim \triangle ABC$, 则利用相似比得到 $\frac{x}{16} = \frac{10-x}{10}$, 然后根据比例的性质求出 x .

【解答】解: 如图, 设正方形 $DEFG$ 的边长为 $x\text{cm}$, 则 $DE = PH = x\text{cm}$,

$$\therefore AP = AH - PH = (10 - x)\text{cm},$$

$$\because DG \parallel BC,$$

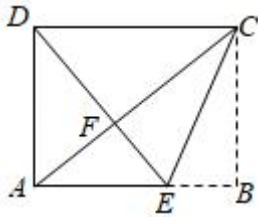
$$\therefore \triangle ADG \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DG}{BC} = \frac{AP}{AH}, \text{ 即 } \frac{x}{16} = \frac{10-x}{10},$$

$$\therefore x = \frac{80}{13} \text{ (cm)},$$

故答案为 $\frac{80}{13}$.

18. 如图, 已知矩形纸片 $ABCD$, 点 E 在边 AB 上, 且 $BE = 1$, 将 $\triangle CBE$ 沿直线 CE 翻折, 使点 B 落在对角线 AC 上的点 F 处, 联结 DF , 如果点 D 、 F 、 E 在同一直线上, 则线段 AE 的长为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



【分析】根据矩形的性质得到 $AD = BC$, $\angle ADC = \angle B = \angle DAE = 90^\circ$, 根据折叠的性质得到 $CF = BC$, $\angle CFE = \angle B = 90^\circ$, $EF = BE = 1$, $DC = DE$, 证明 $\triangle AEF \sim \triangle DEA$, 根据相似三角形的性质即可得到结论.

【解答】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AD = BC, AB = CD, \angle ADC = \angle B = \angle DAE = 90^\circ,$$

$\because$ 把 $\triangle BCE$ 沿直线 CE 对折, 使点 B 落在对角线 AC 上的点 F 处,

$$\therefore CF = BC, \angle CFE = \angle B = 90^\circ, EF = BE = 1, \angle CEB = \angle CEF,$$

$\because$ 矩形 $ABCD$ 中, $DC \parallel AB$,

$$\therefore \angle DCE = \angle CEB,$$

$$\therefore \angle CEF = \angle DCE,$$

$$\therefore DC = DE,$$

设 $AE = x$, 则 $AB = CD = DE = x + 1$,

$$\because \angle AFE = \angle CFD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\because \angle AEF = \angle DEA,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle DEA,$$

$$\therefore \frac{AE}{EF} = \frac{DE}{AE},$$

$$\therefore \frac{x}{1} = \frac{x+1}{x},$$

$$\text{解得 } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ 或 } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore AE = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19.（10 分）用配方法把二次函数 $y = 3x^2 - 6x + 5$ 化为 $y = a(x+m)^2 + k$ 的形式，并指出这个函数图象的开口方向、对称轴和顶点坐标.

【分析】利用配方法把一般式化为顶点式，根据二次函数的性质解答.

$$\text{【解答】解: } y = 3x^2 - 6x + 5$$

$$= 3(x^2 - 2x) + 5$$

$$= 3(x^2 - 2x + 1 - 1) + 5$$

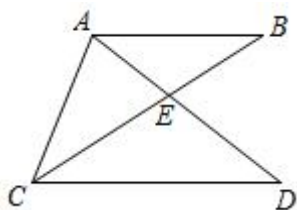
$$= 3(x - 1)^2 + 2,$$

开口向上，对称轴为直线 $x = 1$ ，顶点 $(1, 2)$.

20.（10 分）如图，已知 $AB \parallel CD$ ， AD 、 BC 相交于点 E ， $AB = 6$ ， $BE = 4$ ， $BC = 9$ ，联结 AC .

（1）求线段 CD 的长；

（2）如果 $AE = 3$ ，求线段 AC 的长.



【分析】（1）证明 $\triangle ABE \sim \triangle DCE$ ，由相似三角形的性质得出 $\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{CE}$ ，则可得出答案；

（2）由相似三角形的性质求出 $DE = \frac{15}{4}$ ，证明 $\triangle ABC \sim \triangle ECD$ ，由相似三角形的性质得

出 $\frac{AB}{AC} = \frac{CE}{DE}$ ，则可求出答案.

【解答】解：（1） $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DCE,$$

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{BE}{CE},$$

$$\because AB = 6, BE = 4, BC = 9,$$

$$\therefore \frac{6}{CD} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore CD = \frac{15}{2};$$

$$(2) \because AE = 3, \triangle ABE \sim \triangle DCE,$$

$$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{BE}{CE},$$

$$\therefore \frac{3}{DE} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore DE = \frac{15}{4},$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \quad \frac{CE}{DC} = \frac{5}{\frac{15}{2}} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{CE}{DC},$$

$$\therefore AB \parallel DC,$$

$$\therefore \angle ECD = \angle ABC,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ECD,$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{CE}{DE},$$

$$\therefore \frac{6}{AC} = \frac{5}{\frac{15}{4}},$$

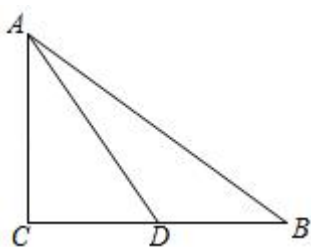
$$\therefore AC = \frac{9}{2}.$$

21. (10分) 如图, 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\sin \angle ABC = \frac{3}{5}$, 点 D 在边 BC 上, BD

$= 4$, 联结 AD , $\tan \angle DAC = \frac{2}{3}$.

(1) 求边 AC 的长;

(2) 求 $\cot \angle BAD$ 的值.



【分析】 (1) 根据题意和锐角三角函数, 可以求得 AC 的长;

(2) 根据 (1) 中的结果, 可以得到 AC 、 CD 的长, 然后根据勾股定理可以得到 AD 的

长, 再根据等面积法可以求得 DE 的长, 从而可以求得 AE 的长, 然后即可得到 $\cot \angle BAD$ 的值.

【解答】解: (1) 设 $AC = 3x$,

$$\because \angle C = 90^\circ, \sin \angle ABC = \frac{3}{5},$$

$$\therefore AB = 5x, BC = 4x,$$

$$\because \tan \angle DAC = \frac{2}{3},$$

$$\therefore CD = 2x,$$

$$\because BD = 4, BC = CD + BD,$$

$$\therefore 4x = 2x + 4,$$

解得 $x = 2$,

$$\therefore AC = 3x = 6;$$

(2) 作 $DE \perp AB$ 于点 E ,

由 (1) 知, $AB = 5x = 10$, $AC = 6$, $BD = 4$,

$$\therefore \frac{AB \cdot DE}{2} = \frac{BD \cdot AC}{2},$$

$$\therefore \frac{10 \times DE}{2} = \frac{4 \times 6}{2},$$

$$\text{解得 } DE = \frac{12}{5},$$

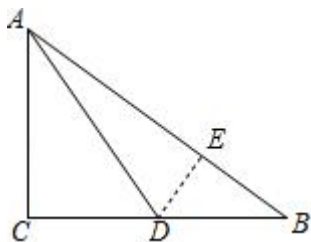
$$\because AC = 6, CD = 2x = 4, \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore AD = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13},$$

$$\therefore AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{(2\sqrt{13})^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{34}{5},$$

$$\therefore \cot \angle BAD = \frac{AE}{DE} = \frac{\frac{34}{5}}{\frac{12}{5}} = \frac{17}{6},$$

即 $\cot \angle BAD$ 的值是 $\frac{17}{6}$.

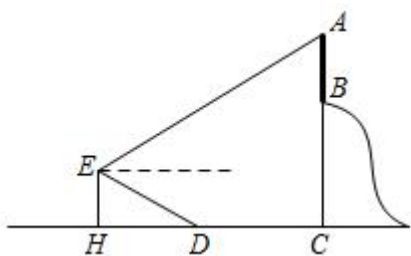


22. (10分) 如图, 垂直于水平面的 5G 信号塔 AB 建在垂直于水平面的悬崖边 B 点处 (点 A 、 B 、 C 在同一直线上). 某测量员从悬崖底 C 点出发沿水平方向前行 60 米到 D 点, 再沿斜坡 DE 方向前行 65 米到 E 点 (点 A 、 B 、 C 、 D 、 E 在同一平面内), 在点 E 处测得 5G 信号塔顶端 A 的仰角为 37° , 悬崖 BC 的高为 92 米, 斜坡 DE 的坡度 $i = 1:2.4$.

(1) 求斜坡 DE 的高 EH 的长;

(2) 求信号塔 AB 的高度.

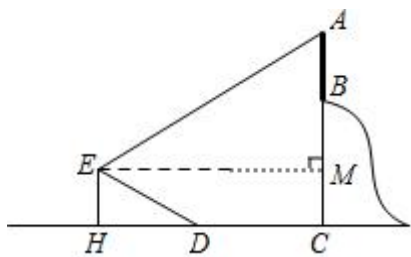
(参考数据: $\sin 37^\circ \approx 0.60$, $\cos 37^\circ \approx 0.80$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$.)



【分析】(1) 过点 E 作 $EM \perp DC$ 交 DC 的延长线于点 M , 根据斜坡 DE 的坡度 (或坡比) $i = 1:2.4$ 可设 $EH = x$, 则 $DH = 2.4x$, 利用勾股定理求出 x 的值, 进而可得出 EH ;

(2) 结合 (1) 得 DH 的长, 故可得出 CH 的长. 由矩形的判定定理得出四边形 $EHCM$ 是矩形, 故可得出 $EM = HC$, $CM = EH$, 再由锐角三角函数的定义求出 AM 的长, 进而可得出答案.

【解答】解: (1) 过点 E 作 $EM \perp AC$ 于点 M ,



$\because$ 斜坡 DE 的坡度 (或坡比) $i = 1:2.4$, $DE = 65$ 米, $CD = 60$ 米,

$\therefore$ 设 $EH = x$, 则 $DH = 2.4x$.

在 $\text{Rt}\triangle DEH$ 中,

$\because EH^2 + DH^2 = DE^2$, 即 $x^2 + (2.4x)^2 = 65^2$,

解得, $x = 25$ (米) (负值舍去),

$\therefore EH = 25$ 米;

答: 斜坡 DE 的高 EH 的长为 25 米;

(2) $\because DH = 2.4x = 60$ (米),

$$\therefore CH = DH + DC = 60 + 60 = 120 \text{ (米)}.$$

$$\because EM \perp AC, AC \perp CD, EH \perp CD,$$

$\therefore$ 四边形 $EHCM$ 是矩形,

$$\therefore EM = CH = 120 \text{ 米}, CM = EH = 25 \text{ 米}.$$

在 $\text{Rt}\triangle AEM$ 中,

$$\because \angle AEM = 37^\circ,$$

$$\therefore AM = EM \cdot \tan 37^\circ \approx 120 \times 0.75 = 90 \text{ (米)},$$

$$\therefore AC = AM + CM = 90 + 25 = 115 \text{ (米)}.$$

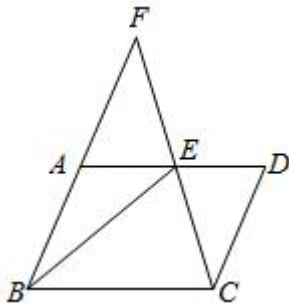
$$\therefore AB = AC - BC = 115 - 92 = 23 \text{ (米)}.$$

答: 信号塔 AB 的高度为 23 米.

23. (12 分) 如图, 已知在 $\square ABCD$ 中, E 是边 AD 上一点, 联结 BE 、 CE , 延长 BA 、 CE 相交于点 F , $CE^2 = DE \cdot BC$.

(1) 求证: $\angle EBC = \angle DCE$;

(2) 求证: $BE \cdot EF = BF \cdot AE$.



【分析】 (1) 通过证明 $\triangle DEC \sim \triangle ECB$, 可得结论;

(2) 通过证明 $\triangle ABE \sim \triangle EBF$, 可得 $\triangle ABE \sim \triangle EBF$, 可得结论.

【解答】 证明: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle BCE,$$

$$\because CE^2 = DE \cdot BC,$$

$$\therefore \frac{DE}{CE} = \frac{CE}{BC},$$

$$\therefore \triangle DEC \sim \triangle ECB,$$

$$\therefore \angle EBC = \angle DCE;$$

(2) $\because AD \parallel BC, AB \parallel CD,$

$$\therefore \angle AEB = \angle EBC, \quad \angle F = \angle ECD,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle F,$$

$$\text{又} \because \angle ABE = \angle EBF,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle EBF,$$

$$\therefore \frac{BE}{BF} = \frac{EF}{AE},$$

$$\therefore BE \cdot EF = BF \cdot AE.$$

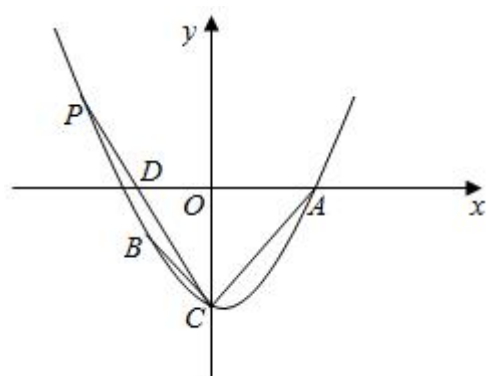
24. (12分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 2$ 经过点 $A(2, 0)$ 和 $B(-1, -1)$, 与 y 轴交于点 C .

(1) 求这个抛物线的表达式;

(2) 如果点 P 是抛物线位于第二象限上一点, PC 交 x 轴于点 D , $\frac{PD}{DC} = \frac{2}{3}$.

①求 P 点坐标;

②点 Q 在 x 轴上, 如果 $\angle QCA = \angle PCB$, 求点 Q 的坐标.



【分析】 (1) 由待定系数法可求解析式;

(2) ①过点 P 作 $PE \perp x$ 轴于 E , 由平行线分线段成比例可求 PE 的长, 代入解析式可求解;

②分两种情况讨论, 利用全等三角形的性质和相似三角形的性质可求解.

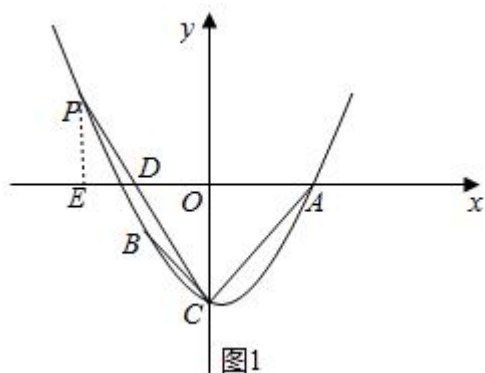
【解答】 解: (1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx - 2$ 经过点 $A(2, 0)$ 和 $B(-1, -1)$,

$$\therefore \begin{cases} -1 = a - b - 2 \\ 0 = 4a + 2b - 2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为: } y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 2;$$

(2) ①如图 1, 过点 P 作 $PE \perp x$ 轴于 E ,



$\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx - 2$ 与 y 轴交于点 C ,

$\therefore$ 点 $C(0, -2)$,

$\therefore OC = 2$,

$\because PE \parallel OC$,

$$\therefore \frac{PE}{OC} = \frac{PD}{DC} = \frac{2}{3} = \frac{ED}{DO},$$

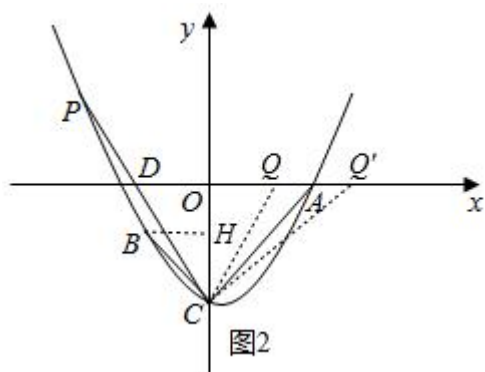
$$\therefore PE = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \frac{4}{3} = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 2,$$

$$\therefore x = -2 \text{ 或 } x = \frac{5}{2} \text{ (不合题意舍去)},$$

$$\therefore \text{点 } P\left(-2, \frac{4}{3}\right);$$

②如图 2, 过点 B 作 $BH \perp CO$ 于 H ,



$$\text{由①可知 } DO = \frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{5},$$

$\because B(-1, -1)$, 点 $C(0, -2)$, $A(2, 0)$

$\therefore OA = OC = 2$, $BH = CH = 1$,

$$\therefore \angle BCH = 45^\circ = \angle OCA,$$

$$\therefore \angle BCA = 90^\circ,$$

当点 Q 在线段 AO 上时,

$$\because \angle QCA = \angle PCB,$$

$$\therefore \angle DCO = \angle QCO,$$

$$\text{又} \because CO = CO, \angle DOC = \angle QOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle DOC \cong \triangle QOC \text{ (ASA)},$$

$$\therefore DO = QO = \frac{6}{5},$$

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 坐标为 } \left(\frac{6}{5}, 0\right),$$

当点 Q' 在射线 OA 上时,

$$\because \angle Q'CA = \angle PCB,$$

$$\therefore \angle DCQ' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDO + \angle DQ'C = 90^\circ, \angle DCO + \angle CDO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DQ'C = \angle DCO,$$

$$\text{又} \because \angle DOC = \angle Q'OC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle DOC \sim \triangle COQ',$$

$$\therefore \frac{DO}{CO} = \frac{CO}{Q'O},$$

$$\therefore 4 = \frac{6}{5} \times Q'O,$$

$$\therefore Q'O = \frac{10}{3},$$

$$\therefore \text{点 } Q' \left(\frac{10}{3}, 0\right),$$

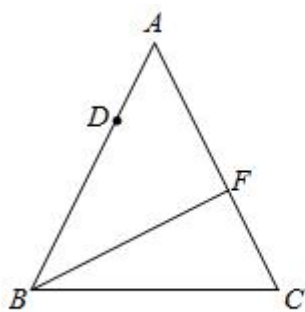
综上所述: 点 Q 坐标为 $\left(\frac{6}{5}, 0\right)$ 或 $\left(\frac{10}{3}, 0\right)$.

25. (14分) 如图, 已知在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5\sqrt{5}$, $\tan \angle ABC = 2$, $BF \perp AC$, 垂足为 F , 点 D 是边 AB 上一点 (不与 A, B 重合).

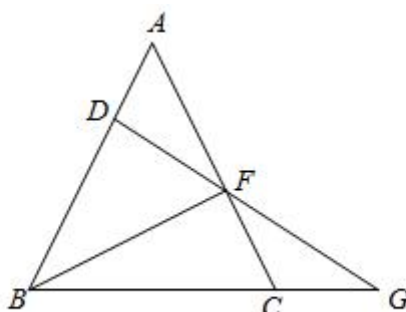
(1) 求边 BC 的长;

(2) 如图 2, 延长 DF 交 BC 的延长线于点 G , 如果 $CG = 4$, 求线段 AD 的长;

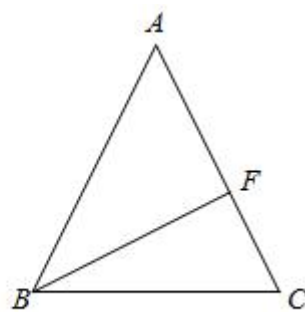
(3) 过点 D 作 $DE \perp BC$, 垂足为 E , DE 交 BF 于点 Q , 联结 DF , 如果 $\triangle DQF$ 和 $\triangle ABC$ 相似, 求线段 BD 的长.



(图 1)



(图 2)



(备用图)

【分析】(1) 先利用等腰三角形的性质判断出 $BC = 2BH$ ，再用三角函数和勾股定理求出 BH ，即可得出结论；

(2) 先利用勾股定理和三角函数求出 CF ，再判断出 $\triangle CFK \sim \triangle AFD$ 和 $\triangle CGK \sim \triangle BGD$ ，得出比例式，即可得出结论；

(3) 先求出 $BF = 4\sqrt{5}$ ，再判断出 $\triangle BEQ \sim \triangle BFC$ ，得出 $\frac{EQ}{BQ} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，设 $EQ = \sqrt{5}m$ ，则 $BQ = 5m$ ， $BE = 2\sqrt{5}m$ ，进而表示出 $BD = 10m$ ， $DQ = 3\sqrt{5}m$ ， $\angle DQF = \angle C$ ，再分两种情况，利用相似得出比例式表示出 FQ ，最后用 $BF = 4\sqrt{5}$ 建立方程求出 m ，即可得出结论。

【解答】解 (1) 如图 1，过点 A 作 $DH \perp BC$ 于 H ，

$$\therefore \angle AHB = 90^\circ,$$

$$\because AB = AC = 5\sqrt{5},$$

$$\therefore BC = 2BH,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AHB \text{ 中, } \tan \angle ABC = \frac{AH}{BH} = 2,$$

$$\therefore AH = 2BH,$$

根据勾股定理得， $AH^2 + BH^2 = AB^2$ ，

$$\therefore (2BH)^2 + BH^2 = (5\sqrt{5})^2,$$

$$\therefore BH = 5,$$

$$\therefore BC = 2BH = 10;$$

$$(2) \because AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB,$$

$$\because \tan \angle ABC = 2,$$

$$\therefore \tan \angle ACB = 2,$$

由 (1) 知， $BC = 10$ ，

$$\because BF \perp AC,$$

$$\therefore \angle BFC = 90^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BFC \text{ 中, } \tan \angle ACB = \frac{BF}{CF} = 2,$$

$$\therefore BF = 2CF,$$

$$\text{根据勾股定理得, } BF^2 + CF^2 = BC^2,$$

$$\therefore (2CF)^2 + CF^2 = 10^2,$$

$$\therefore CF = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore AF = AC - CF = 5\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5},$$

如图 2, 过点 C 作 $CK \parallel AB$ 交 FG 于 K ,

$$\therefore \triangle CFK \sim \triangle AFD,$$

$$\therefore \frac{CK}{AD} = \frac{CF}{AF},$$

$$\therefore \frac{CK}{AD} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \triangle CGK \sim \triangle BGD,$$

$$\therefore \frac{CK}{BD} = \frac{CG}{BG},$$

$$\therefore CG = 4,$$

$$\therefore \frac{CK}{BD} = \frac{4}{10+4} = \frac{2}{7},$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{3}{7},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{3}{10},$$

$$\therefore AD = \frac{3}{10}AB = \frac{3}{10} \times 5\sqrt{5} = \frac{3\sqrt{5}}{2};$$

(3) 如备用图,

$$\text{在 Rt}\triangle BFC \text{ 中, 根据勾股定理得, } BF = \sqrt{BC^2 - CF^2} = \sqrt{10^2 - (2\sqrt{5})^2} = 4\sqrt{5},$$

$$\because DE \perp BC,$$

$$\therefore \angle BEQ = 90^\circ = \angle BFC,$$

$$\because \angle EBQ = \angle FBC,$$

$$\therefore \triangle BEQ \sim \triangle BFC,$$

$$\therefore \frac{EQ}{CF} = \frac{BQ}{BC},$$

$$\because CF = 2\sqrt{5}, BC = 10,$$

$$\therefore \frac{EQ}{2\sqrt{5}} = \frac{BQ}{10},$$

$$\therefore \frac{EQ}{BQ} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \text{设 } EQ = \sqrt{5}m, \text{ 则 } BQ = 5m,$$

$$\text{根据勾股定理得, } BE = 2\sqrt{5}m,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BEQ \text{ 中, } \tan \angle ABC = \frac{DE}{BE} = 2,$$

$$\therefore DE = 2BE = 4\sqrt{5}m,$$

$$\text{根据勾股定理得, } BD = 10m,$$

$$\therefore DQ = DE - EQ = 3\sqrt{5}m,$$

$$\because DE \perp BC,$$

$$\therefore \angle BEQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBF + \angle BQE = 90^\circ,$$

$$\because \angle BQE = \angle DQF,$$

$$\therefore \angle CBF + \angle DQF = 90^\circ,$$

$$\because \angle BFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBF + \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DQF = \angle C,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle C = \angle DQF,$$

$$\because \triangle DQF \text{ 和 } \triangle ABC \text{ 相似,}$$

$$\therefore \text{①当 } \triangle DQF \sim \triangle ACB \text{ 时,}$$

$$\therefore \frac{DQ}{AC} = \frac{QF}{BC},$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{5}m}{5\sqrt{5}} = \frac{QF}{10},$$

$$\therefore QF = 6m,$$

$$\because BF = 4\sqrt{5},$$

$$\therefore 5m + 6m = 4\sqrt{5},$$

$$\therefore m = \frac{4\sqrt{5}}{11},$$

$$\therefore BD = 10m = \frac{40\sqrt{5}}{11},$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \triangle DQF \sim \triangle BCA \text{ 时, } \frac{DQ}{BC} = \frac{FQ}{AC},$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{5}m}{10} = \frac{FQ}{5\sqrt{5}},$$

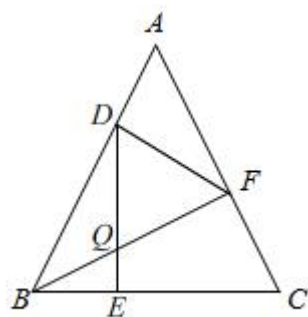
$$\therefore FQ = \frac{15}{2}m,$$

$$\therefore \frac{15}{2}m + 5m = 4\sqrt{5},$$

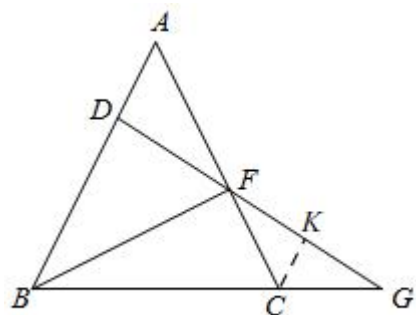
$$\therefore m = \frac{8\sqrt{5}}{25},$$

$$\therefore BD = 10m = \frac{16\sqrt{5}}{5},$$

即 BD 的长为 $\frac{40\sqrt{5}}{11}$ 或 $\frac{16\sqrt{5}}{5}$.



(备用图)



(图 2)

