

2021 学年九年级第二学期模拟练习

数学学科

(考试时间 100 分钟, 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.

2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列实数中, 一定是无限不循环小数的是 ()

A. $\sqrt[3]{8}$

B. $\frac{2}{7}$

C. $\sqrt{5}$

D. 0.2022022022...

【答案】C

【解析】

【分析】根据有理数, 无理数的定义进行判断即可.

【详解】 $\sqrt[3]{8} = 2$ 是整数, 不是无限不循环小数, A 选项不符合题意;

$\frac{2}{7}$ 是分数, 不是无限不循环小数, B 选项不符合题意;

$\sqrt{5}$ 是无限不循环小数, C 选项符合题意;

0.2022022022... 是无限循环小数, D 选项不符合题意;

故选: C.

【点睛】本题考查了无理数的定义, 即无限不循环小数, 涉及求一个数的立方根, 熟练掌握知识点是解题的关键.

2. 下列运算正确的是 ()

A. $3m + 2m = 5m^2$;

B. $(2m^2)^3 = 8m^6$;

C. $m^8 \div m^4 = m^2$;

D. $(m-2)^2 = m^2 - 4$.

【答案】B

【解析】

【分析】根据整式的运算法则逐个选项计算即可求出答案.

【详解】A. $3m + 2m = 5m$, 选项错误, 不符合题意;

B. $(2m^2)^3 = 8m^6$, 选项正确, 符合题意;

C. $m^8 \div m^4 = m^4$, 选项错误, 不符合题意;

D. $(m-2)^2 = m^2 - 4m + 4$, 选项错误, 不符合题意;

故选: B.

【点睛】 本题考查整式的运算, 解题的关键是熟练运用整式的运算法则, 本题属于基础题型.

3. 在下列方程中, 有实数根的是 ()

A. $x^2 + 3x + 1 = 0$

B. $\sqrt{4x+1} = -1$

C. $x^2 + 2x + 3 = 0$

D. $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$

【答案】 A

【解析】

【详解】 根据一元二次方程根的判别式可知:

A、由方程知 $a=1$, $b=3$, $c=1$, 所以 $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0$, 有两个不相等的实数根, 故正确;

B、根据算术平方根的意义, 可知结果不能为负, 故不正确;

C、由方程知 $a=1$, $b=2$, $c=3$, 所以 $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 12 = -8 < 0$, 无实数根, 故不正确;

D、解分式方程, 去分母得 $x=1$, 当 $x=1$ 时, $x-1=0$, 原分式方程无解, 故不正确.

故选 A.

4. 2019 年 1 月 1 日 “学习强国” 学习平台正式上线, 每天登录 “学习强国” APP 学习可以获得积分. 小张在今年 5 月份最后几天每天的学习积分依次为 50, 46, 44, 43, 42, 46, 那么这组数据的中位数和众数分别是 ()

A. 44 和 50;

B. 44 和 46;

C. 45 和 46;

D. 45 和 50.

【答案】 C

【解析】

【分析】 先将这组数据从小到大排序, 再根据中位数和众数的概念进行求解即可.

【详解】 将这组数据从小到大排序为: 42, 43, 44, 46, 46, 50,

其中, 46 出现两次,

$\therefore$ 众数为 46;

中位数为 $\frac{44+46}{2} = 45$;

故选: C.

【点睛】 本题考查了中位数和众数, 中位数是将一组数据从小到大 (或从大到小) 重新排列后, 最中间的那个数 (最中间两个数的平均数); 众数为出现次数最多的数, 熟练掌握知识点是解题的关键.

5. 在下列函数中, 同时具备以下三个特征的是 ()

①图像经过点(1,1)；②图像经过第三象限；③当 $x < 0$ 时， y 的值随 x 的值增大而增大

- A. $y = -x^2 + 2$ B. $y = -x$ C. $y = -2x + 3$ D. $y = \frac{1}{x}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据二次函数、正比例函数、一次函数及反比例函数的图像和性质进行判断即可.

【详解】A. $y = -x^2 + 2$ ，当 $x = 1$ 时， $y = 1$ ，经过点(1,1)；图像经过第三、四象限；对称轴为 y 轴，开口向下，当 $x < 0$ 时， y 的值随 x 的值增大而增大；所以同时具备①②③三个特征,符合题意；

B. $y = -x$ 图像经过第二、四象限，故不符合题意；

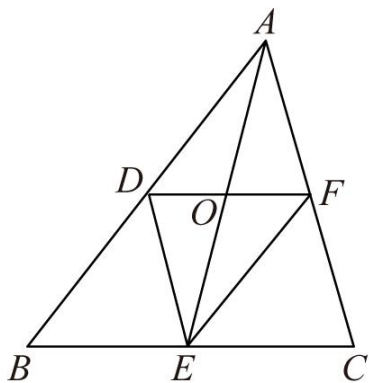
C. $y = -2x + 3$ 图像经过第一、二、四象限，故不符合题意；

D. $y = \frac{1}{x}$ ，当 $x < 0$ 时， y 的值随 x 的值增大而减小，故不符合题意；

故选：A.

【点睛】本题考查了二次函数、正比例函数、一次函数及反比例函数的图像和性质，熟练掌握知识点是解题的关键.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 、 F 分别为边 AB 、 BC 、 AC 的中点，分别连结 DE 、 EF 、 DF 、 AE ，点 O 是 AE 与 DF 的交点，下列结论中，正确的个数是（ ）



① $\triangle DEF$ 的周长是 $\triangle ABC$ 周长的一半；② AE 与 DF 互相平分；③如果 $\angle BAC = 90^\circ$ ，那么点 O 到四边形 $ADEF$ 四个顶点的距离相等；④如果 $AB = AC$ ，那么点 O 到四边形 $ADEF$ 四条边的距离相等.

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【答案】D

【解析】

【分析】①根据中位线的性质，即可判断；②根据中位线的性质、一组对边平行且相等的四边形是平行四边形、平行四边形的对角线互相平分，即可判断；③根据矩形的判定和性质，即可判断；④根据菱形的判

定和性质，即可判断.

【详解】解：① $\because$ 点 D 、 E 、 F 分别为边 AB 、 BC 、 AC 的中点，

$\therefore DE$ 、 EF 、 DF 是 $\triangle ABC$ 的中位线，

$$\therefore DE = \frac{1}{2} AC, EF = \frac{1}{2} AB, DF = \frac{1}{2} BC,$$

$$\therefore DE + EF + DF = \frac{1}{2}(AC + AB + BC),$$

即 $\triangle DEF$ 的周长是 $\triangle ABC$ 周长的一半，

故①正确，符合题意；

② $\because$ 点 D 、 E 、 F 分别为边 AB 、 BC 、 AC 的中点，

$$\therefore AD = BD = \frac{1}{2} AB, EF \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的中位线},$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2} AB, EF \parallel AB,$$

$$\therefore EF = AD, EF \parallel AD,$$

$\therefore$ 四边形 $ADEF$ 是平行四边形，

$\therefore AE$ 与 DF 互相平分，

故②正确，符合题意；

③由②得四边形 $ADEF$ 是平行四边形，

当 $\angle BAC = 90^\circ$ 时，如图 1，

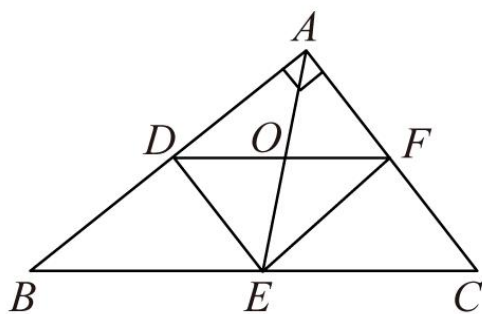


图1

$\therefore$ 四边形 $ADEF$ 是矩形，

$$\therefore OA = OE = \frac{1}{2} AE, OD = OF = \frac{1}{2} DF, AE = DF,$$

$$\therefore OA = OE = OD = OF,$$

$\therefore$ 点 O 到四边形 $ADEF$ 四个顶点的距离相等,

故③正确, 符合题意;

$$\textcircled{4} \text{ 由 } \textcircled{1} \text{ 得 } DE = \frac{1}{2} AC, EF = \frac{1}{2} AB,$$

当 $AB = AC$ 时, 如图 2,

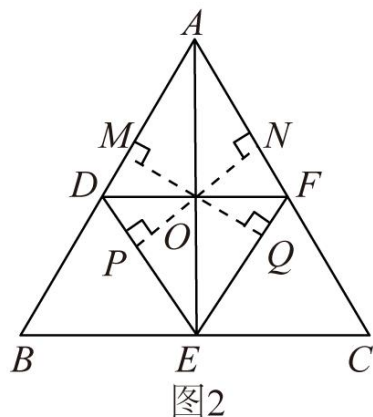


图2

$$\therefore DE = EF,$$

由②得四边形 $ADEF$ 是平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $ADEF$ 是菱形,

$$\therefore AD = DE = EF = AF, AE \perp DF,$$

$$\therefore \triangle ADO \cong \triangle AFO \cong \triangle EFO \cong \triangle EDO,$$

$$\therefore S_{\triangle ADO} = S_{\triangle AFO} = S_{\triangle EFO} = S_{\triangle EDO},$$

$\therefore$ 点 O 到四边形 $ADEF$ 四条边的距离相等,

故④正确, 符合题意.

故选 D.

【点睛】 本题主要考查了中位线的性质、平行四边形的判定和性质、矩形的判定和性质、菱形的判定和性质.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 因式分解 $2x^2 - 6x =$ _____.

【答案】 $2x(x-3)$

【解析】

【分析】 首先找出公因式 $2x$, 进而分解因式得出即可.

【详解】解： $2x^2 - 6x = 2x(x - 3)$.

故答案为： $2x(x - 3)$.

【点睛】 本题主要考查了提取公因式法分解因式， 解题的关键是正确提取公因式.

8. 计算： $3(\vec{2a} - \vec{b}) + 5(\vec{2a} + 3\vec{b}) =$ _____.

【答案】 $16a + 12b$

【解析】

【分析】 去括号， 按照向量的加减法法则计算即可.

【详解】 原式 $= 6a - 3b + 10a + 15b = 16a + 12b$

故答案为： $16a + 12b$.

【点睛】 本题考查了向量的线性运算， 熟练掌握向量的线性运算法则是解答本题的关键. 数乘向量满足下列运算律： 设 λ, μ 为实数， 则① $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$, ② $\lambda(\mu\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}$, ③ $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

9. 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$, 那么 $f(3) =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 由函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$, 代入 $f(3) = \frac{\sqrt{3}}{3-1}$, 求解即可.

【详解】 $\because$ 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$,

$$\therefore f(3) = \frac{\sqrt{3}}{3-1} = \frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

故答案为： $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【点睛】 本题考查了函数值的求法， 熟练掌握知识点是解题的关键.

10. 方程 $\sqrt{2-x} = 5$ 的根是_____.

【答案】 $x = -23$

【解析】

【分析】根据算术平方根的定义求解即可.

【详解】 $\because \sqrt{2-x}=5$

$$\therefore 2-x=25$$

解得 $x=-23$

经检验 $x=-23$ 是原方程的解

故答案为: $x=-23$

【点睛】本题考查无理方程, 解题的关键是理解算术平方根的定义.

11. 不等式组 $\begin{cases} 16x > 24x - 32 \\ 9x > 7x - 6 \end{cases}$ 的解集是_____.

【答案】 $-3 < x < 4$

【解析】

【分析】分别解两个一元一次不等式, 再写出不等式组的解集即可.

【详解】 $\begin{cases} 16x > 24x - 32 \text{ ①} \\ 9x > 7x - 6 \text{ ②} \end{cases}$,

解①得 $x < 4$,

解②得 $x > -3$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-3 < x < 4$,

故答案为: $-3 < x < 4$.

【点睛】本题考查了解一元一次不等式组, 熟练掌握解不等式的步骤是解题的关键.

12. 一个布袋中有三个完全相同的小球, 把它们分别标号为 1、2、3, 从布袋中任取一个球记下数字作为点 P 的横坐标 x , 不放回小球, 然后再从布袋中取出一个球记下数字作为点 P 的纵坐标 y , 那么点 $P(x, y)$ 落在直线 $y = x + 1$ 上的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】首先根据题意画出表格, 然后由表格求得所有等可能的结果与数字 x 、 y 满足 $y=x+1$ 的情况, 再利用概率公式求解即可求得答案.

【详解】解: 列表得:

	1	2	3
--	---	---	---

1		(1, 2)	(1, 3)
2	(2, 1)		(2, 3)
3	(3, 1)	(3, 2)	

共有 6 种等可能的结果，其中，点 $P(x, y)$ 落在直线 $y = x + 1$ 上的结果有 2 种，

$\therefore$ 点 $P(x, y)$ 落在直线 $y = x + 1$ 上的概率 $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

故答案为： $\frac{1}{3}$.

【点睛】此题考查的是用列表法或树状图法求概率与不等式的性质. 注意树状图法与列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件；注意概率=所求情况数与总情况数之比，还需要注意实验是不放回实验.

13. 明代数学家程大位编撰的《算法统宗》记载了“绳索量竿”问题：“一条竿子一条索，索比竿子长一托，折回索子来量竿，却比竿子短一托.” 译文为：“有一根竿和一条绳，若用绳去量竿，则绳比竿长 5 尺；若将绳对折后再去量竿，则绳比竿短 5 尺，那么竿长_____尺. (注：“托”和“尺”为古代的长度单位，1 托=5 尺)

【答案】 15

【解析】

【分析】设竿长 x 尺，则绳长 $(x + 5)$ 尺，根据“将绳对折后再去量竿，则绳比竿短 5 尺”列一元一次方程，求解即可.

【详解】设竿长 x 尺，则绳长 $(x + 5)$ 尺，

由题意得： $x - \frac{1}{2}(x + 5) = 5$,

解得 $x = 15$,

所以，竿长为 15 尺，

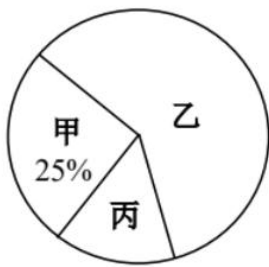
故答案为： 15.

【点睛】本题考查了一元一次方程的应用，准确理解题意，熟练掌握知识点是解题的关键.

14. “双减”政策全面实施后，中学生可以自由选择是否参加校内课后延时服务，因此放学时间也有差异，有甲（16：30）、乙（17：20）、丙（18：00）三个时间点供选择.为了解某校七年级全体学生的放学时间情况，随机抽取了该校七年级部分学生进行统计，绘制成如下不完整的统计图表，那么扇形统计图中表示丙时间点的扇形圆心角为_____度.

放学时间	人数
甲 (16:30)	10
乙 (17:20)	26
丙 (18:00)	未知

放学时间扇形统计图



【答案】 36

【解析】

【分析】 用甲时间所占人数除以所占百分比求得总人数，从而求得丙的人数，即可求解.

【详解】 解：总人数为 $10 \div 25\% = 40$ (人)，

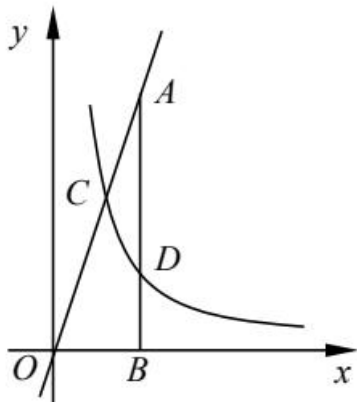
丙时间的人数： $40 - 10 - 26 = 4$ (人)，

$\therefore$ 丙时间点的扇形圆心角为 $\frac{4}{40} \times 360^\circ = 36^\circ$ ，

故答案为： 36.

【点睛】 本题主要考查扇形统计图与统计表的知识，熟练根据统计表和扇形统计图得出相应的数据是解题的关键.

15. 如图，过原点且平行于 $y = 3x - 1$ 的直线与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0, x > 0$) 的图像相交于点 C ，过直线 OC 上的点 $A(1, 3)$ ，作 $AB \perp x$ 轴于点 B ，交反比例函数图像于点 D ，且 $AD = 2BD$ ，那么点 C 的坐标为_____.



【答案】 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3})$

【解析】

【分析】 由条件可求得 D 点坐标，则可求得反比例函数解析式，联立直线与反比例函数解析式可求得 C 点坐标.

【详解】 解: $A(1, 3)$, $AB \perp x$ 轴点 B ,

$$\therefore AB=3, \quad OB=1,$$

$$\because AD = 2BD,$$

$$\therefore BD=1,$$

$$\therefore D(1, 1),$$

$\because$ 点 D 在反比例函数图象上,

$$\therefore 1 = \frac{k}{1}, \text{ 解得 } k=1,$$

$$\therefore \text{反比例函数解析式为 } y = \frac{1}{x},$$

$$\text{联立直线与反比例函数解析式可得 } \begin{cases} y = 3x \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$

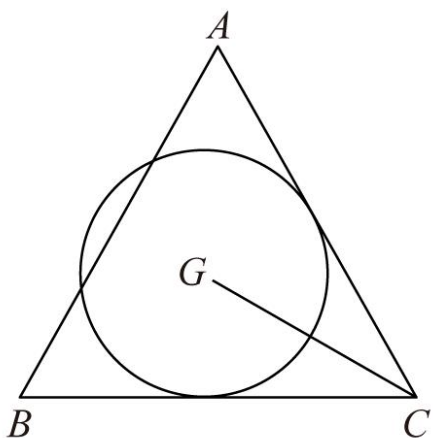
$$\text{解得 } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases},$$

$$\therefore C(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}).$$

【点睛】 本题考查了反比例函数的综合应用、待定系数法求函数解析式以及，函数图象的交点，联立方程组求交点是解题的关键

16. 如图, 点 G 为等腰 $\triangle ABC$ 的重心, $AC = BC$, 如果以 2 为半径的圆 G 分别与 AC 、 BC 相切, 且 $CG = 2\sqrt{5}$,

那么 AB 的长为_____.

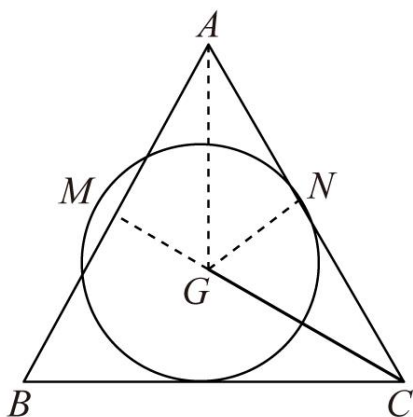


【答案】 $3\sqrt{5}$

【解析】

【分析】根据重心的定义和性质，延长 CG 交 AB 于 M ，根据切线的性质连接 G 与 AC 上的切点 N ，再利用勾股定理计算即可.

【详解】延长 CG 交 AB 于 M ，连接 G 与 AC 上的切点 N ，连 AG



$\because$ 点 G 为等腰 $\triangle ABC$ 的重心， $AC = BC$ ，

$\therefore AM = \frac{1}{2}AB$ ， $CM \perp AB$ ， $CG = 2GM$

$\because CG = 2\sqrt{5}$

$\therefore CM = 3\sqrt{5}, GM = \sqrt{5}$

$\because \odot G$ 分别与 AC 、 BC 相切

$\therefore GN \perp AC$ ， $GN = 2$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle CGN$ 中 $CN = \sqrt{CG^2 - NG^2} = 4$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle AGM$ 和 $Rt\triangle AGN$ 中 $AG^2 = AM^2 + MG^2 = AN^2 + NG^2$

$$\therefore AM^2 + (\sqrt{5})^2 = AN^2 + 2^2$$

$$\therefore AM^2 = AN^2 - 1$$

在 $Rt\triangle ACM$ 中 $AC^2 = AM^2 + CG^2$

$$\therefore (4 + AN)^2 = AM^2 + (3\sqrt{5})^2$$

$$\therefore (4 + AN)^2 = AN^2 - 1 + (3\sqrt{5})^2$$

$$\text{解得 } AN = \frac{7}{2}$$

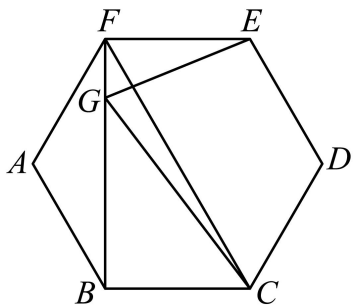
$$\therefore AM = \frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ 或 } AM = -\frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ (舍去)}$$

$$\therefore AB = 2AM = 3\sqrt{5}$$

故答案为: $3\sqrt{5}$.

【点睛】本题考查重心的性质和定义、切线的性质、勾股定理，解题的关键是熟记重心的性质：重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2:1.

17. 如图，已知点 G 是正六边形 $ABCDEF$ 对角线 FB 上的一点，满足 $BG = 3FG$ ，联结 FC ，如果 $\triangle EFG$ 的面积为 1，那么 $\triangle FBC$ 的面积等于_____.

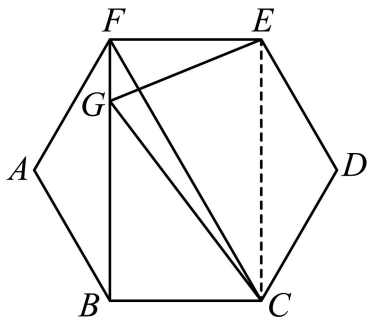


【答案】4

【解析】

【分析】解：如图，连接 CE ，由 $BG = 3FG$ 得 $BF = 4FG$ ，由六边形 $ABCDEF$ 是正六边形证明 $EF \parallel BC$ ，从而得 $\triangle FBC$ 的面积为 $\triangle EFG$ 的面积的 4 倍即可求解.

【详解】解：如图，连接 CE ，



$$\because BG = 3FG,$$

$$\therefore BF = 4FG,$$

$\because$ 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形,

$$\therefore AB = AF = EF = BC, \quad \angle ABC = \angle BAF = \angle AFE = \frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle AFB = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CBF = \angle EFB = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBF + \angle EFB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

$$\therefore EF \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $BCEF$ 是平行四边形,

$$\therefore BF \parallel EC,$$

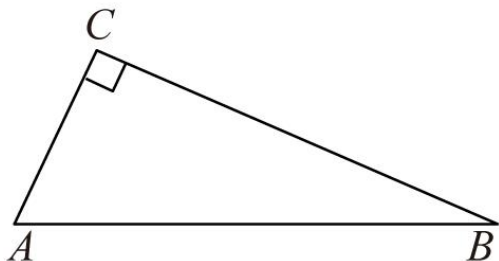
$$\because \triangle EFG \text{ 的面积为 } 1, \quad BF = 4FG,$$

$$\therefore \triangle FBC \text{ 的面积为 } 1 \times 4 = 4,$$

故答案为 4.

【点睛】 本题主要考查了正多边形的性质及平行四边形的判定及性质，作出辅助线构造平行四边形是解题的关键.

18. 如图，已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 M 是 AB 的中点，将 AM 沿 CM 所在的直线翻折，点 A 落在点 A' 处， $A'M \perp AB$ ，且交 BC 于点 D ， $A'D : DM$ 的值为_____.



【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】如图 1，作 $\angle ACB$ 的角平分线 CF 交 AB 于点 F ，连接 FD ，先证明 $\triangle FCM \cong \triangle DCM$ 得 $AC=CF$ ，从而有 $FC=DC=AC=A'C$ ，再证明 $\triangle A'CD \cong \triangle FCD$ ，得 $A'D=FD$ ，在直角三角形 DFM 中利用 $\sin \angle DFM = \frac{DM}{FD} = \frac{DM}{A'D}$ 即可求解.

【详解】解：如图 1，作 $\angle ACB$ 的角平分线 CF 交 AB 于点 F ，连接 FD ，

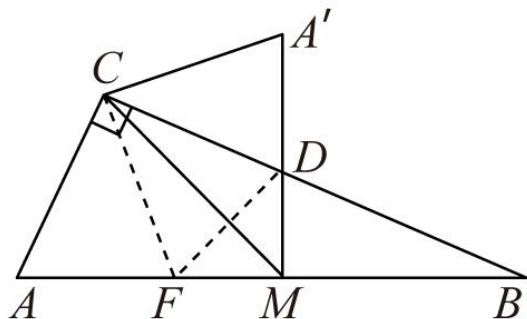


图 1

0

$\because \angle ACB = 90^\circ$ ， CF 平分 $\angle ACB$ ，

$\therefore \angle ACF = \angle DCF = \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ$ ，

$\because$ 将 AM 沿 CM 所在的直线翻折，点 A 落在点 A' 处， $A'M \perp AB$ ，

$\therefore \angle AMC = \angle A'MC = \frac{1}{2} \angle AMA' = 45^\circ$ ， $\angle DMB = 90^\circ$ ，

$\because \angle ACB = 90^\circ$ ，点 M 是 AB 的中点，

$\therefore CM = BM = AM$ ，

$\therefore \angle DCM = \angle B = \frac{1}{2} \angle AMC = 22.5^\circ$ ， $\angle A = \frac{180^\circ - \angle AMC}{2} = 67.5^\circ$ ，

$\therefore \angle FCM = \angle DCF - \angle DCM = 22.5^\circ = \angle DCM$ ， $\angle AFC = 180^\circ - \angle A - \angle ACF = 67.5^\circ = \angle A$ ，

$\therefore \triangle FCM \cong \triangle DCM$ ， $AC = CF$

$\therefore FC = DC = AC = A'C$ ，

$\therefore \angle CFD = \frac{180^\circ - \angle DCF}{2} = 67.5^\circ$ ，

$\therefore \angle DFM = 180^\circ - \angle CFD - \angle AFC = 45^\circ$ ，

$\because$ 在 $\triangle FCD$ 和 $\triangle A'CD$ 中，

$$\begin{cases} CD = CD \\ \angle A'CD = \angle FCD \\ A'C = FC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle A'CD \cong \triangle FCD,$$

$$\therefore A'D = FD,$$

$$\therefore \sin \angle DFM = \sin 45^\circ = \frac{DM}{FD} = \frac{DM}{A'D} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore A'D : DM = \sqrt{2},$$

故答案为 $\sqrt{2}$.

【点睛】 本题主要考查了全等三角形的判定及性质、等腰三角形的判定及性质、直角三角形的性质以及解直角三角形，构造辅助线得出三角形全等是解题的关键.

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. 计算： $3^{-1} + |4 - \sqrt{3}| - 9^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{3} - 2}$.

【答案】 $3\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 根据负整数指数幂、绝对值的意义、分数指数幂以及二次根式化简等知识作答即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 } & 3^{-1} + |4 - \sqrt{3}| - 9^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{3} - 2} \\ &= \frac{1}{3} + 4 - \sqrt{3} - \sqrt{9} - \frac{\sqrt{3} + 2}{(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)} \\ &= \frac{1}{3} + 4 - \sqrt{3} - 3 - \frac{\sqrt{3} + 2}{-1} \\ &= \frac{1}{3} + 1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} + 2 \\ &= 3\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了负整数指数幂、绝对值的意义、分数指数幂以及二次根式化简等知识，熟悉相关运算法则是解答本题的关键.

20. 解方程组：
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 4x^2 - 9y^2 = 0 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1 = 15 \\ y_1 = -10 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

【解析】

【分析】先将二元二次方程利用平方差公式进行因式分解，再将原方程组化为两个二元一次方程组，求解即可.

$$\text{【详解】} \begin{cases} x+y=5 \text{①} \\ 4x^2-9y^2=0 \text{②} \end{cases}$$

由②得 $2x+3y=0$ 或 $2x-3y=0$ ，与①联立，

$$\therefore \text{原方程可变为} \begin{cases} x+y=5 \\ 2x+3y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+y=5 \\ 2x-3y=0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x_1=15 \\ y_1=-10 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=2 \end{cases}.$$

【点睛】本题考查了解二元二次方程组，熟练掌握解方程组的步骤是解题的关键.

21. 北京冬奥会期间，海内外掀起一股购买冬奥会吉祥物“冰墩墩”的热潮.某玩具厂接到 6000 箱“冰墩墩”的订单，需要在冬奥会闭幕之前全部交货.为了尽快完成订单，玩具厂改良了原有的生产线，每天可以多生产 20 箱“冰墩墩”，结果提前 10 天完成任务，求该玩具厂改良生产线前每天生产多少箱“冰墩墩”？



【答案】100 箱

【解析】

【分析】设该玩具厂改良生产线前每天生产 x 箱“冰墩墩”，则该玩具厂改良生产线后每天生产 $(x+20)$ 箱“冰墩墩”，根据题意即可列出分式方程，解分式方程即可求得.

【详解】解：设该玩具厂改良生产线前每天生产 x 箱“冰墩墩”，则该玩具厂改良生产线后每天生产 $(x+20)$ 箱“冰墩墩”，

$$\text{根据题意得} \frac{6000}{x} = \frac{6000}{x+20} + 10$$

$$\text{整理得：} x^2 + 20x - 12000 = 0,$$

$$\text{解得} x_1 = 100, x_2 = -120 (\text{舍去}),$$

经检验： $x_1 = 100$ ， $x_2 = -120$ 都是原方程的解，但 $x_2 = -120$ 不符合题意舍去，

故该玩具厂改良生产线前每天生产 100 箱“冰墩墩”.

【点睛】 本题考查了分式方程的实际应用，找准等量关系，列出分式方程是解决本题的关键，注意要检验.

22. 直角三角形中一个锐角的大小与两条边的长度的比值之间有明确的联系，我们用锐角三角比来表示. 类似的，在等腰三角形中也可以建立边角之间的联系，我们定义：等腰三角形中底边与腰的长度的比值叫做

顶角的正对. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，顶角 A 的正对记作 $\text{pre}A$ ，这时 $\text{pre}A = \frac{\text{底边}}{\text{腰}} = \frac{BC}{AB}$.



仔细阅读上述关于顶角的正对的定义，解决下列问题：

(1) $\text{pre}60^\circ$ 的值为 () .

A. $\frac{1}{2}$; B. 1; C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; D. 2.

(2) 对于 $0^\circ < A < 180^\circ$ ， $\angle A$ 的正对值 $\text{pre}A$ 的取值范围是_____.

(3) 如果 $\sin A = \frac{8}{17}$ ，其中 $\angle A$ 为锐角，试求 $\text{pre}A$ 的值.

【答案】 (1) B; (2) $0 < \text{pre}A < 2$;

(3) $\frac{2\sqrt{17}}{17}$.

【解析】

【分析】 (1) 根据等腰三角形的性质，求出底角的度数，判断出三角形为等边三角形，再根据正对的定义解答进而得出 $\text{pre}60^\circ$ 的值；

(2) 求出 0° 度和 180° 度时等腰三角形底和腰的比即可；

(3) 过点 B 作 $BD \perp AC$ 于点 D ，利用勾股定理即可解答.

【小问 1 详解】

解：根据正对定义，

当顶角为 60° 时，等腰三角形底角为 60° ，

则三角形为等边三角形，

则 $\text{pre}60^\circ = \frac{1}{1} = 1$

故选：B；

【小问2详解】

解：当 $\angle A$ 接近 0° 时， $\text{pre}A$ 接近0，

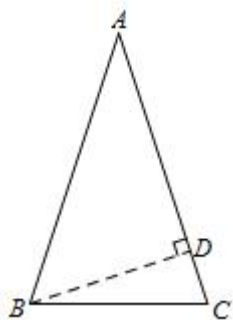
当 $\angle A$ 接近 180° 时，等腰三角形的底接近于腰的二倍，故 $\text{pre}A$ 接近2．

于是 $\text{pre}A$ 的取值范围是 $0 < \text{pre}A < 2$ ．

故答案为： $0 < \text{pre}A < 2$ ；

【小问3详解】

解：如下图，过点 B 作 $BD \perp AC$ 于点 D ，



$\because BD \perp AC$,

$\therefore \angle ADB = \angle CDB = 90^\circ$ ．

$\because$ 在 $Rt\triangle ADB$ 中， $\sin A = \frac{8}{17}$ ，

$\therefore$ 设 $BD = 8k$ ，则 $AB = 17k$ ．

$\therefore AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{(17k)^2 - (8k)^2} = 15k$ ，

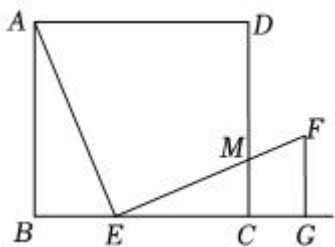
$\therefore CD = AC - AD = 2k$ ，

$\therefore BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{(2k)^2 + (8k)^2} = 2\sqrt{17}k$ ，

在等腰 $\triangle ABC$ 中， $\text{pre}A = \frac{BC}{AB} = \frac{2\sqrt{17}k}{17k} = \frac{2\sqrt{17}}{17}$ ．

【点睛】本题考查了解直角三角形，利用三角函数的定义，根据题意得出 BC 与 CD 的关系是解题关键．

23. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 在边 BC 上，将线段 AE 绕点 E 顺时针旋转 90° ，此时点 A 落在点 F 处，线段 EF 交 CD 于点 M ．过点 F 作 $FG \perp BC$ ，交 BC 的延长线于点 G ．



(1) 求证: $BE=FG$;

(2) 如果 $AB \cdot DM = EC \cdot AE$, 连接 AM 、 DE , 求证: AM 垂直平分 DE .

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据同角的余角相等得到一对角相等, 再由一对直角相等, 且 $AE=EF$, 利用 AAS 得到 $\triangle ABE$ 与 $\triangle EFG$ 全等, 据此即可证明 $BE=FG$;

(2) 证明 $\triangle ABE \sim \triangle ECM$, 可得 $EM=DM$, 再利用 HL 证明 $\triangle AEM \cong \triangle ADM$ 即可解决问题.

【小问 1 详解】

证明: $\because EF \perp AE$,

$$\therefore \angle AEB + \angle GEF = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle AEB + \angle BAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GEF = \angle BAE,$$

$$\text{又} \because FG \perp BC,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle EGF = 90^\circ,$$

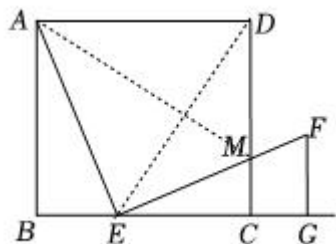
$$\text{在} \triangle ABE \text{ 与 } \triangle EGF \text{ 中, } \begin{cases} \angle ABE = \angle EGF \\ \angle BAE = \angle GEF, \\ AE = EF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle EGF \text{ (AAS)};$$

$$\therefore BE = FG;$$

【小问 2 详解】

证明: 连接 AM 、 DE ,



$$\therefore \angle GEF = \angle BAE, \quad \angle ABE = \angle ECM = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ECM,$$

$$\therefore \frac{AB}{EC} = \frac{AE}{EM}, \text{ 即 } AB \cdot EM = EC \cdot AE,$$

$$\therefore AB \cdot DM = EC \cdot AE,$$

$$\therefore DM = EM,$$

$$\because EF \perp AE,$$

$$\therefore \angle AEM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEM = \angle ADM = 90^\circ,$$

$$\because DM = EM, AM = AM,$$

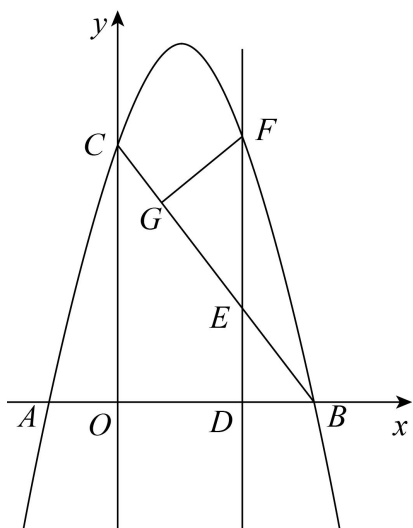
$$\therefore \triangle AEM \cong \triangle ADM (\text{HL}),$$

$$\therefore AE = AD,$$

$$\therefore AM \text{ 垂直平分 } DE.$$

【点睛】 本题考查了矩形的性质，全等三角形的判定和性质，线段垂直平分线的判定，相似三角形的判定和性质，解题的关键是正确寻找全等三角形或相似三角形解决问题.

24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + 4$ 与 x 轴相交于点 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ，与 y 轴交于点 C . 将抛物线的对称轴沿 x 轴的正方向平移，平移后交 x 轴于点 D ，交线段 BC 于点 E ，交抛物线于点 F ，过点 F 作直线 BC 的垂线，垂足为点 G .



(1) 求抛物线的表达式;

(2) 以点 G 为圆心， BG 为半径画 $\odot G$ ；以点 E 为圆心， EF 为半径画 $\odot E$. 当 $\odot G$ 与 $\odot E$ 内切时. ①试证明 EF 与 EB 的数量关系；②求点 F 的坐标.

【答案】 (1) $y = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 4$

(2) ① $EF = EB$ ，证明见解析； ② $\left(\frac{5}{4}, \frac{21}{4}\right)$

【解析】

【分析】 (1) 将抛物线的解析式可以写成 $y = a(x+1)(x-3)$ 的形式，与 $y = ax^2 + bx + 4$ 对比即可求出 a ,

b 的值, 进而求出抛物线的表达式;

(2) ①画出大致图形, 证明点 B 是 $\odot G$ 与 $\odot E$ 内切时的切点, 即可得到 $EF = EB$; ②设点 F 的坐标为

$\left(m, -\frac{4}{3}m^2 + \frac{8}{3}m + 4\right)$, 用含 m 的代数式分别表示出 EF 和 EB , 列等式即可求出 m 的值.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 4$ 与 x 轴相交于点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$,

$\therefore$ 抛物线的解析式可以写成 $y = a(x+1)(x-3)$ 的形式,

即 $y = ax^2 - 2ax - 3a$,

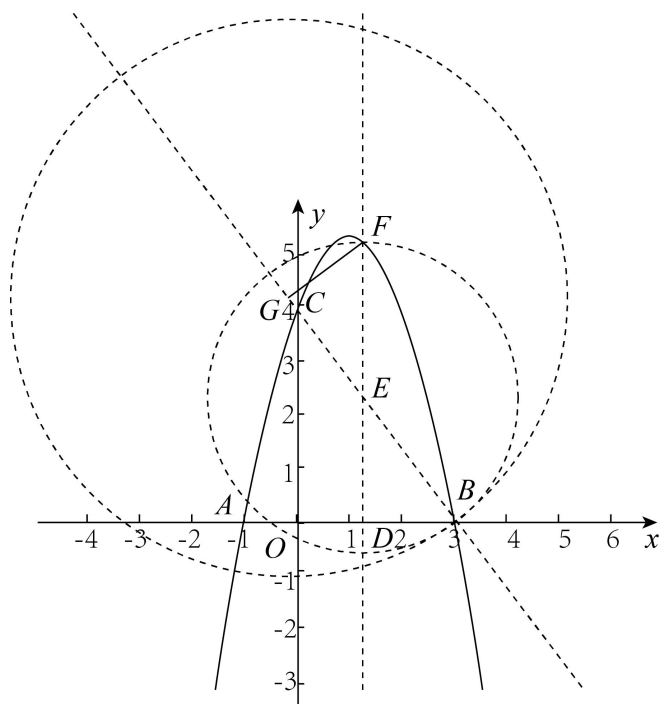
$\therefore -3a = 4, -2a = b$,

$\therefore a = -\frac{4}{3}, b = \frac{8}{3}$,

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 4$.

【小问 2 详解】

解: 由题意作图如下,



① $\because$ $\odot G$ 的圆心为 G , $\odot E$ 的圆心为 E ,

$\therefore GE$ 是 $\odot G$ 与 $\odot E$ 圆心的连线,

$\because$ 两圆相切时, 圆心的连线经过切点,

$\therefore$ 当 $\odot G$ 与 $\odot E$ 内切时, GE 经过切点,

∵ 点 B 是线段 GE 延长线上的点, 且在 $\odot G$ 上,

∴ 点 B 是 $\odot G$ 与 $\odot E$ 内切时的切点,

∴ 点 B 在以点 E 为圆心, EF 为半径的 $\odot E$ 上,

∴ $EF = EB$,

② 在 $y = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 4$ 中,

令 $x = 0$ 得 $y = 4$,

∴ 抛物线与 y 轴交于点 C 的坐标为 $(0, 4)$,

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b$,

将 $C(0, 4)$ 和 $B(3, 0)$ 的坐标代入,

$$\text{得} \begin{cases} 4 = b \\ 0 = 3k + b \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -\frac{4}{3}, \\ b = 4 \end{cases},$$

∴ 设直线 BC 的解析式为 $y = -\frac{4}{3}x + 4$.

∵ 点 F 在抛物线上,

∴ 设点 F 的坐标为 $\left(m, -\frac{4}{3}m^2 + \frac{8}{3}m + 4\right)$,

由题意 $FD \parallel y$ 轴,

∴ 点 E 的坐标为 $\left(m, -\frac{4}{3}m + 4\right)$,

∵ 点 F 在 BC 的上方,

$$\therefore EF = |y_F - y_E| = y_F - y_E = -\frac{4}{3}m^2 + \frac{8}{3}m + 4 - \left(-\frac{4}{3}m + 4\right) = -\frac{4}{3}m^2 + 4m,$$

∵ 抛物线 $y = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 4$ 的对称轴为直线: $x = \frac{-\frac{8}{3}}{2 \times \left(-\frac{4}{3}\right)} = 1$,

∴ $m > 1$,

$$\therefore C(0,4), B(3,0),$$

$$\therefore OC=4, OB=3,$$

$$\therefore BC=\sqrt{OC^2+OB^2}=5,$$

$$\therefore \sin \angle OBC = \frac{OC}{BC} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore FD \parallel y \text{ 轴},$$

$$\therefore ED \perp OB,$$

$$\therefore \sin \angle OBC = \frac{ED}{EB} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore EB = \frac{ED}{\sin \angle OBC} = \frac{5}{4}ED.$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 在线段 } BC \text{ 上},$$

$$\therefore y_E > 0,$$

$$\therefore EB = \frac{5}{4}|y_E| = \frac{5}{4} \times \left(-\frac{4}{3}m + 4\right) = -\frac{5}{3}m + 5,$$

$$\therefore EF = EB,$$

$$\therefore -\frac{4}{3}m^2 + 4m = -\frac{5}{3}m + 5,$$

$$\text{整理得, } 4m^2 - 17m + 15 = 0,$$

$$\text{解得 } m = \frac{5}{4} \text{ 或 } 3,$$

$$\text{当 } m = 3 \text{ 时, 点 } E, F, B \text{ 重合, 此时 } \odot E \text{ 不存在},$$

$$\text{故 } m = 3 \text{ 不合题意, 应舍去},$$

$$\therefore m = \frac{5}{4},$$

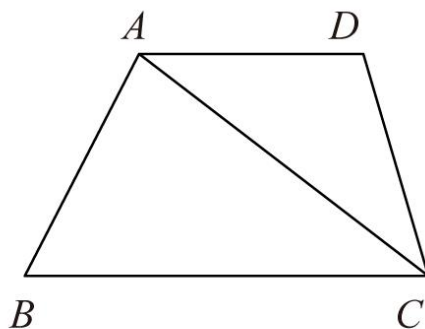
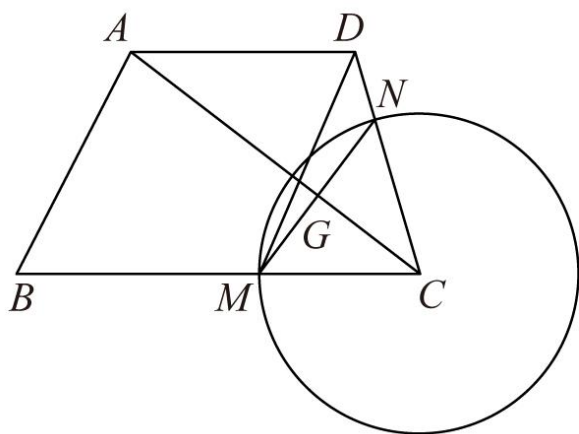
$$\text{当 } m = \frac{5}{4} \text{ 时, } y_F = -\frac{4}{3} \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{8}{3} \times \left(\frac{5}{4}\right) + 4 = \frac{21}{4},$$

$$\therefore \text{求点 } F \text{ 的坐标为 } \left(\frac{5}{4}, \frac{21}{4}\right).$$

【点睛】 本题考查求一次函数、二次函数的解析式，圆与圆的位置关系，二次函数图象上点的坐标的特征，三角函数解直角三角形等知识点，证明点 B 是 $\odot G$ 与 $\odot E$ 内切时的切点，进而得到 $EF = EB$ 是解题的关键.

25. 如图，梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = 26$ ， $BC = 42$ ， $\cos B = \frac{5}{13}$ ， $AD = DC$. 点 M 在射线 CB 上，

以点 C 为圆心， CM 为半径的 $\odot C$ 交射线 CD 于点 N ，联结 MN ，交射线 CA 于点 G .



(备用图)

- (1) 求线段 AD 的长；
- (2) 设线段 $CM = x$ ， $\frac{AG}{GC} = y$ ，当点 N 在线段 CD 上时，试求出 y 关于 x 的函数关系式，并写出 x 的取值范围；
- (3) 联结 DM ，当 $\angle NMC = 2\angle DMN$ 时，求线段 CM 的长。

【答案】 (1) 25 (2) $y = \frac{50-x}{x} (0 < x \leq 25)$

(3) $CM = 55$ 或 $\frac{125}{11}$

【解析】

【分析】 (1) 过 A 作 $AE \perp BC$ 于 E ，过 D 作 $DF \perp BC$ 于 F ，在三角形 ABE 中根据 $\cos B = \frac{5}{13}$ 求出 AE ，再在三角形 DFC 中根据勾股定理求出 CD 即可；

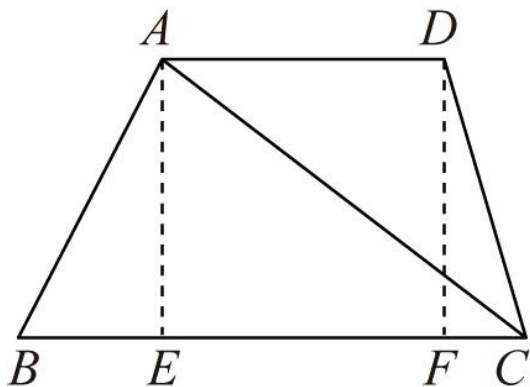
(2) 先求出 AC 的长，再由 $\cos \angle ACB = \frac{4}{5}$ 求出 CG 的长即可；

(3) 分点 N 在线段 CD 上和点 N 在线段 CD 延长线上两种情况讨论，分别画出图形计算即可，

【小问 1 详解】

过 A 作 $AE \perp BC$ 于 E ，过 D 作 $DF \perp BC$ 于 F ，则四边形 $ADFE$ 是矩形

$\therefore AD = EF, AE = DF$



$$\therefore \cos B = \frac{5}{13}$$

$$\therefore \cos B = \frac{5}{13} = \frac{BE}{AB} = \frac{BE}{26}$$

$$\therefore BE = 10,$$

$$\therefore DF = AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = 24$$

设 $CD=AD=EF=x$

$$\therefore BC = 42$$

$$\therefore CF = BC - BE - EF = 32 - x$$

在 $Rt\triangle DFC$ 中, $DF^2 + CF^2 = CD^2$

$$\therefore 24^2 + (32 - x)^2 = x^2, \text{ 解得 } x = 25$$

$$\therefore CD=AD=EF=25$$

【小问 2 详解】

在 $Rt\triangle ACE$ 中, $AC = \sqrt{AE^2 + EC^2} = \sqrt{24^2 + 32^2} = 40$

$$\therefore \cos \angle ACB = \frac{CE}{AC} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore AD \parallel BC, AD=CD$$

$$\therefore \angle ACD = \angle DAC = \angle ACB$$

$$\therefore CM = CN$$

$$\therefore MN \perp AC$$

$$\therefore \cos \angle ACB = \cos \angle MCG = \frac{CG}{CM} = \frac{CG}{x} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore CG = \frac{4}{5}x$$

$$\therefore AG = AC - CG = 40 - \frac{4}{5}x$$

$$\therefore y = \frac{AG}{GC} = \frac{40 - \frac{4}{5}x}{\frac{4}{5}x} = \frac{50 - x}{x},$$

$\therefore$ 点 N 在线段 CD 上

$$\therefore 0 < x \leq 25$$

$$\therefore y = \frac{50 - x}{x} (0 < x \leq 25)$$

【小问 3 详解】

当点 N 在线段 CD 上时

$$\because CM = CN$$

$$\therefore \angle CMN = \angle CNM = \angle DMN + \angle DNM$$

$$\because \angle NMC = 2\angle DMN$$

$$\therefore \angle DMN = \angle DNM$$

$$\therefore DN = MN$$

$$\because CG = \frac{4}{5}x$$

$$\therefore MG = \sqrt{CM^2 - CG^2} = \frac{3}{5}x$$

$$\therefore MN = 2MG = \frac{6}{5}x$$

$$\because DN = DC - CN = 25 - x$$

$$\therefore \frac{6}{5}x = 25 - x$$

$$\text{解得 } x = \frac{125}{11}$$

$$\text{即 } CM = \frac{125}{11}$$

当点 N 在线段 CD 延长线上时

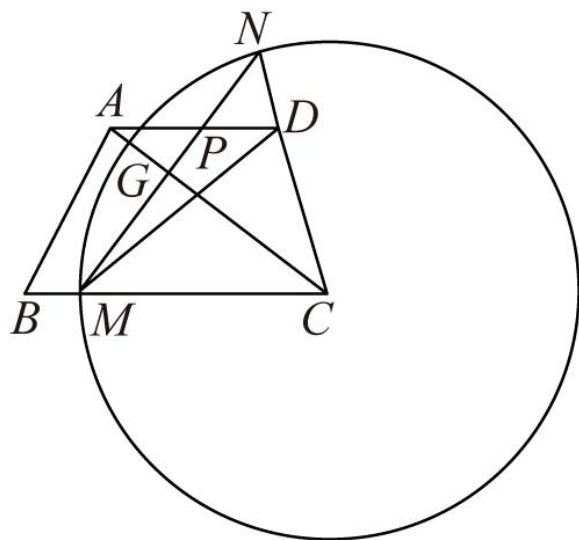
$$\because CM = CN$$

$$\therefore \angle CMN = \angle CNM = \angle DMN + \angle DMC$$

$$\because \angle NMC = 2\angle DMN$$

$$\therefore \angle DMN = \angle DMC$$

设 MN 与直线 DA 交于点 P



$$\because AD \parallel BC$$

$$\therefore \angle ADM = \angle DMC, \frac{PM}{MN} = \frac{CD}{CN}, \frac{PD}{CM} = \frac{ND}{CN}$$

$$\therefore \angle ADM = \angle DMC = \angle DMN, PD = DN$$

$$\therefore PM = PD = DN = x - 25$$

$$\therefore CG = \frac{4}{5}x$$

$$\therefore MG = \sqrt{CM^2 - CG^2} = \frac{3}{5}x$$

$$\therefore MN = 2MG = \frac{6}{5}x$$

$$\therefore \frac{PM}{MN} = \frac{CD}{CN}$$

$$\therefore \frac{x-25}{\frac{6}{5}x} = \frac{25}{x}$$

$$\text{解得 } x = 55$$

$$\text{即 } CM = 55$$

$$\text{综上所述, } CM = 55 \text{ 或 } \frac{125}{11}$$

【点睛】本题属于几何综合题，考查了直角梯形的性质、相似三角形的判定和性质、解直角三角形等知识，解题的关键是学会用分类讨论的思想思考问题，学会利用参数构建方程解决问题，属于中考压轴题。

免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>)
致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群
出品的《老师请开讲》私享直播课等
增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>)
是学科网旗下智能题库，拥有小初高全
学科超千万精品试题，提供智能组卷、
拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能