

2017 年上海市青浦区中考数学一模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. (4 分) 在下列各数中，属于无理数的是 ()

- A. $4\frac{1}{2}$ B. $\sqrt{6}$ C. $\frac{22}{3}$ D. $\sqrt[3]{27}$

2. (4 分) 已知 $a > b$ ，下列关系式中一定正确的是 ()

- A. $a^2 < b^2$ B. $2a < 2b$ C. $a+2 < b+2$ D. $-a < -b$

3. (4 分) 一次函数 $y=kx-1$ (常数 $k < 0$) 的图象一定不经过的象限是 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

4. (4 分) 抛物线 $y=2x^2+4$ 与 y 轴的交点坐标是 ()

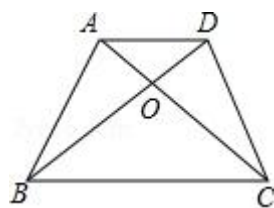
- A. (0, 2) B. (0, -2) C. (0, 4) D. (0, -4)

5. (4 分) 顺次连结矩形四边中点所得的四边形一定是 ()

- A. 菱形 B. 矩形 C. 正方形 D. 等腰梯形

6. (4 分) 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，

如果 $S_{\triangle ACD} : S_{\triangle ABC} = 1 : 2$ ，那么 $S_{\triangle AOD} : S_{\triangle BOC}$ 是 ()



- A. 1: 3 B. 1: 4 C. 1: 5 D. 1: 6

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. (4 分) 函数 $y = \frac{x}{x-1}$ 的定义域是_____.

8. (4 分) 方程 $\sqrt{3x-1} = 2$ 的根是_____.

9. (4 分) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有实数根，则 m 的取值范围

是_____.

10. (4分) 从点数为1、2、3的三张扑克牌中随机摸出两张牌, 摸到的两张牌的点数之积为素数的概率是_____.

11. (4分) 将抛物线 $y=x^2+4x$ 向下平移3个单位, 所得抛物线的表达式是_____.

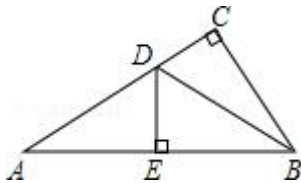
12. (4分) 如果点 $A(-2, y_1)$ 和点 $B(2, y_2)$ 是抛物线 $y=(x+3)^2$ 上的两点, 那么 y_1 _____ y_2 . (填“>”、“=”、“<”)

13. (4分) 如果一个多边形的内角和是它的外角和的2倍, 那么这个多边形的边数为_____.

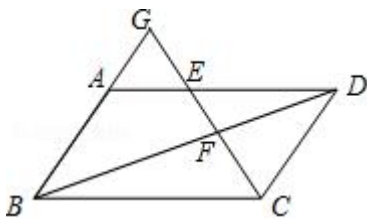
14. (4分) 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, $GD \parallel AB$, 交边 BC 于点 D , 如果 $BC=6$, 那么 CD 的长是_____.

15. (4分) 已知在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AC 上, 且 $AD:DC=2:1$. 设 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. 那么 $\overrightarrow{BD}=\rule{1cm}{0.4pt}$. (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示)

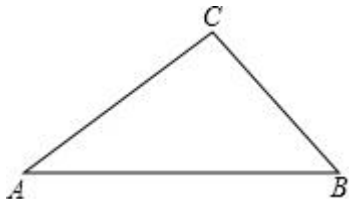
16. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=3$, $BC=2$, 边 AB 的垂直平分线交 AC 边于点 D , 交 AB 边于点 E , 联结 DB , 那么 $\tan \angle DBC$ 的值是_____.



17. (4分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 AD 上, 联结 CE 并延长, 交对角线 BD 于点 F , 交 BA 的延长线于点 G , 如果 $DE=2AE$, 那么 $CF:EF:EG=\rule{1cm}{0.4pt}$.



18. (4分) 如图, 已知 $\triangle ABC$, 将 $\triangle ABC$ 绕点A顺时针旋转, 使点C落在边AB上的点E处, 点B落在点D处, 连接BD, 如果 $\angle DAC = \angle DBA$, 那么 $\frac{BD}{AB}$ 的值是_____.



三、解答题: (本大题共7题, 满分78分)

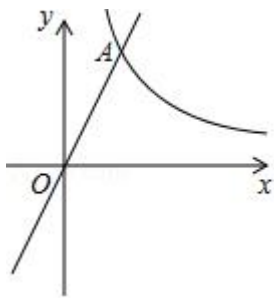
19. (10分) 计算: $\frac{2a}{a+1} \div (a-1) + \frac{a^2-1}{a^2+2a+1}$.

20. (10分) 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = 4, & \text{①} \\ x + y + 1 = 0, & \text{②} \end{cases}$$

21. (10分) 已知: 如图, 在平面直角坐标系xOy中, 反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 的图象与正比例函数 $y = kx$ ($k \neq 0$) 的图象相交于横坐标为2的点A, 平移直线OA, 使它经过点B (3, 0), 与y轴交于点C.

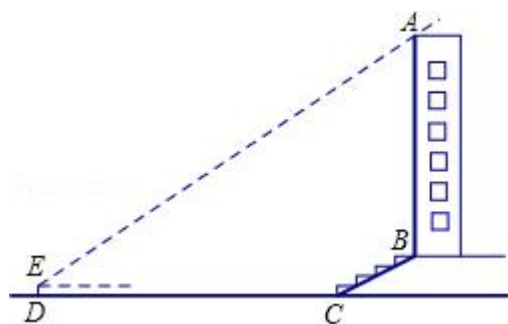
(1) 求平移后直线的表达式;

(2) 求 $\angle OBC$ 的余切值.



22. (10分) 某校兴趣小组想测量一座大楼AB的高度. 如图, 大楼前有一段斜坡BC, 已知BC的长为12米, 它的坡度*i* = 1: $\sqrt{3}$. 在离C点40米的D处, 用测角仪测得大楼顶端A的仰角为 37° , 测角仪DE的高为1.5米, 求大楼AB的高度约为多少米? (结果精确到0.1米)

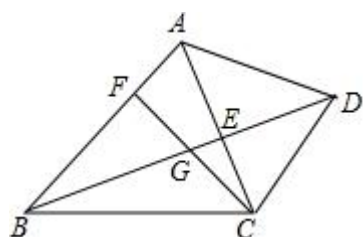
(参考数据: $\sin 37^\circ \approx 0.60$, $\cos 37^\circ \approx 0.80$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$, $\sqrt{3} \approx 1.73$.)



23. (12 分) 已知: 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 对角线 AC 、 BD 交于点 E , 点 F 在边 AB 上, 连接 CF 交线段 BE 于点 G , $CG^2 = GE \cdot GD$.

(1) 求证: $\angle ACF = \angle ABD$;

(2) 连接 EF , 求证: $EF \cdot CG = EG \cdot CB$.

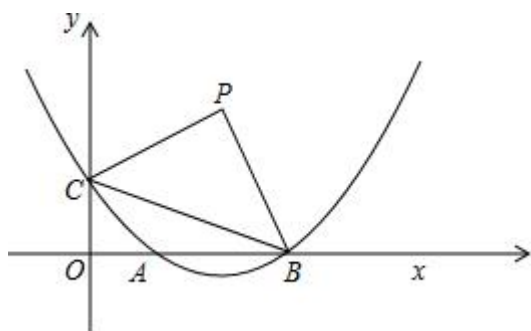


24. (12 分) 已知: 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 - 4ax + 1$ 与 x 轴的正半轴交于点 A 和点 B , 与 y 轴交于点 C , 且 $OB = 3OC$, 点 P 是第一象限内的点, 连接 BC , $\triangle PBC$ 是以 BC 为斜边的等腰直角三角形.

(1) 求这个抛物线的表达式;

(2) 求点 P 的坐标;

(3) 点 Q 在 x 轴上, 若以 Q 、 O 、 P 为顶点的三角形与以点 C 、 A 、 B 为顶点的三角形相似, 求点 Q 的坐标.



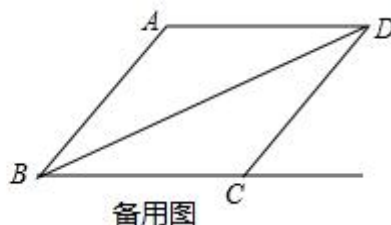
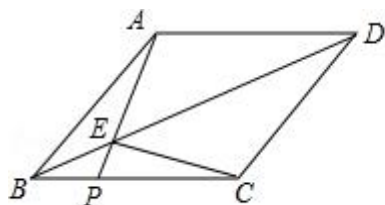
25. (14 分) 已知: 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB=5$, 联结 BD , $\sin \angle ABD = \frac{\sqrt{5}}{5}$. 点

P 是射线 BC 上的一个动点 (点 P 不与点 B 重合), 联结 AP , 与对角线 BD 相交于点 E , 联结 EC .

(1) 求证: $AE=CE$;

(2) 当点 P 在线段 BC 上时, 设 $BP=x$, $\triangle PEC$ 的面积为 y , 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出它的定义域;

(3) 当点 P 在线段 BC 的延长线上时, 若 $\triangle PEC$ 是直角三角形, 求线段 BP 的长.



2017 年上海市青浦区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)

1. (4 分) 在下列各数中，属于无理数的是 ()

A. $4\frac{1}{2}$

B. $\sqrt{6}$

C. $\frac{22}{3}$

D. $\sqrt[3]{27}$

【考点】26：无理数；2F：分数指数幂.

【分析】根据无理数的定义，可得答案.

【解答】解： $4\frac{1}{2}=2$ ， $\frac{22}{3}$ ， $\sqrt[3]{27}$ 是有理数，

$\sqrt{6}$ 是无理数，

故选：B.

【点评】此题主要考查了无理数的定义，其中初中范围内学习的无理数有： π ， 2π 等；开方开不尽的数；以及像 0.1010010001...，等有这样规律的数.

2. (4 分) 已知 $a > b$ ，下列关系式中一定正确的是 ()

A. $a^2 < b^2$

B. $2a < 2b$

C. $a+2 < b+2$

D. $-a < -b$

【考点】C2：不等式的性质.

【分析】根据不等式的性质分别进行判断，即可求出答案.

【解答】解：A， $a^2 < b^2$ ， 错误，例如： $2 > -1$ ， 则 $2^2 > (-1)^2$ ；

B、若 $a > b$ ， 则 $2a > 2b$ ， 故本选项错误；

C、若 $a > b$ ， 则 $a+2 > b+2$ ， 故本选项错误；

D、若 $a > b$ ， 则 $-a < -b$ ， 故本选项正确；

故选：D.

【点评】此题考查了不等式的性质，掌握不等式的性质是解题的关键，不等式的基本性质：（1）不等式两边加（或减）同一个数（或式子），不等号的方向不变．（2）不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变．（3）不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变．

3. （4分）一次函数 $y=kx-1$ （常数 $k<0$ ）的图象一定不经过的象限是（ ）
- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【考点】F3：一次函数的图象；F5：一次函数的性质．

【分析】一次函数 $y=kx-1$ （常数 $k<0$ ）的图象一定经过第二、三，四象限，不经过第一象限．

【解答】解：∵一次函数 $y=kx-1$ （常数 $k<0$ ）， $b=-1<0$ ，

∴一次函数 $y=kx-1$ （常数 $k<0$ ）的图象一定经过第二、三，四象限，不经过第一象限．

故选：A．

【点评】本题主要考查了函数图象上的点与图象的关系，图象上的点满足解析式，满足解析式的点在函数图象上．并且本题还考查了一次函数的性质，都是需要熟记的内容．

4. （4分）抛物线 $y=2x^2+4$ 与 y 轴的交点坐标是（ ）
- A. (0, 2) B. (0, -2) C. (0, 4) D. (0, -4)

【考点】H5：二次函数图象上点的坐标特征．

【分析】要求抛物线与 y 轴的交点坐标，即要令 x 等于 0，代入抛物线的解析式求出对应的 y 值，写成坐标形式即可．

【解答】解：把 $x=0$ 代入抛物线 $y=2x^2+4$ 中，

解得： $y=4$ ，

则抛物线 $y=2x^2+4$ 与 y 轴的交点坐标是 (0, 4)．

故选：C.

【点评】此题考查学生会求函数图象与坐标轴的交点坐标，即要求函数与 x 轴交点坐标就要令 $y=0$ ，要求函数与 y 轴的交点坐标就要令 $x=0$ ，是学生必须掌握的基本题型.

5. (4 分) 顺次连结矩形四边中点所得的四边形一定是 ()

- A. 菱形 B. 矩形 C. 正方形 D. 等腰梯形

【考点】LN: 中点四边形.

【分析】因为题中给出的条件是中点，所以可利用三角形中位线性质，以及矩形对角线相等去证明四条边都相等，从而说明是一个菱形.

【解答】解：连接 AC、BD，

在 $\triangle ABD$ 中，

$$\therefore AH=HD, AE=EB$$

$$\therefore EH=\frac{1}{2}BD,$$

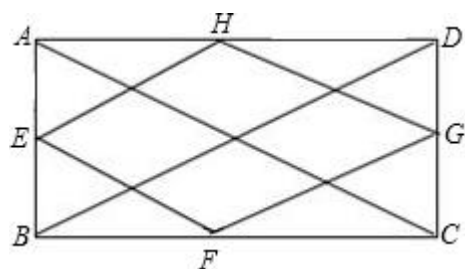
$$\text{同理 } FG=\frac{1}{2}BD, HG=\frac{1}{2}AC, EF=\frac{1}{2}AC,$$

又 $\therefore$ 在矩形 ABCD 中， $AC=BD$ ，

$$\therefore EH=HG=GF=FE,$$

$\therefore$ 四边形 EFGH 为菱形.

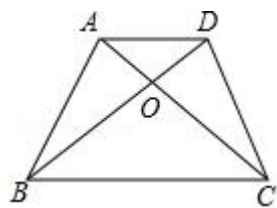
故选：A.



【点评】本题考查了菱形的判定，菱形的判别方法是说明一个四边形为菱形的理论依据，常用三种方法：①定义，②四边相等，③对角线互相垂直平分.

6. (4分) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O ,

如果 $S_{\triangle ACD} : S_{\triangle ABC} = 1 : 2$, 那么 $S_{\triangle AOD} : S_{\triangle BOC}$ 是 ()



A. 1: 3

B. 1: 4

C. 1: 5

D. 1: 6

【考点】LH: 梯形; S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】17: 推理填空题.

【分析】首先根据 $S_{\triangle ACD} : S_{\triangle ABC} = 1 : 2$, 可得 $AD : BC = 1 : 2$; 然后根据相似三角形的面积的比的等于它们的相似比的平方, 求出 $S_{\triangle AOD} : S_{\triangle BOC}$ 是多少即可.

【解答】解: $\because$ 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 而且 $S_{\triangle ACD} : S_{\triangle ABC} = 1 : 2$,

$\therefore AD : BC = 1 : 2$;

$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \triangle AOD \sim \triangle BOC$,

$\because AD : BC = 1 : 2$,

$\therefore S_{\triangle AOD} : S_{\triangle BOC} = 1 : 4$.

故选: B.

【点评】此题主要考查了相似三角形的判定与性质的应用, 以及梯形的特征和应用, 要熟练掌握.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4分) 函数 $y = \frac{x}{x-1}$ 的定义域是 $x \neq 1$.

【考点】E4: 函数自变量的取值范围.

【分析】根据分母不等于 0 列不等式求解即可.

【解答】解：由题意得， $x - 1 \neq 0$ ，

解得 $x \neq 1$ ．

故答案为： $x \neq 1$ ．

【点评】本题考查了函数自变量的范围，一般从三个方面考虑：（1）当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数；（2）当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为0；

（3）当函数表达式是二次根式时，被开方数非负．

8. （4分）方程 $\sqrt{3x-1}=2$ 的根是 $x=\frac{5}{3}$ ．

【考点】AG：无理方程．

【分析】两边平方得出 $3x - 1 = 4$ ，求出即可．

【解答】解： $\because \sqrt{3x-1}=2$ ，

$$\therefore 3x - 1 = 4,$$

$$\therefore x = \frac{5}{3},$$

经检验 $x = \frac{5}{3}$ 是原方程组的解，

故答案为： $x = \frac{5}{3}$ ．

【点评】本题考查了解无理方程，能把无理方程转化成有理方程是解此题的关键．

9. （4分）若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有实数根，则 m 的取值范围是 $m \leq 1$ ．

【考点】AA：根的判别式．

【分析】方程有实数根即 $\Delta \geq 0$ ，根据 Δ 建立关于 m 的不等式，求 m 的取值范围．

【解答】解：由题意知， $\Delta = 4 - 4m \geq 0$ ，

$$\therefore m \leq 1$$

答: m 的取值范围是 $m \leq 1$.

【点评】 总结: 一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系:

(1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根;

(2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根;

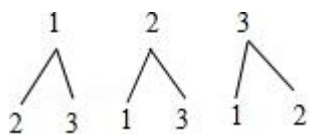
(3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根.

10. (4 分) 从点数为 1、2、3 的三张扑克牌中随机摸出两张牌, 摸到的两张牌的点数之积为素数的概率是 $\frac{2}{3}$.

【考点】 X6: 列表法与树状图法.

【分析】 首先画树状图, 然后由树状图求得所有等可能的结果与摸到的两张牌的点数之和为素数的情况, 再利用概率公式求解即可求得答案.

【解答】 解: 画树状图如下:



一共有 6 种等可能结果, 其中和为素数的有 4 种,

$\therefore$ 点数之积为素数的概率是 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$,

故答案为: $\frac{2}{3}$.

【点评】 本题考查的是用列表法或画树状图法求概率. 注意列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果, 列表法适合于两步完成的事件, 树状图法适合两步或两步以上完成的事件. 注意概率 = 所求情况数与总情况数之比.

11. (4 分) 将抛物线 $y = x^2 + 4x$ 向下平移 3 个单位, 所得抛物线的表达式是 $y = x^2 + 4x - 3$.

【考点】 H6: 二次函数图象与几何变换.

【分析】 根据向下平移, 纵坐标要减去 3, 即可得到答案.

【解答】解：∵抛物线 $y=x^2+4x$ 向下平移 3 个单位，

∴抛物线的解析式为 $y=x^2+4x-3$ ，

故答案为 $y=x^2+4x-3$ 。

【点评】本题考查了二次函数的图象与几何变换，向下平移 $|a|$ 个单位长度纵坐标要减 $|a|$ 。

12. (4 分) 如果点 A (- 2, y_1) 和点 B (2, y_2) 是抛物线 $y=(x+3)^2$ 上的两点，那么 y_1 < y_2 . (填“>”、“=”、“<”)

【考点】H5: 二次函数图象上点的坐标特征.

【分析】把点 A、B 的横坐标代入函数解析式分别求出函数值即可得解.

【解答】解：当 $x=-2$ 时， $y_1=(-2+3)^2=1$ ，

当 $x=2$ 时， $y_2=(2+3)^2=25$ ，

$y_1 < y_2$ ，

故答案为 <。

【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征，根据函数图象上的点满足函数解析式求出相应的函数值是解题的关键.

13. (4 分) 如果一个多边形的内角和是它的外角和的 2 倍，那么这个多边形的边数为 6。

【考点】L3: 多边形内角与外角.

【分析】多边形的外角和是 360° ，内角和是它的外角和的 2 倍，则内角和是 $2 \times 360=720$ 度. n 边形的内角和可以表示成 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ，设这个多边形的边数是 n ，就得到方程，从而求出边数.

【解答】解：设这个多边形的边数为 n ，

∴ n 边形的内角和为 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ，多边形的外角和为 360° ，

$$\therefore (n-2) \cdot 180^\circ = 360^\circ \times 2,$$

解得 $n=6$.

$\therefore$ 此多边形的边数为 6.

故答案为: 6.

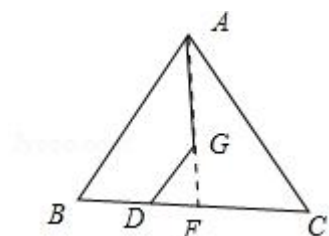
【点评】 本题主要考查了根据正多边形的外角和求多边形的边数, 这是常用的一种方法, 需要熟记.

14. (4 分) 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, $GD \parallel AB$, 交边 BC 于点 D, 如果 $BC=6$, 那么 CD 的长是 4.

【考点】 JA: 平行线的性质; K5: 三角形的重心.

【分析】 根据三角形的重心到顶点的距离等于到对边中点的距离的 2 倍解答即可.

【解答】 解: 延长 AG 交 BC 与 F,



$\therefore$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, $BC=6$,

$$\therefore BF=3,$$

$\therefore$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore AG: GF=2: 1,$$

$$\therefore GD \parallel AB,$$

$$\therefore BD: DF=DG: GF=2: 1,$$

$$\therefore BD=2, DF=1,$$

$$\therefore CD=3+1=4,$$

故答案为：4

【点评】本题考查了三角形的重心，熟记三角形的重心到顶点的距离等于到对边中点的距离的2倍是解题的关键.

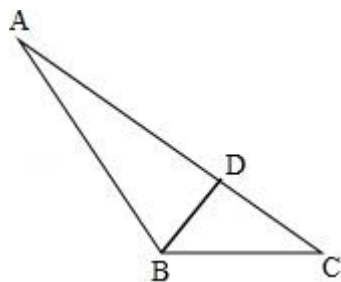
15. (4分) 已知在 $\triangle ABC$ 中，点D在边AC上，且AD:DC=2:1. 设 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. 那么 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$. (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示)

【考点】LM: *平面向量.

【专题】17: 推理填空题.

【分析】由 $\frac{AD}{DC}=2$ 得 $\frac{AD}{AC}=\frac{2}{3}$, 即 $AD=\frac{2}{3}AC$, 在根据 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})+\overrightarrow{BA}$ 可得答案.

【解答】解: 如图,



$$\therefore \frac{AD}{DC}=2,$$

$$\therefore \frac{AD}{AC}=\frac{2}{3}, \text{ 即 } AD=\frac{2}{3}AC,$$

$$\text{则 } \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}$$

$$=\frac{2}{3}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})+\overrightarrow{BA}$$

$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$$

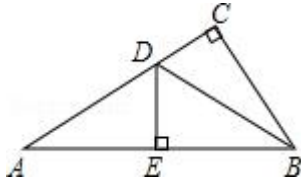
$$=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b},$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}.$$

【点评】本题主要考查平面向量，注意掌握三角形法则的应用，注意掌握数形结

合思想的应用.

16. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=3$, $BC=2$, 边 AB 的垂直平分线交 AC 边于点 D , 交 AB 边于点 E , 联结 DB , 那么 $\tan \angle DBC$ 的值是 $\frac{5}{12}$.



【考点】KG: 线段垂直平分线的性质; T7: 解直角三角形.

【专题】11: 计算题; 554: 等腰三角形与直角三角形.

【分析】由 DE 垂直平分 AB , 得到 $AD=BD$, 设 $CD=x$, 则有 $BD=AD=3-x$, 在直角三角形 BCD 中, 利用勾股定理求出 x 的值, 确定出 CD 的长, 利用锐角三角函数定义求出所求即可.

【解答】解: $\because$ 边 AB 的垂直平分线交 AC 边于点 D , 交 AB 边于点 E ,

$\therefore AD=BD$,

设 $CD=x$, 则有 $BD=AD=AC-CD=3-x$,

在 $Rt\triangle BCD$ 中, 根据勾股定理得: $(3-x)^2=x^2+2^2$,

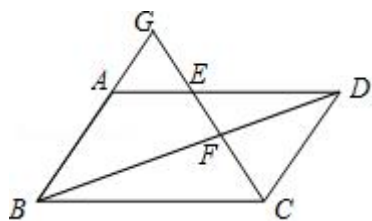
解得: $x=\frac{5}{6}$,

则 $\tan \angle DBC=\frac{CD}{BC}=\frac{5}{12}$,

故答案为: $\frac{5}{12}$

【点评】此题考查了解直角三角形, 以及线段垂直平分线性质的性质, 熟练掌握性质及定理是解本题的关键.

17. (4分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 AD 上, 联结 CE 并延长, 交对角线 BD 于点 F , 交 BA 的延长线于点 G , 如果 $DE=2AE$, 那么 $CF: EF: EG=$ 6: 4: 5.



【考点】L5：平行四边形的性质；S9：相似三角形的判定与性质.

【分析】设 $AE=x$ ，则 $DE=2x$ ，由四边形 $ABCD$ 是平行四边形得

$BC=AD=AE+DE=3x$ ， $AD \parallel BC$ ，证 $\triangle GAE \sim \triangle GBC$ 、 $\triangle DEF \sim \triangle BCF$ 得

$\frac{GE}{GC} = \frac{AE}{BC} = \frac{1}{3}$ 、 $\frac{EF}{CF} = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$ ，即 $\frac{GE}{CE} = \frac{1}{2}$ ，设 $EF=2y$ ，则 $CF=3y$ 、 $GE=\frac{5}{2}y$ ，从而得出答案.

【解答】解：设 $AE=x$ ，则 $DE=2x$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore BC=AD=AE+DE=3x$ ， $AD \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle GAE \sim \triangle GBC$ ， $\triangle DEF \sim \triangle BCF$ ，

$$\therefore \frac{GE}{GC} = \frac{AE}{BC} = \frac{1}{3}, \quad \frac{EF}{CF} = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{GE}{CE} = \frac{1}{2},$$

设 $EF=2y$ ，则 $CF=3y$ ，

$$\therefore EC=EF+CF=5y,$$

$$\therefore GE=\frac{5}{2}y,$$

则 $CF: EF: EG=3y: 2y: \frac{5}{2}y=6: 4: 5$ ，

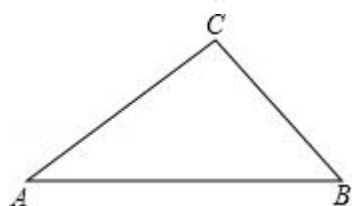
故答案为：6：4：5.

【点评】本题主要考查相似三角形的判定与性质及平行四边形的性质，熟练掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.

18. (4 分) 如图，已知 $\triangle ABC$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转，使点 C 落在边

AB 上的点 E 处，点 B 落在点 D 处，连接 BD ，如果 $\angle DAC = \angle DBA$ ，那么 $\frac{BD}{AB}$

的值是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



【考点】R2: 旋转的性质.

【分析】由旋转的性质得到 $AB=AD$, $\angle CAB=\angle DAB$, 根据三角形的内角和得到 $\angle ABD=\angle ADB=72^\circ$, $\angle BAD=36^\circ$, 过 D 作 $\angle ADB$ 的平分线 DF 推出 $\triangle ABD \sim \triangle DBF$, 解方程即可得到结论.

【解答】解: 如图, 由旋转的性质得到 $AB=AD$, $\angle CAB=\angle DAB$,

$$\therefore \angle ABD=\angle ADB,$$

$$\because \angle CAD=\angle ABD,$$

$$\therefore \angle ABD=\angle ADB=2\angle BAD,$$

$$\because \angle ABD+\angle ADB+\angle BAD=180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD=\angle ADB=72^\circ, \angle BAD=36^\circ,$$

过 D 作 $\angle ADB$ 的平分线 DF,

$$\therefore \angle ADF=\angle BDF=\angle FAD=36^\circ,$$

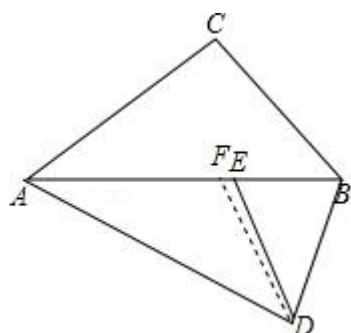
$$\therefore \angle BFD=72^\circ, \therefore AF=DF=BD,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DBF,$$

$$\therefore \frac{BD}{AB}=\frac{BF}{BD}, \text{ 即 } \frac{BD}{AB}=\frac{AB-BD}{BD},$$

$$\text{解得 } \frac{BD}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$



【点评】 本题考查了旋转的性质，相似三角形的判定和性质，等腰三角形的判定和性质，正确的作出辅助线是解题的关键.

三、解答题：(本大题共 7 题，满分 78 分)

19. (10 分) 计算： $\frac{2a}{a+1} \div (a-1) + \frac{a^2-1}{a^2+2a+1}$.

【考点】 6C：分式的混合运算.

【分析】 结合分式混合运算的运算法则进行求解即可.

【解答】 解：原式 $= \frac{2a}{a+1} \times \frac{1}{a-1} + \frac{(a-1)(a+1)}{(a+1)^2}$

$$= \frac{2a}{(a+1)(a-1)} + \frac{a-1}{a+1}$$

$$= \frac{2a}{(a+1)(a-1)} + \frac{(a-1)^2}{(a+1)(a-1)}$$

$$= \frac{a^2+1}{a^2-1}.$$

【点评】 本题考查了分式的混合运算，解答本题的关键在于熟练掌握分式混合运算的运算法则.

20. (10 分) 解方程组： $\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=4, & \text{①} \\ x+y+1=0, & \text{②} \end{cases}$.

【考点】 AF：高次方程.

【分析】 由①得出 $x-2y=2$ 或 $x-2y=-2$ ，原方程组转化成两个二元一次方程组，求出方程组的解即可.

【解答】 解：由①得： $x-2y=2$ 或 $x-2y=-2$.

原方程可化为 $\begin{cases} x-2y=2 \\ x+y=-1. \end{cases}$, $\begin{cases} x-2y=-2 \\ x+y=-1. \end{cases}$

解得，原方程的解是 $\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=-1 \end{cases}, \begin{cases} x_2=-\frac{4}{3} \\ y_2=\frac{1}{3} \end{cases}$.

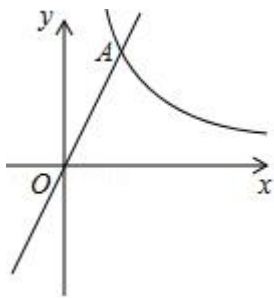
【点评】 本题考查了解高次方程组，能把高次方程组转化成二元一次方程组是解此题的关键.

21. (10 分) 已知：如图，在平面直角坐标系 xOy 中，反比例函数 $y=\frac{8}{x}$ 的图象

与正比例函数 $y=kx$ ($k \neq 0$) 的图象相交于横坐标为 2 的点 A，平移直线 OA，使它经过点 B (3, 0)，与 y 轴交于点 C.

(1) 求平移后直线的表达式；

(2) 求 $\angle OBC$ 的余切值.



【考点】 G8：反比例函数与一次函数的交点问题；Q3：坐标与图形变化 - 平移；

T7：解直角三角形.

【分析】 (1) 根据点 A 在反比例函数图象上可求出点 A 的坐标，进而可求出正比例函数表达式，根据平移的性质可设直线 BC 的函数解析式为 $y=2x+b$ ，根据点 B 的坐标利用待定系数法即可求出 b 值，此题得解；

(2) 利用一次函数图象上点的坐标特征即可求出点 C 的坐标，从而得出 OC 的值，再根据余切的定义即可得出结论.

【解答】 解：(1) 当 $x=2$ 时， $y=\frac{8}{2}=4$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 (2, 4).

$\therefore$ A (2, 4) 在 $y=kx$ ($k \neq 0$) 的图象上,

$$\therefore 4=2k, \text{ 解得: } k=2.$$

设直线 BC 的函数解析式为 $y=2x+b$,

$$\therefore \text{点 B 的坐标为 } (3, 0),$$

$$\therefore 0=2 \times 3+b, \text{ 解得: } b=-6,$$

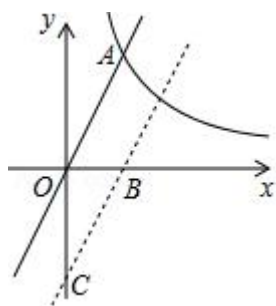
$$\therefore \text{平移后直线的表达式 } y=2x-6.$$

$$(2) \text{ 当 } x=0 \text{ 时, } y=-6,$$

$$\therefore \text{点 C 的坐标为 } (0, -6),$$

$$\therefore OC=6.$$

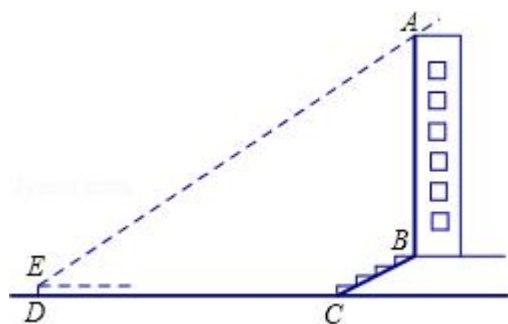
$$\therefore \cot \angle OBC = \frac{OB}{OC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$



【点评】 本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题、一次函数图象上点的坐标特征以及解直角三角形，根据点 B 的坐标利用待定系数法求出直线 BC 的解析式是解题的关键.

22. (10 分) 某校兴趣小组想测量一座大楼 AB 的高度. 如图, 大楼前有一段斜坡 BC, 已知 BC 的长为 12 米, 它的坡度 $i=1:\sqrt{3}$. 在离 C 点 40 米的 D 处, 用测角仪测得大楼顶端 A 的仰角为 37° , 测角仪 DE 的高为 1.5 米, 求大楼 AB 的高度约为多少米? (结果精确到 0.1 米)

(参考数据: $\sin 37^\circ \approx 0.60$, $\cos 37^\circ \approx 0.80$, $\tan 37^\circ \approx 0.75$, $\sqrt{3} \approx 1.73$.)



【考点】T9：解直角三角形的应用－坡度坡角问题；TA：解直角三角形的应用－仰角俯角问题.

【分析】延长 AB 交直线 DC 于点 F，过点 E 作 $EH \perp AF$ ，垂足为点 H，在 $\text{Rt}\triangle BCF$ 中利用坡度的定义求得 CF 的长，则 DF 即可求得，然后在直角 $\triangle AEH$ 中利用三角函数求得 AF 的长，进而求得 AB 的长.

【解答】解：延长 AB 交直线 DC 于点 F，过点 E 作 $EH \perp AF$ ，垂足为点 H.

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle BCF \text{ 中, } \frac{BF}{CF} = i = 1 : \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{设 } BF = k, \text{ 则 } CF = \sqrt{3}k, BC = 2k.$$

$$\text{又 } \because BC = 12,$$

$$\therefore k = 6,$$

$$\therefore BF = 6, CF = 6\sqrt{3}.$$

$$\therefore DF = DC + CF,$$

$$\therefore DF = 40 + 6\sqrt{3}.$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle AEH \text{ 中, } \tan \angle AEH = \frac{AH}{EH},$$

$$\therefore AH = \tan 37^\circ \times (40 + 6\sqrt{3}) \approx 37.785 \text{ (米)},$$

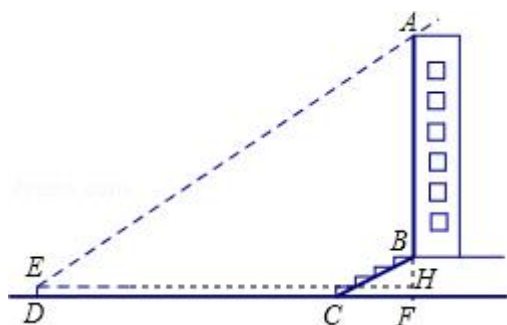
$$\therefore BH = BF - FH,$$

$$\therefore BH = 6 - 1.5 = 4.5.$$

$$\therefore AB = AH - HB,$$

$$\therefore AB = 37.785 - 4.5 \approx 33.3.$$

答：大楼 AB 的高度约为 33.3 米.

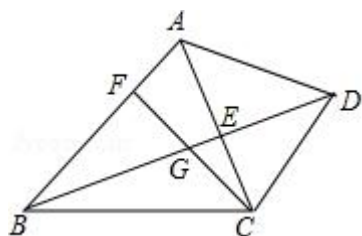


【点评】 本题考查了解直角三角形的应用，关键是根据仰角构造直角三角形，利用三角函数求解，注意利用两个直角三角形的公共边求解是解答此类题型的常用方法.

23. (12 分) 已知：如图，在四边形 ABCD 中， $AB \parallel CD$ ，对角线 AC、BD 交于点 E，点 F 在边 AB 上，连接 CF 交线段 BE 于点 G， $CG^2 = GE \cdot GD$.

(1) 求证： $\angle ACF = \angle ABD$;

(2) 连接 EF，求证： $EF \cdot CG = EG \cdot CB$.



【考点】 S9：相似三角形的判定与性质.

【分析】 (1) 先根据 $CG^2 = GE \cdot GD$ 得出 $\frac{CG}{GE} = \frac{GD}{CG}$ ，再由 $\angle CGD = \angle EGC$ 可知 $\triangle GCD \sim \triangle GEC$ ， $\angle GDC = \angle GCE$. 根据 $AB \parallel CD$ 得出 $\angle ABD = \angle BDC$ ，故可得出结论；

(2) 先根据 $\angle ABD = \angle ACF$ ， $\angle BGF = \angle CGE$ 得出 $\triangle BGF \sim \triangle CGE$ ，故 $\frac{FG}{BG} = \frac{EG}{CG}$. 再由 $\angle FGE = \angle BGC$ 得出 $\triangle FGE \sim \triangle BGC$ ，进而可得出结论.

【解答】 证明：(1) $\because CG^2 = GE \cdot GD$,

$$\therefore \frac{CG}{GE} = \frac{GD}{CG}.$$

又 $\because \angle CGD = \angle EGC$,

$$\therefore \triangle GCD \sim \triangle GEC.$$

$$\therefore \angle GDC = \angle GCE.$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle BDC.$$

$$\therefore \angle ACF = \angle ABD.$$

$$(2) \because \angle ABD = \angle ACF, \angle BGF = \angle CGE,$$

$$\therefore \triangle BGF \sim \triangle CGE.$$

$$\therefore \frac{FG}{BG} = \frac{EG}{CG}.$$

又 $\because \angle FGE = \angle BGC$,

$$\therefore \triangle FGE \sim \triangle BGC.$$

$$\therefore \frac{FE}{BC} = \frac{EG}{CG}.$$

$$\therefore FE \cdot CG = EG \cdot CB.$$

【点评】 本题考查的是相似三角形的判定与性质，熟知相似三角形的判定定理是解答此题的关键.

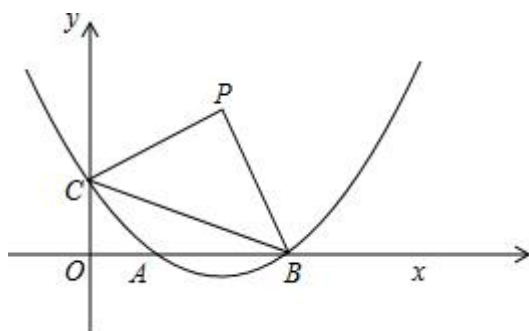
24. (12 分) 已知：如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 - 4ax + 1$ 与 x 轴的正半轴交于点 A 和点 B ，与 y 轴交于点 C ，且 $OB = 3OC$ ，点 P 是第一象限内的点，连接 BC ， $\triangle PBC$ 是以 BC 为斜边的等腰直角三角形.

(1) 求这个抛物线的表达式；

(2) 求点 P 的坐标；

(3) 点 Q 在 x 轴上，若以 Q 、 O 、 P 为顶点的三角形与以点 C 、 A 、 B 为顶点的

三角形相似，求点 Q 的坐标.



【考点】SO：相似形综合题.

【分析】(1) 利用待定系数法即可得出结论；

(2) 先判断出 $\triangle PMC \cong \triangle PNB$ ，再用 $PC^2 = PB^2$ ，建立方程求解即可；

(3) 先判断出点 Q 只能在点 O 左侧，再分两种情况讨论计算即可.

【解答】解：(1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 - 4ax + 1$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 (0, 1).

$\because OB = 3OC$,

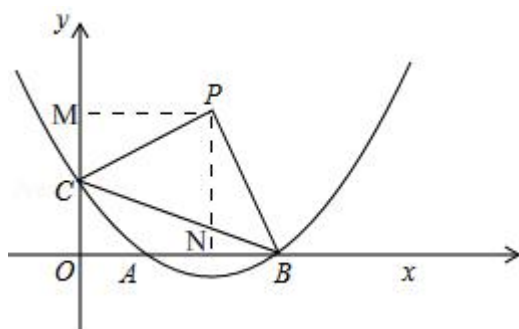
$\therefore$ 点 B 的坐标为 (3, 0).

$\therefore 9a - 12a + 1 = 0$,

$\therefore a = \frac{1}{3}$.

$\therefore y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1$.

(2) 如图,



过点 P 作 $PM \perp y$ 轴, $PN \perp x$ 轴, 垂足分别为点 M、N.

$$\therefore \angle MPC = 90^\circ - \angle CPN, \quad \angle NPB = 90^\circ - \angle CPN,$$

$$\therefore \angle MPC = \angle NPB.$$

$$\text{在 } \triangle PCM \text{ 和 } \triangle PBN \text{ 中, } \begin{cases} \angle PMC = \angle PNB \\ \angle MPC = \angle NPB, \\ PC = PB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle PMC \cong \triangle PNB,$$

$$\therefore PM = PN.$$

设点 P (a, a).

$$\therefore PC^2 = PB^2,$$

$$\therefore a^2 + (a - 1)^2 = (a - 3)^2 + a^2.$$

解得 a=2.

$$\therefore P (2, 2).$$

(3) $\therefore$ 该抛物线对称轴为 x=2, B (3, 0),

$$\therefore A (1, 0).$$

$$\therefore P (2, 2), A (1, 0), B (3, 0), C (0, 1),$$

$$\therefore PO = 2\sqrt{2}, AC = 2\sqrt{2}, AB = 2.$$

$$\therefore \angle CAB = 135^\circ, \quad \angle POB = 45^\circ,$$

$$\text{在 Rt} \triangle BOC \text{ 中, } \tan \angle OBC = \frac{OC}{OB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \angle OBC \neq 45^\circ, \quad \angle OCB < 90^\circ,$$

在 Rt△OAC 中, OC=OA,

$$\therefore \angle OCA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB < 45^\circ,$$

$\therefore$ 当△OPQ 与△ABC 相似时, 点 Q 只有在点 O 左侧时.

$$(i) \text{ 当 } \frac{AC}{AB} = \frac{OP}{OQ} \text{ 时, } \therefore \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{OQ},$$

$$\therefore OQ=4,$$

$$\therefore Q(-4, 0).$$

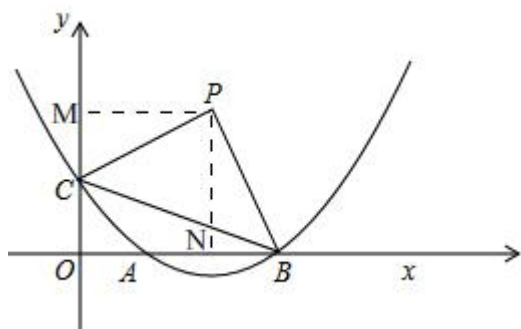
$$(ii) \text{ 当 } \frac{AC}{AB} = \frac{OQ}{OP} \text{ 时, } \therefore \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{OQ}{2\sqrt{2}},$$

$$\therefore OQ=2,$$

$$\therefore Q(-2, 0).$$

当点 Q 在点 A 右侧时,

综上所述, 点 Q 的坐标为 $(-4, 0)$ 或 $(-2, 0)$.



【点评】此题是相似形综合题, 主要考查了待定系数法, 全等三角形的判定和性质, 等腰直角三角形的性质, 相似三角形的性质, 解本题的关键是判断出点 Q 只能在点 O 的左侧, 是一道很好的中考常考题.

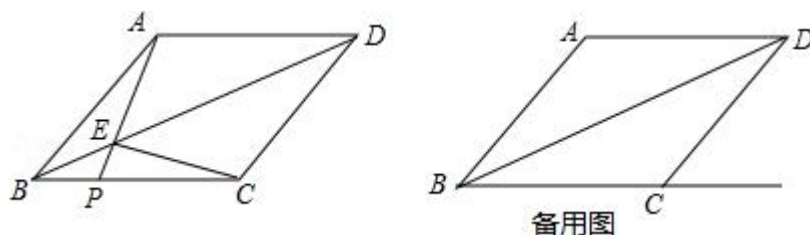
25. (14 分) 已知: 如图, 在菱形 ABCD 中, $AB=5$, 联结 BD, $\sin \angle ABD = \frac{\sqrt{5}}{5}$. 点

P 是射线 BC 上的一个动点 (点 P 不与点 B 重合), 联结 AP, 与对角线 BD 相交于点 E, 联结 EC.

(1) 求证: $AE=CE$;

(2) 当点 P 在线段 BC 上时, 设 $BP=x$, $\triangle PEC$ 的面积为 y, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出它的定义域;

(3) 当点 P 在线段 BC 的延长线上时, 若 $\triangle PEC$ 是直角三角形, 求线段 BP 的长.



【考点】LO：四边形综合题.

【分析】(1) 由菱形的性质得出 $BA=BC$ ， $\angle ABD=\angle CBD$. 由 SAS 证明 $\triangle ABE \cong \triangle CBE$ ，即可得出结论.

(2) 联结 AC ，交 BD 于点 O ，过点 A 作 $AH \perp BC$ 于 H ，过点 E 作 $EF \perp BC$ 于 F ，由菱形的性质得出 $AC \perp BD$. 由三角函数求出 $AO=OC=\sqrt{5}$ ， $BO=OD=2\sqrt{5}$. 由菱形面积得出 $AH=4$ ， $BH=3$. 由相似三角形的性质得出 $\frac{AE}{EP}=\frac{AD}{BP}$ ，求出 EF 的长，即可得出答案； $\therefore \frac{AE+EP}{EP}=\frac{AD+BP}{BP}$ ，

(3) 因为点 P 在线段 BC 的延长线上，所以 $\angle EPC$ 不可能为直角. 分情况讨论：

①当 $\angle ECP=90^\circ$ 时，②当 $\angle CEP=90^\circ$ 时，由全等三角形的性质和相似三角形的性质即可得出答案.

【解答】解：(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore BA=BC$ ， $\angle ABE=\angle CBE$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CBE$ 中，
$$\begin{cases} BA=BC \\ \angle ABE=\angle CBE \\ BE=BE \end{cases}$$

又 $\because BE=BE$ ，

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBE$

$\therefore AE=CE$.

(2) 连接 AC ，交 BD 于点 O ，过点 A 作 $AH \perp BC$ ，过点 E 作 $EF \perp BC$ ，如图 1 所示：

垂足分别为点 H 、 F .

∵ 四边形 ABCD 是菱形,

∴ AC ⊥ BD.

∵ AB=5, $\sin \angle ABD = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

∴ AO=OC=√5, BO=OD=2√5.

∴ $\frac{1}{2}AC \cdot BD = BC \cdot AH$,

∴ AH=4, BH=3.

∵ AD // BC,

∴ $\frac{AE}{EP} = \frac{AD}{BP}$,

∴ $\frac{AE+EP}{EP} = \frac{AD+BP}{BP}$,

∴ $\frac{AP}{EP} = \frac{5+x}{x}$,

∴ $\frac{EP}{AP} = \frac{x}{5+x}$.

∵ EF // AH,

∴ $\frac{EF}{AH} = \frac{PE}{AP}$,

∴ $EF = \frac{4x}{5+x}$.

∴ $y = \frac{1}{2}PC \cdot EF = \frac{1}{2}(5-x) \cdot \frac{4x}{5+x} = \frac{10x-2x^2}{5+x} (0 < x < 5)$.

(3) 因为点 P 在线段 BC 的延长线上, 所以 ∠EPC 不可能为直角. 如图 2 所示:

① 当 ∠ECP=90° 时

∵ △ABE ≅ △CBE,

∴ ∠BAE = ∠BCE = 90°,

∴ $\cos \angle ABP = \frac{AB}{BP} = \frac{BH}{AB}$,

∴ $\frac{5}{BP} = \frac{3}{5}$, ∴ $BP = \frac{25}{3}$.

② 当 ∠CEP=90° 时,

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBE,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle CEB = 45^\circ,$$

$$\therefore AO = OE = \sqrt{5},$$

$$\therefore ED = \sqrt{5}, \quad BE = 3\sqrt{5}.$$

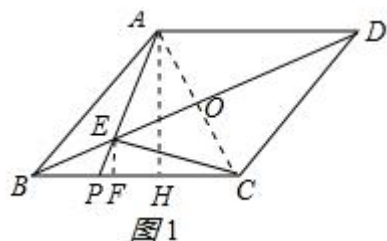
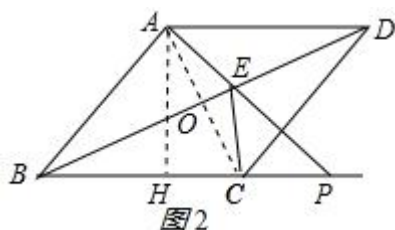
$$\therefore AD \parallel BP,$$

$$\therefore \frac{AD}{BP} = \frac{DE}{BE},$$

$$\therefore \frac{5}{BP} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}},$$

$$\therefore BP = 15.$$

综上所述，当 $\triangle EPC$ 是直角三角形时，线段 BP 的长为 $\frac{25}{3}$ 或 15 .



【点评】 本题是四边形综合题目，考查了菱形的性质、勾股定理、三角函数、全等三角形的判定与性质、相似三角形的判定与性质等知识；本题综合性强，有一定难度，证明三角形全等和三角形相似是解决问题的关键.