

2022 年上海市浦东新区中考数学一模试卷

答案解析版

一、选择题

1. 某两地的距离为 3000 米，画在地图上的距离是 15 厘米，则地图上的距离与实际距离之比是 ()

- A. 1 : 200 B. 1 : 2000 C. 1 : 20000 D. 1 : 200000

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据比例尺的意义作答，即比例尺是图上距离与实际距离的比.

【详解】 解：因为 3000 米 = 300000 厘米，则 15 厘米：300000 厘米 = 1：20000.

故这幅地图的比例尺是 1：20000.

故选： C.

【点睛】 本题主要考查了比例尺的意义，注意图上距离与实际距离的单位要统一.

2. 将抛物线 $y = -x^2$ 向右平移 3 个单位，再向下平移 2 个单位后所得新抛物线的顶点是 ()

- A. (3, -2) B. (-3, -2) C. (3, 2) D. (-3, 2)

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据平移规律，可得顶点式解析式.

【详解】 将抛物线 $y = -x^2$ 向右平移 3 个单位，再向下平移 2 个单位后，

得 $y = -(x-3)^2 - 2$,

$\therefore$ 顶点坐标为 (3, -2),

故答案为： A.

【点睛】 本题考查了函数图象的平移，要求熟练掌握平移的规律：左加右减，上加下减，是解题的关键.

3. 已知 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, 而且 $\vec{b}$ 和 $\vec{a}$ 的方向相反, 那么下列结论中正确的是 ()

- A. $3\vec{a} = 2\vec{b}$ B. $2\vec{a} = 3\vec{b}$ C. $3\vec{a} = -2\vec{b}$ D. $2\vec{a} = -3\vec{b}$

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, 而且 $\vec{b}$ 和 $\vec{a}$ 的方向相反, 可得两者的关系, 即可求解.

【详解】 $\because |\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, 而且 $\vec{b}$ 和 $\vec{a}$ 的方向相反

$\therefore \vec{a} = -\frac{3}{2}\vec{b}$

故选 D.

【点睛】 本题考查的是向量，熟练掌握向量的定义是解题的关键.

4. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AP > BP$ ，则下列比例式能成立的是 ()

A. $\frac{AB}{AP} = \frac{BP}{AB}$

B. $\frac{BP}{AP} = \frac{AB}{BP}$

C. $\frac{AP}{AB} = \frac{BP}{AP}$

D. $\frac{AB}{AP} = \frac{BP}{PA}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据黄金分割的定义求解即可.

【详解】 解：根据黄金分割定义可知：

AP 是 AB 和 BP 的比例中项，

$$\text{即 } AP^2 = AB \cdot BP,$$

$$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{BP}{AP}.$$

故选： C.

【点睛】 本题考查了黄金分割，解决本题的关键是掌握黄金分割定义(把线段 AB 分成两条线段 AP 和 BP ($AP > BP$)，且使 AP 是 AB 和 BP 的比例中项，叫做把线段 AB 黄金分割，点 P 叫做线段 AB 的黄金分割点).

5. 在离旗杆 20 米处的地方，用测角仪测得旗杆顶的仰角为 α ，如测角仪的高为 1.5 米，那么旗杆的高为 () 米

A. $20 \cot \alpha$

B. $20 \tan \alpha$

C. $1.5 + 20 \tan \alpha$

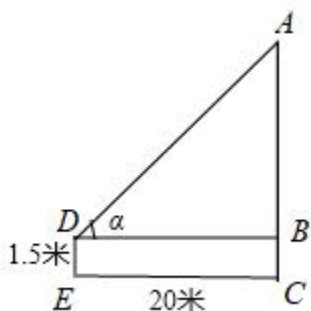
D. $1.5 + 20 \cot \alpha$

【答案】 C

【解析】

【分析】 由题意得，在直角三角形中，知道了已知角的邻边求对边，用正切值计算即可.

【详解】 解：如图所示， $BD=20$ 米， $DE=1.5$ 米



在 $Rt\triangle ABD$ 中， $\angle ADB = \alpha$

$$\therefore AB = BD \cdot \tan \alpha = 20 \tan \alpha$$

又四边形 $BCED$ 是矩形，

$$\therefore BC = DE = 1.5 \text{ 米}$$

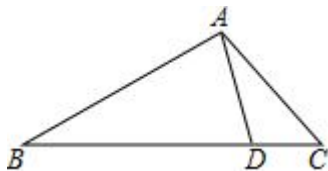
$$\therefore AC = AB + BC = 20 \tan \alpha + 1.5$$

所以，旗杆的高为 $(1.5+20\tan\alpha)$ 米.

故选: C

【点睛】 本题考查仰角的定义，要求学生能借助仰角构造直角三角形并解直角三角形.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC = 2$ ， $BC = 4$ ， D 为 BC 边上的一点，且 $\angle CAD = \angle B$. 若 $\triangle ADC$ 的面积为 a ，则 $\triangle ABD$ 的面积为 ()



- A. $2a$ B. $\frac{5}{2}a$ C. $3a$ D. $\frac{7}{2}a$

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据相似三角形的判定定理得到 $\triangle ACD \sim \triangle BCA$ ，再由相似三角形的性质得到答案.

【详解】 $\because \angle CAD = \angle B$ ， $\angle ACD = \angle BCA$ ，

$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCA$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCA}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2, \text{ 即 } \frac{a}{S_{\triangle BCA}} = \frac{1}{4},$$

解得， $\triangle BCA$ 的面积为 $4a$ ，

$\therefore \triangle ABD$ 的面积为: $4a - a = 3a$ ，

故选 C.

【点睛】 本题考查相似三角形的判定定理和性质，解题的关键是熟练掌握相似三角形的判定定理和性质.

二、填空题

7. 计算: $3(2\vec{a} - \vec{b}) - 2(2\vec{a} - 3\vec{b}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2\vec{a} + 3\vec{b}$

【解析】

【分析】 按向量的运算法则即可得结果

【详解】 解: $3(2\vec{a} - \vec{b}) - 2(2\vec{a} - 3\vec{b})$

$$= 6\vec{a} - 3\vec{b} - 4\vec{a} + 6\vec{b}$$

$$= 2\vec{a} + 3\vec{b}$$

故答案为: $2\vec{a} + 3\vec{b}$

【点睛】 本题为平面向量的加减混合运算，熟练掌握运算法则是解答本题的关键.

8. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{6}$, 则 $\angle B =$ _____.

【答案】 30°

【解析】

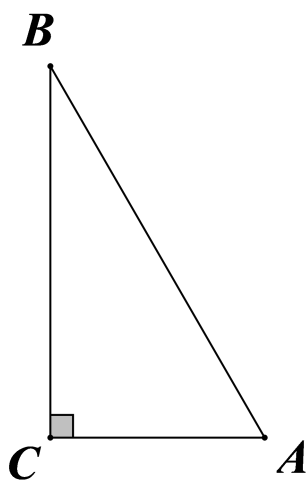
【分析】 根据正切定义, 先求出 $\tan B$, 再求出 $\angle B$ 的度数即可.

【详解】 解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{6}$,

$$\therefore \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ,$$

故答案为: 30°



【点睛】 本题考查了解直角三角形, 掌握三角形两锐角之间、三边之间和边角之间的关系是解题的关键.

9. 在一个边长为 2 的正方形中挖去一个小正方形, 使小正方形四周剩下部分的宽度均为 x , 若剩下阴影部分的面积为 y , 那么 y 关于 x 的函数解析式是_____.

【答案】 $y = -4x^2 + 8x$

【解析】

【分析】 根据剩下部分的面积=大正方形的面积-小正方形的面积得出 y 与 x 的函数关系式即可.

【详解】 解: 设剩下部分的面积为 y , 则:

$$y = 4 - (2-2x)^2 = -4x^2 + 8x \quad (0 < x < 1),$$

故答案为: $y = -4x^2 + 8x$.

【点睛】 本题主要考查了根据实际问题列二次函数关系式, 利用剩下部分的面积=大正方形的面积-小正方形的面积得出是解题关键.

10. 抛物线 $y = ax^2 + ax + 2$ ($a \neq 0$) 的对称轴是直线_____.

【答案】 $x = -\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】依据抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴方程 $x = -\frac{b}{2a}$ ，可以得出结论.

【详解】解：∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴方程 $x = -\frac{b}{2a}$ ，

∴ 抛物线 $y = ax^2 + ax + 2$ ($a \neq 0$) 的对称轴是 $x = -\frac{a}{2a} = -\frac{1}{2}$.

即对称轴是 $x = -\frac{1}{2}$.

故答案为： $x = -\frac{1}{2}$.

【点睛】 本题主要考查二次函数的对称轴，掌握二次函数的对称轴的求法是解题的关键.

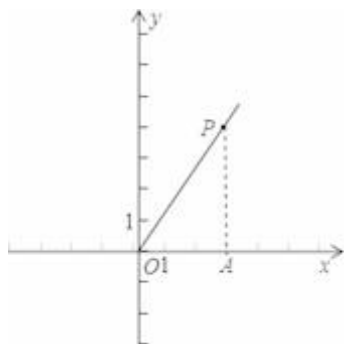
11. 如果在平面直角坐标系 xOy 中，点 P 的坐标为 $(3,4)$ ，射线 OP 与 X 轴的正半轴所夹的角为 α ，那么 α 的余弦值等于_____.

【答案】 $\frac{3}{5}$.

【解析】

【分析】 画出图形，根据勾股定理求出 OP ，根据锐角三角函数的定义求出即可.

【详解】解：过 P 作 $PA \perp x$ 轴于 A ,



∵ $P(3, 4)$,

∴ $PA=4$, $OA=3$,

由勾股定理得： $OP=5$,

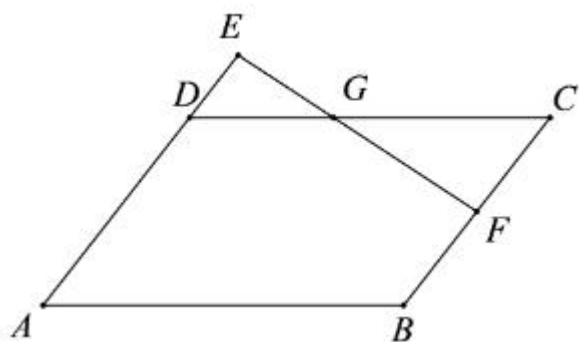
∴ α 的余弦值是 $\frac{OA}{OP} = \frac{3}{5}$,

答案为： $\frac{3}{5}$.

考点： 1.锐角三角函数的定义； 2.坐标与图形性质； 3.勾股定理.

12. 如图所示，在平行四边形 $ABCD$ 中， F 为 BC 中点，延长 AD 至 E ，使 $DE:AD=1:3$ ，连结 EF 交 DC

于点 G ，则 $S_{\triangle DEG} : S_{\triangle CFG}$ 等于_____.



【答案】 4: 9

【解析】

【分析】 根据相似三角形的性质以及平行四边形的性质即可求出答案.

【详解】 解: $\because DE:AD=1:3$,

设 $DE=x$, $AD=3x$,

在 $\square ABCD$ 中,

$\therefore AD=BC=3x$,

$\because$ 点 F 为 BC 的中点,

$\therefore CF=\frac{3x}{2}$,

$\because DE \parallel BC$,

$\therefore \triangle DEG \sim \triangle CFG$,

$\therefore \frac{S_{\triangle DEG}}{S_{\triangle CFG}} = \left(\frac{DF}{CF}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$,

故答案为: 4: 9.

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质, 相似三角形判定和性质, 解题的关键是熟练运用相似三角形的判定, 本题属于基础题型.

13. 已知二次函数 $y = -x^2 - 2x + 3 - n$ (n 为常数), 若该函数图像与 x 轴只有一个公共点, 则 $n =$ _____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 根据抛物线与 x 轴有一个交点, 即 $\Delta = 0$, 即可求出 n 的值.

【详解】 解: $\because$ 二次函数 $y = -x^2 - 2x + 3 - n$ 图象与 x 轴有且只有一个公共点,

$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times (3-n) = 0$,

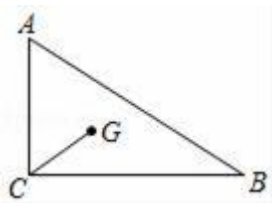
解得: $n = 4$,

故答案为: 4.

【点睛】 本题主要考查二次函数与 x 轴的交点个数, $\Delta = b^2 - 4ac$ 决定抛物线与 x 轴的交点个数. $\Delta = b^2 - 4ac$

>0 时, 抛物线与 x 轴有 2 个交点; $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时, 抛物线与 x 轴有 1 个交点; $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时, 抛物线与 x 轴没有交点.

14. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, $CG = 2$, $\sin \angle ACG = \frac{2}{3}$, 则 BC 长为_____.

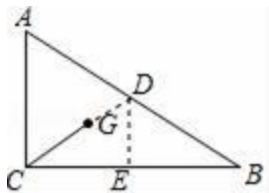


【答案】 4.

【解析】

【分析】 延长 CG 交 AB 于 D , 作 $DE \perp BC$ 于 E , 由点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 得到 $CG = 2$, 求得 $CD = 3$, 点 D 为 AB 的中点, 根据等腰三角形的性质得到 $DC = DB$, 又 $DE \perp BC$, 求得 $CE = BE = \frac{1}{2} BC$, 解直角三角形即可得到结论.

【详解】 延长 CG 交 AB 于 D , 作 $DE \perp BC$ 于 E ,



$\because$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$\therefore CG = 2$,

$\therefore CD = 3$, 点 D 为 AB 的中点,

$\therefore DC = DB$, 又 $DE \perp BC$,

$\therefore CE = BE = \frac{1}{2} BC$,

$\because \angle ACG + \angle DCE = \angle DCE + \angle CDE = 90^\circ$,

$\therefore \angle ACG = \angle CDE$,

$\therefore \sin \angle ACG = \sin \angle CDE = \frac{2}{3}$,

$\therefore CE = 2$,

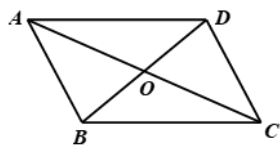
$\therefore BC = 4$

故答案为 4.

【点睛】 本题考查的是三角形的重心的概念和性质以及锐角三角函数的定义, 掌握三角形的重心是三角形三条中线的交点, 且重心到顶点的距离是它到对边中点的距离的 2 倍是解题的关键.

15. 如图, 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 设 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, 那么向量 $\overrightarrow{AB}$ 关

于 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的分解式为_____.



【答案】 $\vec{b} - \vec{a}$

【解析】

【分析】 根据 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 计算即可.

【详解】 解: $\because \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b},$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$

$$= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

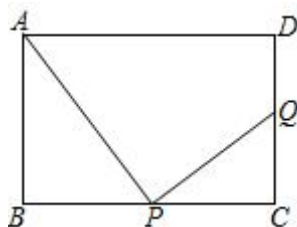
$$= -\vec{a} + \vec{b}$$

$$= \vec{b} - \vec{a},$$

故答案为: $\vec{b} - \vec{a}$.

【点睛】 此题考查了平面向量的知识. 注意掌握三角形法则的应用是解决本题的关键.

16. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=3$, $BC=4$, 点 P 为射线 BC 上的一个动点, 过点 P 的直线 PQ 垂直于 AP 与直线 CD 相交于点 Q , 当 $BP=5$ 时, $CQ=$ _____.

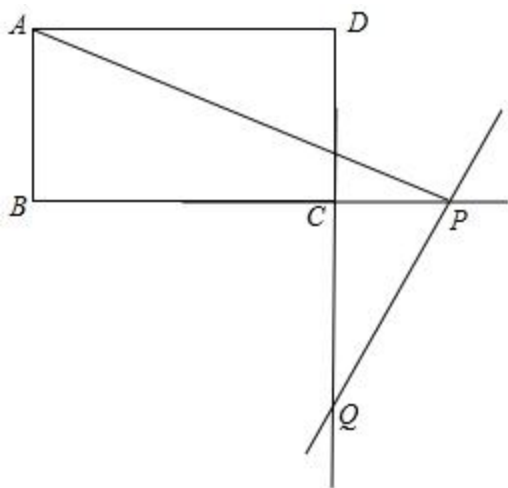


【答案】 $\frac{5}{3}$

【解析】

【分析】 通过证明 $\triangle ABP \sim \triangle PCQ$, 可得 $\frac{AB}{CP} = \frac{BP}{CQ}$, 即可求解.

【详解】 解: 如图,



$$\because BP = 5, BC = 4,$$

$$\therefore CP = 1,$$

$$\because PQ \perp AP,$$

$$\therefore \angle APQ = 90^\circ = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle APB + \angle BAP = 90^\circ = \angle APB + \angle BPQ,$$

$$\therefore \angle BAP = \angle BPQ,$$

$$\text{又} \because \angle ABP = \angle PCQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABP \sim \triangle PCQ,$$

$$\therefore \frac{AB}{CP} = \frac{BP}{CQ},$$

$$\therefore \frac{3}{1} = \frac{5}{CQ}$$

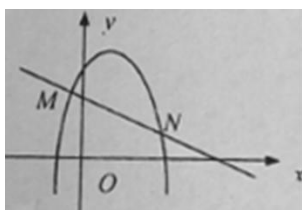
$$\therefore CQ = \frac{5}{3},$$

$$\text{故答案为: } \frac{5}{3}.$$

【点睛】本题考查相似三角形、矩形的性质。根据题意找相似的条件是关键。利用相似比计算线段的长度是常用的方法。

17. 定义：直线与抛物线两个交点之间的距离称作抛物线关于直线的“割距”，如图，线段 MN 长就是抛物线关于直线的“割距”。已知直线 $y = -x + 3$ 与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B ，点 B 恰好是抛物线

$y = -(x - m)^2 + n$ 的顶点，则此时抛物线关于直线 y 的割距是_____。



【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 先求出 B 点坐标，从而求出抛物线解析式，然后求出直线与抛物线的两个交点，利用两点距离公式即可求出答案.

【详解】 解： $\because B$ 是直线 $y = -x + 3$ 与 y 轴的交点，

$\therefore B$ 点坐标为 $(0, 3)$ ，

$\because B$ 是抛物线 $y = -(x-m)^2 + n$ 的顶点，

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -x^2 + 3$ ，

$$\therefore \begin{cases} y = -x + 3 \\ y = -x^2 + 3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases},$$

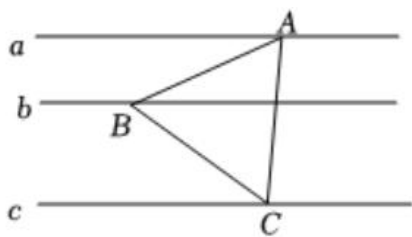
$\therefore$ 直线 $y = -x + 3$ 与抛物线 $y = -x^2 + 3$ 的两个交点坐标为 $(0, 3)$ ， $(1, 2)$ ，

$\therefore$ 抛物线关于直线 y 的割距是 $\sqrt{(0-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$ ，

故答案为： $\sqrt{2}$.

【点睛】 本题主要考查了求一次函数与 y 轴交点，二次函数与一次函数的交点，两点距离公式，二次函数图像的性质，熟知相关知识是解题的关键.

18. 如图， $a \parallel b \parallel c$ ，直线 a 与直线 b 之间的距离为 $\sqrt{3}$ ，直线 c 与直线 b 之间的距离为 $2\sqrt{3}$ ，等边 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别在直线 a 、直线 b 、直线 c 上，则等边三角形的边长是_____.



【答案】 $2\sqrt{7}$

【解析】

【分析】 如图所示，过点 A 作 $AD \perp$ 直线 c 于 D ，过点 B 作 $EF \perp$ 直线 b 分别交直线 a 、 c 于 F 、 E ，先证明四边形 $ADEF$ 是矩形，得到 $AF = DE$ ， $AD = EF$ ，再由直线 a 与直线 b 之间的距离为 $\sqrt{3}$ ，直线 c 与直线 b 之间的距离为 $\sqrt{3}$ ，得到 $BF = \sqrt{3}$ ， $BE = 2\sqrt{3}$ ，则 $AD = EF = BF + BE = 3\sqrt{3}$ ，可设 $AB = AC = BC = x$ ，由勾股定理得： $AF = \sqrt{x^2 - 3}$ ， $EC = \sqrt{x^2 - 12}$ ， $CD = \sqrt{x^2 - 27}$ ，再由 $AF = EC + CD$ ，即可得到

$\sqrt{x^2-3} = \sqrt{x^2-12} + \sqrt{x^2-27}$ ，由此求解即可。

【详解】解：如图所示，过点 A 作 $AD \perp$ 直线 c 于 D ，过点 B 作 $EF \perp$ 直线 b 分别交直线 a 、 c 于 F 、 E ，

$\because a \parallel b \parallel c$ ，

$\therefore AD \perp$ 直线 a ， $EF \perp$ 直线 a ， $EF \perp$ 直线 c ，

$\therefore$ 四边形 $ADEF$ 是矩形，

$\therefore AF=DE$ ， $AD=EF$ ，

$\therefore$ 直线 a 与直线 b 之间的距离为 $\sqrt{3}$ ，直线 c 与直线 b 之间的距离为 $2\sqrt{3}$ ，

$\therefore BF = \sqrt{3}$ ， $BE = 2\sqrt{3}$ ，

$\therefore AD = EF = BF + BE = 3\sqrt{3}$ ，

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore$ 可设 $AB=AC=BC=x$ ，

由勾股定理得： $AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = \sqrt{x^2 - 3}$ ， $EC = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \sqrt{x^2 - 12}$ ，

$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{x^2 - 27}$ ，

又 $\because AF = EC + CD$ ，

$\therefore \sqrt{x^2 - 3} = \sqrt{x^2 - 12} + \sqrt{x^2 - 27}$ ，

$\therefore x^2 - 3 = x^2 - 12 + x^2 - 27 + 2\sqrt{x^2 - 12} \cdot \sqrt{x^2 - 27}$ ，

$\therefore 36 - x^2 = 2\sqrt{x^2 - 12} \cdot \sqrt{x^2 - 27}$ ，

$\therefore x^4 - 72x^2 + 1296 = 4(x^2 - 12)(x^2 - 27)$

$\therefore x^4 - 72x^2 + 1296 = 4(x^4 - 39x^2 + 324)$ ，

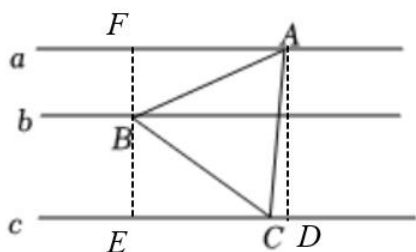
$\therefore x^4 - 72x^2 + 1296 = 4x^4 - 156x^2 + 1296$ ，

$\therefore 3x^4 - 84x^2 = 0$ ，

解得 $x = 2\sqrt{7}$ （不符合题意的值已经舍去），

$\therefore \triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{7}$ 。

故答案为： $2\sqrt{7}$ 。



【点睛】 本题主要考查了等边三角形的性质，矩形的性质与判定，勾股定理，平行线的间距，解题的关键在于熟练掌握相关知识.

三、解答题

19. 求值: $\tan^2 60^\circ - \frac{\cos 45^\circ}{\cot 45^\circ - \sin 45^\circ}$ (结果保留根号).

【答案】 $2 - \sqrt{2}$.

【解析】

【分析】 利用 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cot 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 代入, 利用二次根式的计算法则计算即可.

【详解】 解: $\tan^2 60^\circ - \frac{\cos 45^\circ}{\cot 45^\circ - \sin 45^\circ}$

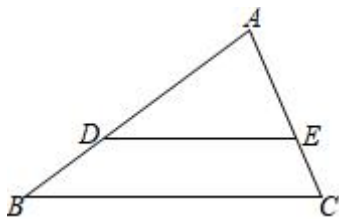
$$= (\sqrt{3})^2 - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}},$$
$$= 3 - \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}},$$
$$= 3 - (\sqrt{2} + 1),$$
$$= 2 - \sqrt{2}.$$

【点睛】 本题考查了特殊值的三角函数值, 和二次根式的混合运算, 熟记特殊值的三角函数值和二次根式的运算法则是解题关键.

20. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D、E 分别在边 AB、AC 上, $DE \parallel BC$, 且 $DE = \frac{2}{3} BC$.

(1) 如果 $AC=6$, 求 AE 的长;

(2) 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 求向量 $\overrightarrow{DE}$ (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示).



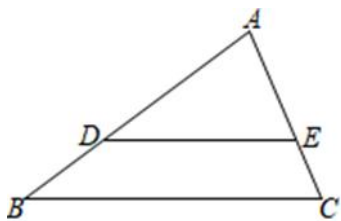
【答案】 (1) 4; (2) $DE = \frac{2}{3}(b - a)$.

【解析】

【分析】(1) 由平行线截线段成比例求得 AE 的长度;

(2) 利用平面向量的三角形法则解答.

【详解】(1) 如图,



$$\because DE \parallel BC, \text{ 且 } DE = \frac{2}{3} BC,$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}.$$

又 $AC=6$,

$$\therefore AE=4.$$

$$(2) \because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{b},$$

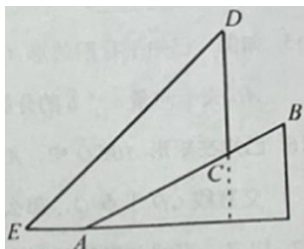
$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}.$$

$$\text{又 } DE \parallel BC, \quad DE = \frac{2}{3} BC,$$

$$\therefore DE = \frac{2}{3} BC = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a})$$

【点睛】考查了平面向量, 需要掌握平面向量的三角形法则和平行向量的定义.

21. 为践行“绿水青山就是金山银山”的重要思想, 某森林保护区开展了寻找古树活动. 如图, 在一个坡度 (或坡比) $i=1:2.4$ 的山坡 AB 上发现棵古树 CD , 测得古树底端 C 到山脚点 A 的距离 $AC=26\text{ m}$, 在距山脚点 A 处水平距离 6 m 的点 E 处测得古树顶端 D 的仰角 $\angle AED=48^\circ$ (古树 CD 与山坡 AB 的剖面、点 E 在同一平面上, 古树 CD 所在直线与直线 AE 垂直), 则古树 CD 的高度约为多少米? (结果精确到整数) (数据 $\sin 48^\circ \approx 0.74$, $\cos 48^\circ \approx 0.67$, $\tan 48^\circ \approx 1.11$)



【答案】古树 CD 的高度约为 23 米.

【解析】

【分析】延长 DC 交 EA 的延长线于点 F , 则 $CF \perp EF$, 令 $CF=k$, 则 $AF=2.4k$, 根据勾股定理求出 $k=10$, 得到 $AF=24\text{ m}$, $CF=10\text{ m}$, $EF=30\text{ m}$, 再根据锐角三角函数求出 DF 即可得到答案.

【详解】解：延长 DC 交 EA 的延长线于点 F ，则 $CF \perp EF$ ，

$\because$ 山坡 AC 上坡度 $i = 1:2.4$ ，

$\therefore$ 令 $CF = k$ ，则 $AF = 2.4k$ ，

在 $Rt\triangle ACF$ 中，由勾股定理得， $CF^2 + AF^2 = AC^2$ ，

$$\therefore k^2 + (2.4k)^2 = 26^2,$$

解得 $k = 10$ ，

$$\therefore AF = 24\text{m}, CF = 10\text{m},$$

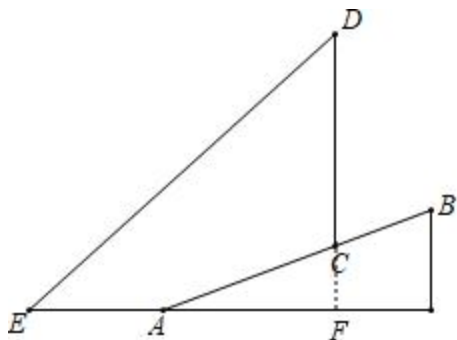
$$\therefore EF = 30\text{m},$$

在 $Rt\triangle DEF$ 中， $\tan E = \frac{DF}{EF}$ ，

$$\therefore DF = EF \cdot \tan E = 30 \times \tan 48^\circ = 30 \times 1.11 = 33.3\text{m},$$

$$\therefore CD = DF - CF = 23.3\text{m} \approx 23\text{m},$$

$\therefore$ 古树 CD 的高度约为 23m 。



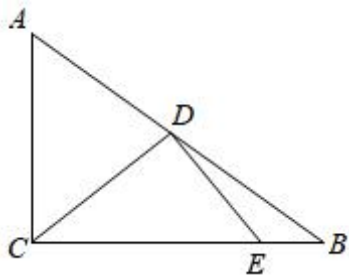
【点睛】此题考查了解直角三角形的实际应用，勾股定理，正确理解题意，构建直角三角形利用锐角三角函数解决问题是解题的关键。

22. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $\cos A = \frac{3}{5}$ 。 D 是 AB 边的中点，过点 D 作直线 CD 的垂线，

与边 BC 相交于点 E 。

(1) 求线段 CE 的长；

(2) 求 $\sin \angle BDE$ 的值。



【答案】(1) $CE = \frac{25}{4}$ (2) $\sin \angle BDE = \frac{7}{25}$

【解析】

【分析】(1)由勾股定理求出 BC ，再根据斜边上的中线求出 AD ， $\angle DCB = \angle B$ ，由余弦定理求出 CE ；

(2)作 $EF \perp AB$ 交 AB 于 F ，在直角三角形中由勾股定理列出关于 BF 的关系式，从而求出 $\angle BDE$ 的正弦值。

【详解】解：(1) $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ，

$$\cos A = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore AB = 10$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 8$$

又 $\because D$ 为 AB 中点，

$$\therefore AD = BD = CD = \frac{1}{2} AB = 5,$$

$$\therefore \angle DCB = \angle B,$$

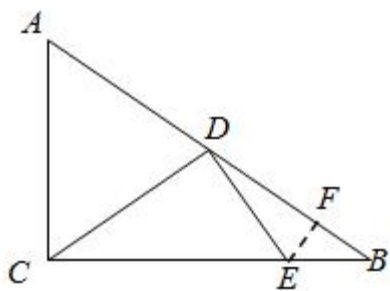
$$\therefore \cos \angle DCB = \frac{CD}{CE}$$

$$\therefore \cos \angle B = \frac{BC}{AB}$$

$$\therefore \frac{5}{CE} = \frac{8}{10}$$

$$\therefore CE = \frac{25}{4}$$

(2)作 $EF \perp AB$ 交 AB 于 F ，



由 (1)知 $CE = \frac{25}{4}$

则 $BE = 8 - \frac{25}{4} = \frac{7}{4}$

$$DE = \sqrt{CE^2 - CD^2} = \frac{15}{4}$$

设 $BF = x$ ，则

$$DF = BD - BF = 5 - x,$$

在 $Rt\triangle DEF$ 中,

$$EF^2 = DE^2 - DF^2 = \left(\frac{15}{4}\right)^2 - (5-x)^2$$

在 $Rt\triangle BEF$ 中,

$$EF^2 = BE^2 - BF^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 - x^2$$

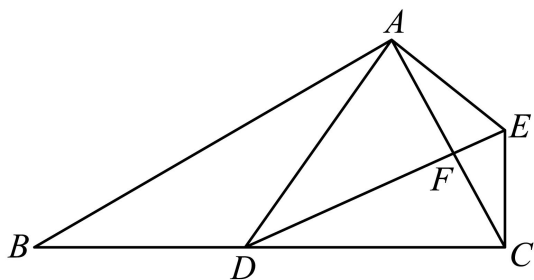
$$\therefore \frac{225}{16} - (5-x)^2 = \frac{49}{16} - x^2$$

$$\text{解得 } x = \frac{7}{5}$$

$$\therefore \sin \angle BDE = \frac{EF}{DE} = \frac{7}{25}$$

【点睛】 本题考查锐角三角函数、勾股定理，利用同角的锐角三角函数值相等是关键，方程思想是常用的数学思想.

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中， $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$ ， $\angle B = \angle ADE = 30^\circ$ ， AC 与 DE 相交于点 F ，联结 CE ，点 D 在边 BC 上.



(1) 求证: $\triangle ABD \sim \triangle ACE$;

(2) 若 $\frac{AD}{BD} = \sqrt{3}$ ，求 $\frac{DF}{CF}$ 的值.

【答案】 (1) 证明见解析; (2) $\frac{DF}{CF} = 3$.

【解析】

【分析】 (1) 先证 $\triangle BAC \sim \triangle DAE$ ，得出 $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ ，再证 $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ 即可;

(2) 证明 $\triangle ADF \sim \triangle ECF$ ，根据相似列出比例式即可求解.

【详解】 (1) $\because \angle BAC = \angle DAE$ ， $\angle B = \angle ADE$ ，

$\therefore \triangle BAC \sim \triangle DAE$ ，

$$\therefore \frac{BA}{AC} = \frac{DA}{AE},$$

$$\because \angle BAC = \angle DAE,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\therefore \triangle BAD \sim \triangle CAE.$$

$$(2) \because \triangle ABD \sim \triangle ACE,$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{EC}, \text{ 即 } \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC} = \sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $\angle ADE = 30^\circ$,

$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{AE}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \frac{AD}{CE} = \frac{AE}{EC} \div \frac{AE}{AD} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3,$$

$$\therefore \triangle BAD \sim \triangle CAE.$$

$$\therefore \angle B = \angle ACE = \angle ADE,$$

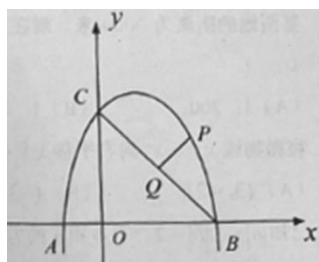
$$\therefore \angle AFD = \angle EFC$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle ECF,$$

$$\therefore \frac{DF}{CF} = \frac{AD}{EC} = 3.$$

【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质和解直角三角形，解题关键是熟练运用相似三角形的判定定理进行推理证明.

24. 已知，二次函数 $y = -x^2 + bx + c$ 的图像与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ ，点 $B(3, 0)$ ，与 y 轴交点 C .



(1) 求二次函数解析式;

(2) 设点 $E(t, 0)$ 为 x 轴上一点，且 $AE = CE$ ，求 t 的值;

(3) 若点 P 是直线 BC 上方抛物线上一动点，联结 BC ，过点 P 作 $PQ \perp BC$ ，交 BC 于点 Q ，求线段 PQ 的最大值及此时点 P 的坐标.

【答案】(1) $y = -x^2 + 2x + 3$; (2) 当点 $P\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$ 时, PQ 的最大值是 $\frac{9}{8}\sqrt{2}$.

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法，把点 A 、 B 坐标代入抛物线的解析式解方程即可;

(2) 先求出点 C 的坐标, 再利用两点间的距离公式解答即可;

(3) 先求出直线 BC 的解析式, 设点 $P(p, -p^2 + 2p + 3)$, 用含 P 的式子表示出 PH , 最后利用二次函数的性质得出结果.

【详解】(1) 把 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ 代入 $y = -x^2 + bx + c$ 中,

$$\text{得} \begin{cases} 0 = -1 - b + c \\ 0 = -9 + 3b + c \end{cases}$$

解得: $b = 2$, $c = 3$,

$$\therefore y = -x^2 + 2x + 3.$$

(2) 在二次函数解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$,

令 $x=0$, 则 $y=3$

则点 C 坐标 $(0, 3)$, 而 $A(-1, 0)$, $E(t, 0)$,

$$\therefore CE = \sqrt{OE^2 + OC^2} = \sqrt{t^2 + 3^2}, \quad AE = |t + 1|$$

$$\because AE = CE,$$

$$\therefore |t + 1| = \sqrt{t^2 + 3^2},$$

$$\therefore t = 4;$$

(3) 设直线 BC 为: $y=kx+b$,

$$\text{把 } B(3, 0) \text{ 和 } C(0, 3) \text{ 代入得: } \begin{cases} 0 = 3k + b \\ 3 = b \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = -1 \\ b = 3 \end{cases},$$

$$\therefore l_{BC}: y = -x + 3,$$

$$\because OC = OB = 3,$$

$$\therefore \angle BCO = 45^\circ,$$

过点 P 作 $PH \parallel y$ 轴, 交 BC 于点 H ,

$$\therefore \angle PHQ = 45^\circ,$$

$$\because PQ \perp BC,$$

$\therefore \triangle PQH$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore PQ = PH \cdot \sin \angle PHQ = \frac{\sqrt{2}}{2} PH,$$

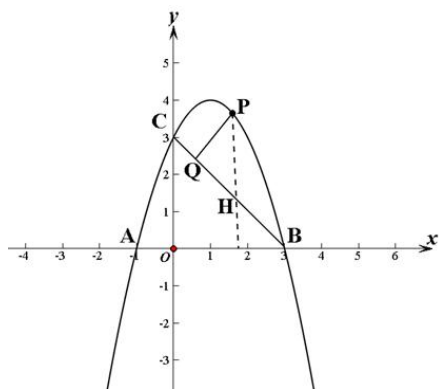
设点 $P(p, -p^2 + 2p + 3)$, 则 $H(p, -p + 3)$,

$$\therefore PH = -p^2 + 3p = -\left(p - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4},$$

当且仅当 $p = \frac{3}{2}$ 时, PH 的最大值是 $\frac{9}{4}$,

$$\therefore PQ = \frac{\sqrt{2}}{2} PH = \frac{9}{8} \sqrt{2},$$

当点 $P\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$ 时, PQ 的最大值是 $\frac{9}{8} \sqrt{2}$.



【点睛】本题考查了待定系数法求二次函数的解析式, 一次函数的解析式, 特殊的三角函数值, 平行线的性质, 解题的关键是正确作出辅助线.

25. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 4$, $BC = 3$, 点 O 是边 AC 上的一个动点, 过 O 作 $OD \perp AB$, D 为垂足, 在线段 AC 上取 $OE = OD$, 联结 ED , 作 $EP \perp ED$, 交射线 AB 于点 P , 交射线 CB 于点 F .

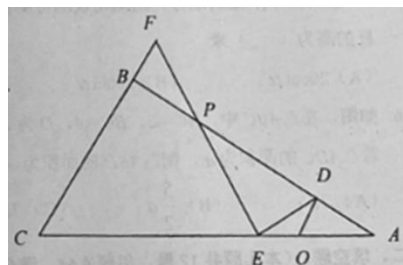
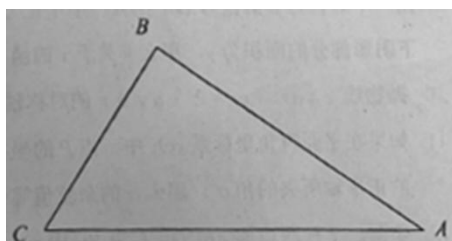


图 1



备用图

- (1) 如图 1 所示, 求证: $\triangle ADE \sim \triangle AEP$;
- (2) 设 $OA = x$, $AP = y$, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;
- (3) 当 $BF = 1$ 时, 求线段 AP 的长.

【答案】(1) 证明见解析; (2) $y = \frac{16}{5}x \left(0 < x \leq \frac{25}{8}\right)$; (3) $AP = 2$ 或 6 .

【解析】

【分析】(1) 证 $\triangle ADE \sim \triangle AEP$, 需找出两组对应相等的角. 证明 $\angle AEP = \angle ADE$; 再加上两三角形的公共角 $\angle A$, 即可证得两三角形相似;

(2) 由 $\triangle AOD \sim \triangle ACB$, 可得 $OD = \frac{3}{5}OA$, $AD = \frac{4}{5}OA$; 又由 $\triangle ADE \sim \triangle AEP$, 可得 $y = \frac{16}{5}x$;

(3) 由 $\triangle PBF \sim \triangle PED$ 和 $\triangle ADE \sim \triangle AEP$, 得 $\frac{BF}{BP} = \frac{AE}{AP}$; 再将 $y = \frac{16}{5}x$, $BP = 4 - AP = 4 - \frac{16}{5}x$ 代入, 即可求得

AP 的长.

【详解】(1) 证明: $\because OE = OD$,

$$\therefore \angle ODE = \angle OED,$$

$$\because OD \perp AB, EP \perp ED,$$

$$\therefore \angle ADO = \angle PED,$$

$$\therefore \angle ADO + \angle ODE = \angle PED + \angle OED,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AEP,$$

$$\because \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle AEP;$$

$$(2) \because \angle ABC = 90^\circ, AB = 4, BC = 3,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

$$\because OD \perp AP, BC \perp AB,$$

$$\therefore OD \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AO} = \frac{AB}{AC},$$

$$\therefore AD = \frac{4}{5}x, DO = EO = \frac{3}{5}x,$$

$$\because \triangle ADE \sim \triangle AEP,$$

$$\therefore \frac{AE}{AP} = \frac{AD}{AE}, \text{ 即 } AE^2 = AD \cdot AP,$$

$$\therefore \left(x + \frac{3}{5}x\right)^2 = \frac{4}{5}x \cdot y,$$

$$\therefore y = \frac{16}{5}x,$$

$$\because OA + OE < AC,$$

$$\therefore x + \frac{3}{5}x \leq 5, \text{ 即 } x \leq \frac{25}{8},$$

$$\therefore y = \frac{16}{5}x \left(0 < x \leq \frac{25}{8}\right);$$

$$(3) \text{ ①当点 } P \text{ 在线段 } AB \text{ 上时, } BP = 4 - y = 4 - \frac{16}{5}x,$$

$$\because \triangle PBF \sim \triangle PED,$$

$$\therefore \frac{BF}{BP} = \frac{ED}{EP},$$

$$\because \triangle ADE \sim \triangle AEP,$$

$$\therefore \frac{AE}{AP} = \frac{ED}{EP},$$

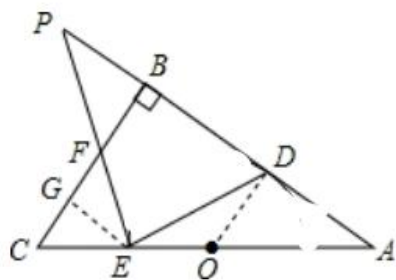
$$\therefore \frac{BF}{BP} = \frac{AE}{AP},$$

$$\therefore \frac{1}{4 - \frac{16}{5}x} = \frac{\frac{8}{5}x}{\frac{16}{5}x},$$

$$\therefore x = \frac{5}{8},$$

$$\therefore AP = 2.$$

②当点 P 在 AB 延长线上时,



$$\because \angle CFE = \angle PFB = \angle PDE, \quad \angle CEF + \angle DEO = \angle PDE + \angle EDO,$$

$$\therefore \angle CEF = \angle PDE,$$

$$\therefore \angle CEF = \angle CFE,$$

$$\therefore EC = FC = 2.$$

过点 E 作 $EG \perp CF$, 垂足是点 G ,

$$\therefore \frac{EG}{CE} = \frac{AB}{AC},$$

$$\therefore EG = \frac{8}{5}, \quad CG = \frac{6}{5},$$

$$\because EG \parallel BP,$$

$$\therefore \frac{EG}{PB} = \frac{GF}{BF},$$

$$\therefore PB = 2,$$

$$\therefore AP = 2 + 4 = 6.$$

综上所述, $AP = 2$ 或 6 .

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定和性质, 一次函数的应用, 以及分类讨论的数学思想; 其中由相似三角形的性质得出比例式是解题关键. 注意: 求相似比不仅要认准对应边, 还需注意两个三角形的先后次序. 此题还是一个综合性很强的题目, 难度很大, 有利于培养同学们钻研和探索问题的能力.