

2024 学年第二学期九年级数学练习

(完卷时间 100 分钟, 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 若有理数 a, b 互为相反数, 则下列等式恒成立的是 ()

A. $a - b = 0$ B. $a + b = 0$ C. $ab = 1$ D. $ab = -1$

【答案】B

【解析】

【分析】根据相反数的意义可直接进行求解.

【详解】解: 由有理数 a, b 互为相反数, 则有 $a + b = 0$,

故选 B.

【点睛】本题主要考查相反数的意义, 熟练掌握相反数的意义是解题的关键.

2. 若式子 $\sqrt{x+5}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是 ()

A. $x > -5$ B. $x < -5$ C. $x \neq -5$ D. $x \geq -5$

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件进行求解即可.

【详解】解: $\because$ 式子 $\sqrt{x+5}$ 在实数范围内有意义,

$$\therefore x + 5 \geq 0,$$

$$\therefore x \geq -5,$$

故选 D.

【点睛】本题主要考查了二次根式有意义的条件, 熟知二次根式有意义的条件是被开方数大于等于 0 是解题的关键.

3. 某餐饮公司为一所学校提供午餐, 有 10 元, 12 元, 15 元三种价格的盒饭供师生选择, 每人选一份, 该校师生某一天购买的这三种价格的盒饭数依次占 50%, 30%, 20%. 那么这一天该校师生购买盒饭费用的平均数和中位数分别是 ()

- A. 12 元, 12 元 B. 12 元, 11 元 C. 11.6 元, 12 元 D. 11.6 元, 11 元

【答案】D

【解析】

【分析】根据加权平均数定义, 中位数的定义求解, 根据占比, 中位数为 10, 12 的平均数.

【详解】解: 平均数 $= 10 \times 50\% + 12 \times 30\% + 15 \times 20\% = 11.6$;

$$\text{中位数} = \frac{1}{2}(10 + 12) = 11;$$

故选: D.

【点睛】本题考查加权平均数定义, 中位数; 理解相关的定义是解题的关键.

4. 现有五张纸片, 这五张纸片上的几何图形分别是等边三角形、矩形、等腰梯形、正五边形、圆, 从这五张纸片中任意抽取一张恰好是中心对称图形的概率是 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【答案】B

【解析】

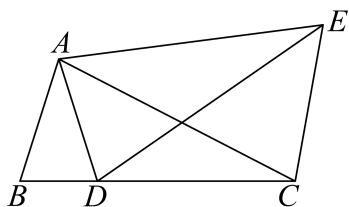
【分析】本题考查了概率公式求概率, 中心对称图形的识别. 在平面内一个图形绕着一点旋转 180 度, 旋转后的图形与原来的图形完全重合, 这个图形就叫做中心对称图形. 先判断出 5 个图形中中心对称图形的数量, 再直接利用概率公式求解即可求得答案.

【详解】解: 等边三角形、矩形、等腰梯形、正五边形、圆, 这 5 个图形中: 矩形、圆是中心对称图形, 共 2 个,

因此从这五张纸片中任意抽取一张恰好是中心对称图形的概率是 $\frac{2}{5}$,

故选 B.

5. 如图, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转, 点 B 旋转至 BC 边上的 D 点, 点 C 旋转至 E, 那么下列结论不一定正确的是 ()



A. $\angle ACB = \angle AED$

B. $\angle BAD = \angle CAE$

C. $\angle ADE = \angle ACE$

D. $\angle DAC = \angle CDE$

【答案】D

【解析】

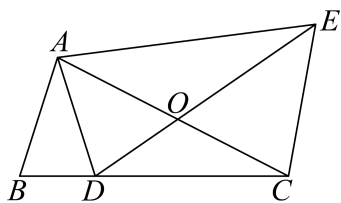
【分析】本题考查了旋转的性质，等腰三角形的性质，三角形内角和定理，掌握旋转的性质是解题的关键. 根据旋转的性质，逐项进行判断即可.

【详解】解：∵ ABC 绕点 A 顺时针旋转得到 ADE

根据旋转的性质可知： $\angle ACB = \angle AED$ ，旋转角 $\angle BAD = \angle CAE$ ，

故 A，B 不符合题意；

如图，记 AC ， DE 的交点为 O ，



由旋转可知， $\angle ACB = \angle AED$ ，

$$\therefore \angle AOE = \angle DOC,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle EDC,$$

$$\therefore \angle ADE + \angle EDC = \angle ABD + \angle BAD, \quad \angle EAC = \angle BAD,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ADE,$$

由旋转可得： $AB = AD$, $AC = AE$ ，则 $\angle ABD = \angle ADB$, $\angle ACE = \angle AEC$ ，

而 $\angle BAD = \angle CAE$ ，

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB = \angle ACE = \angle AEC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ACE$$

故 C 不符合题意；

$$\therefore \angle CDE = \angle CAE, \quad \angle BAD = \angle CAE,$$

当 $\angle DAC = \angle CDE$ 时，

$\therefore \angle DAC = \angle CAE = \angle BAD$ ，与题干信息不符，

故 D 符合题意.

故选: D

6. “利用描点法画出函数图像, 探究函数的一些简单性质”是初中阶段研究函数的常用方法, 那么函数

$y = \frac{1}{x-2}$ 具有的性质是 ()

A. $x > 0$ 时, y 的值随 x 的增大而减小

B. $x < 0$ 时, y 的值随 x 的增大而增大

C. 图像不经过第二象限

D. 图像不经过第四象限

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查反比例函数的图像与性质、描点法等知识点, 掌握相关知识是解答本题的关键.

根据题意得到 $x \neq 2$, 那么函数 $y = \frac{1}{x-2}$ 在 $x > 2$ 时, y 的值随 x 的增大而减小, $x < 2$ 时, y 的值随 x 的增大而减小, 即可判断 A、B, 再结合反比例函数性质得到经过的象限即可判断 C、D.

【详解】解: $\because 1 > 0$, $x - 2 \neq 0$,

即 $x \neq 2$,

那么函数 $y = \frac{1}{x-2}$ 在 $x > 2$ 时, y 的值随 x 的增大而减小, $x < 2$ 时, y 的值随 x 的增大而减小, 故 A、B 选项错误, 不符合题意;

$\therefore$ 图像不经过第二象限, 经过第四象限,

故 C 正确, 符合题意; D 选项错误, 不符合题意;

故选: C.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 计算: $x^5 \div x^2 =$ _____

【答案】 x^3

【解析】

【分析】利用同底数幂的除法法则进行计算, 即可求得答案.

【详解】解: $x^5 \div x^2 = x^3$,

故答案为: x^3 .

【点睛】本题考查了同底数幂的除法, 掌握同底数幂的除法法则是解答此题的关键.

8. 已知 $f(x) = x^{-1}$, 那么 $f(-1) =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 本题考查求函数值. 当已知自变量的值时, 求函数值就是将自变量代入解析式求代数式的值.

把 $x = -1$ 代入函数 $f(x) = x^{-1}$ 即可解答.

【详解】 解: $\because f(x) = x^{-1}$,

$$\therefore f(-1) = (-1)^{-1} = -1.$$

故答案为: -1.

9. 在实数范围内因式分解 $x^2 - 3 =$ _____

【答案】 $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

【解析】

【分析】 根据平方差公式分解因式即可.

【详解】 解: $x^2 - 3 = (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$.

故答案是: $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$.

【点睛】 本题考查了实数范围内分解因式, 掌握 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 是解题的关键.

10. 方程 $\sqrt{x+2} = x$ 的根是_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 先把方程两边平方, 使原方程化为整式方程 $x+2 = x^2$, 解此一元二次方程得到 $x_1 = 2$, $x_2 = -1$,

结合二次根式的性质, 去掉增根, 即可得到答案.

【详解】 方程两边平方得: $x+2 = x^2$

$$\therefore x_1 = 2, \quad x_2 = -1$$

$$\because \sqrt{x+2} \geq 0$$

$$\therefore \sqrt{x+2} = x \geq 0$$

$\therefore x_2 = -1$ 不符合题意, 故舍去

$\therefore$ 原方程的根为 $x = 2$

故答案为: $x = 2$.

【点睛】本题考查了一元二次方程、二次根式的知识; 解题的关键是熟练掌握一元二次方程、二次根式的性质, 从而完成求解.

11. 据网络平台数据统计, 截止到 2025 年 3 月底, 电影《哪吒之魔童闹海》总票房已突破 154.47 亿元, 位列全球影史票房榜第 5 名. 其中 154.47 亿元用科学记数法表示为_____元.

【答案】 1.5447×10^{10}

【解析】

【分析】本题考查了用科学记数法表示大于 10 的数, 解题关键是掌握科学记数法的表示方法, 将大于 10 的数写成 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq a < 10$, n 等于原数的整数位数减去 1.

【详解】解: $\because 154.47 \text{ 亿} = 15447000000 = 1.5447 \times 10^{10}$;

故答案为: 1.5447×10^{10} .

12. 如果关于 x 的方程 $x^2 - x + m = 0$ 有实数根, 那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \leq \frac{1}{4}$

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程根的判别式, 熟练掌握一元二次方程根的判别式是解题的关键. 根据方程有实根, 可得 $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times m \geq 0$, 解不等式即可.

【详解】解: $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - x + m = 0$ 有实数根,

$\therefore \Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times m \geq 0$,

解得 $m \leq \frac{1}{4}$.

故答案为: $m \leq \frac{1}{4}$.

13. 点 M 在线段 AB 上, 设 $\overrightarrow{AM} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BM} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{AB}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为_____.

【答案】 $\vec{a} - \vec{b}$

【解析】

【分析】本题考查了向量线性运算, 根据向量线性运算性质即可求解.

【详解】解: $\because \overrightarrow{AM} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BM} = \vec{b}$, 则 $\overrightarrow{MB} = -\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \vec{a} - \vec{b}$

故答案为: $\vec{a}-\vec{b}$.

14. 如图 1 为《天工开物》记载的用于舂捣谷物的工具---“碓(duì)”的结构简图, 图 2 为其平面示意图. 已知 $AB \perp CD$ 于点 B , AB 与水平线 l 相交于点 O , $OE \perp l$. 如果 $BC = 4$ 分米, $OB = 24$ 分米,

$\sin \angle BOE = \frac{24}{25}$, 那么点 C 到水平线 l 的距离 CF 为_____分米.



图 1

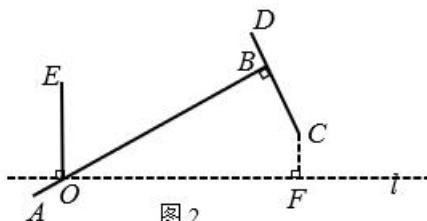


图 2

【答案】 $\frac{72}{25}$

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形的应用, 添加辅助线构造直角三角形是解题的关键. 延长 DC , 交直线 l 于点 G , 先证明 $\angle BGO = \angle BOE$, 然后求出 $\tan \angle BGO = \tan \angle CGF = \frac{24}{7}$, 最后根据

$\tan \angle BGO = \frac{AB}{BG} = \frac{24}{7}$ 列方程求解即可.

【详解】 解: 延长 DC , 交直线 l 于点 G ,

$\because AB \perp CD$,

$\therefore \angle BOG + \angle BGO = 90^\circ$,

$\because OE \perp l$,

$\therefore \angle BOG + \angle BOE = 90^\circ$,

$\therefore \angle BGO = \angle BOE$,

$\therefore \sin \angle BGO = \sin \angle BOE = \frac{24}{25}$,

在 $Rt\triangle CFG$ 中, $\sin \angle CGF = \sin \angle BGO = \frac{CF}{CG}$,

设 $CF = 24x$ (分米), 则 $CG = 25x$ (分米),

$FG = \sqrt{CG^2 - CF^2} = \sqrt{(25x)^2 - (24x)^2} = 7x$ (分米),

$\therefore \tan \angle BGO = \tan \angle CGF = \frac{CF}{FG} = \frac{24x}{7x} = \frac{24}{7}$,

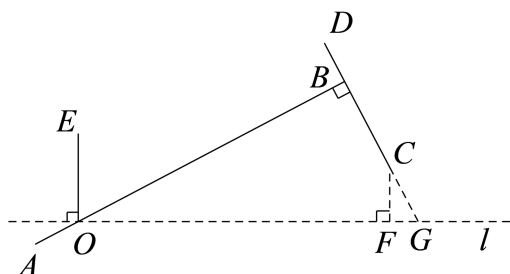
在 $Rt\triangle OBG$ 中, $\tan \angle BGO = \frac{AB}{BG} = \frac{24}{7}$,

$\therefore \frac{24}{4 + 25x} = \frac{24}{7}$,

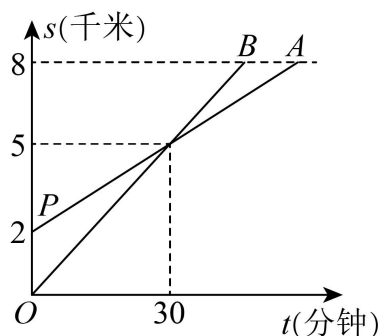
解得 $x = \frac{3}{25}$ (分米),

$$\therefore CF = 24x = \frac{72}{25} \text{ (分米)}.$$

故答案为: $\frac{72}{25}$.



15. 小王与小张先后从甲地出发前往 8 千米外的乙地, 图中线段 PA 、 OB 分别反映了小王和小张骑行所走的路程 S (千米) 关于小张所用时间 t (分钟) 的函数关系. 根据图象提供的信息, 小张比小王早到乙地的时间是_____分钟.



【答案】 12

【解析】

【分析】 本题主要考查了一次函数的实际应用, 熟悉掌握待定系数法求函数的解析式是解题的关键. 根据图象所给信息, 利用待定系数法即可求出小王和小张路程的函数解析式, 再把路程 8 代入即可求出小王和小张行走 8 千米的时间, 作差即可.

【详解】 解: 由图象可知:

设 OB 的解析式为: $S = kt$,

$\therefore OB$ 经过点 $(30, 5)$,

$$\therefore 5 = 30k, \text{ 得 } k = \frac{1}{6},$$

$\therefore OB$ 函数解析式为: $S = \frac{1}{6}t$,

把 $S=8$ 代入 $S=\frac{1}{6}t$ 得: $8=\frac{1}{6}t$,

解得: $t=48$,

$\therefore$ 小张到达乙地所用时间为 48 (分钟);

设 PA 的解析式为: $S=mt+n$,

$$\therefore \begin{cases} 30m+n=5 \\ n=2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m=\frac{1}{10}, \\ n=2 \end{cases},$$

$\therefore PA$ 的解析式为: $S=\frac{1}{10}t+2$,

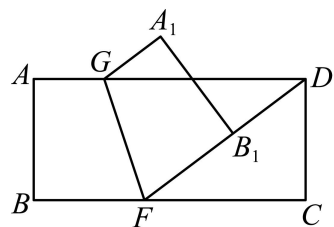
把 $S=8$ 代入 $S=\frac{1}{10}t+2$ 得: $8=\frac{1}{10}t+2$,

解得: $t=60$,

$\therefore$ 小张比小王早到乙地的时间是 $60-48=12$ (分钟).

故答案为: 12.

16. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB=12$, $AD=27$, 点 F 在 BC 边上, 折叠矩形使 FB 落在射线 FD 上, 折痕为 GF , 点 A , B 分别落在点 A_1 , B_1 处, 若 $AG=7$, 那么 B_1D 的长为_____.



【答案】 9

【解析】

【分析】考查了矩形的性质, 翻折变换的性质, 勾股定理, 等腰三角形的判定, 平行线的性质等知识, 解题的关键是灵活运用所学知识解决问题, 学会利用翻折不变性解决问题.

首先求出 $GD=20$, 由矩形的性质得出 $AD \parallel BC$, $BC=AD=27$, 由平行线的性质得出 $\angle DGF = \angle BFG$, 由翻折不变性可知, $\angle BFG = \angle DFG$, 证出 $\angle DFG = \angle DGF$, 由等腰三角形的判定定理证出 $DF = DG = 20$, 再由勾股定理求出 CF , 可得 BF , 再利用翻折不变性, 可知 $FB_1 = FB$, 由此即可解决问题.

【详解】解: $\because AG=7, AD=27$,

$$\therefore GD = 20,$$

$\therefore$ 将纸片折叠, 使 FB 落在射线 FD 上,

$$\therefore \angle BFG = \angle GFD, \quad BF = B_1F,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DGF = \angle BFG,$$

$$\therefore GD = DF = 20,$$

$$\therefore CF = \sqrt{DF^2 - CD^2} = \sqrt{400 - 144} = 16,$$

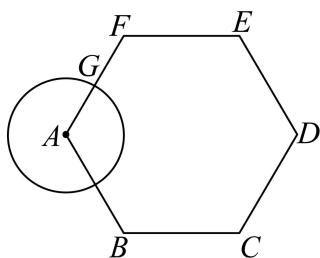
$$\therefore BF = BC - CF = 11,$$

$$\therefore B_1F = 11,$$

$$\therefore B_1D = DF - B_1F = 20 - 11 = 9.$$

故答案为: 9.

17. 如图, 在边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 中, G 为 AF 的中点, 点 Q 为正六边形 $ABCDEF$ 边上任意一点, 以 CQ 为半径的 $\odot C$ 与以 AG 为半径的 $\odot A$ 相交时, 那么 $\odot C$ 的半径 r 的取值范围是_____.



【答案】 $2\sqrt{3} - 1 < r \leq 4$

【解析】

【分析】 本题考查了正多边形与圆的问题, 正多边形的性质, 熟练掌握了正多边形与圆的问题是解题的关键. 作正六边形 $ABCDEF$ 的外接圆 $\odot O$, 连结 AC , CF , OB , 设 AC 与 $\odot A$ 相交于点 P , 求出 CF 、 AP 、 CP 的长, 即可求得 $\odot C$ 的半径 r 的取值范围 $CP < r \leq CF$, 即得答案.

【详解】 解: 作正六边形 $ABCDEF$ 的外接圆 $\odot O$, 连结 AC , CF , OB , 设 AC 与 $\odot A$ 相交于点 P , 则 $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{AF} = 60^\circ$, CF 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle BOC = 60^\circ,$$

$$\because OB = OC,$$

$\therefore \triangle OBC$ 是等边三角形,

$$\therefore OC = BC = 2,$$

$$\therefore CF = 4,$$

$\therefore$ 以 CQ 为半径的 $\odot C$ 与以 AG 为半径的 $\odot A$ 相交,

$$\therefore r \leq CF,$$

$$\text{即 } r \leq 4;$$

$\therefore CF$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle FAC = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = \sqrt{CF^2 - AF^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

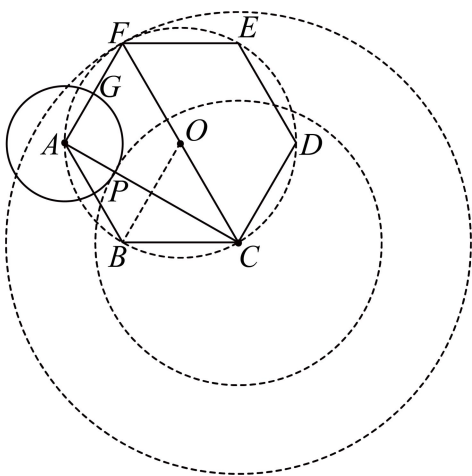
$$\therefore CP = AC - AP = 2\sqrt{3} - 1,$$

$\therefore$ 以 CQ 为半径的 $\odot C$ 与以 AG 为半径的 $\odot A$ 相交,

$$\therefore r > CP,$$

$$\text{即 } r > 2\sqrt{3} - 1;$$

$\therefore C$ 的半径 r 满足 $2\sqrt{3} - 1 < r \leq 4$.



故答案为: $2\sqrt{3} - 1 < r \leq 4$

18. $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC > BC$, D 为 AB 中点, 过点 D 的直线交 AC 于点 E , 如果 DE 平分 $\triangle ABC$ 的周长, 那么 $\frac{DE}{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

【解析】

【分析】此题主要考查了相似三角形的判定与性质, 三角形的中位线定理, 勾股定理等知识, 熟练掌握知

识点的应用是解题的关键.

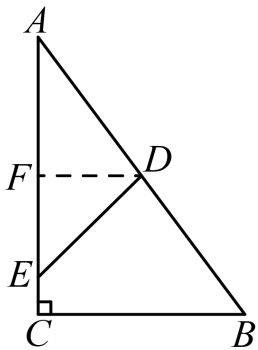
过点 D 作 $DF \parallel BC$ 交 AC 于点 F , 设 $CE = x$, $BC = a$, $AC = b$, 根据点 D 是 AB 的中点, 证明 DF 是

ABC 的中位线, 又 DE 平分 ABC 的周长得 $AE = CE + BC$ 则 $b - x = x + a$, 进而得 $x = \frac{b-a}{2}$, 根据

中位线定理得 $DF = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$, $AF = CF = \frac{b}{2}$, 则 $EF = CF - CE = \frac{a}{2}$, 继而由勾股定理得 $DE = \frac{\sqrt{2}a}{2}$,

据此可得 $\frac{DE}{BC}$ 的值.

【详解】解: 过点 D 作 $DF \parallel BC$ 交 AC 于点 F , 如图所示:



$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC},$$

$$\because D \text{ 为 } AB \text{ 中点},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DF \text{ 是 } ABC \text{ 的中位线},$$

$$\text{设 } CE = x, \quad BC = a, \quad AC = b,$$

$$\therefore AE = AC - CE = b - x,$$

$$\because DE \text{ 平分 } ABC \text{ 的周长},$$

$$\therefore AE + AD = CE + BC + BD,$$

$$\because \text{点 } D \text{ 是 } AB \text{ 的中点},$$

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore AE = CE + BC,$$

$$\therefore b - x = x + a,$$

$$\therefore x = \frac{b-a}{2},$$

$$\therefore DF \text{ 是 } ABC \text{ 的中位线},$$

$$\therefore DF = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}, \quad AF = CF = \frac{b}{2},$$

$$\therefore EF = CF - CE = \frac{b}{2} - \frac{b-a}{2} = \frac{a}{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中, 由勾股定理得 $DE = \sqrt{DF^2 + EF^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}a}{2},$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{\frac{\sqrt{2}a}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

故答案为: $\frac{\sqrt{2}}{2}.$

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 先化简, 再求值: $\frac{m^2 - 2m + 1}{m^2 + 3m} \div \left(1 - \frac{4}{m+3}\right)$, 其中 $m = 2\sin 60^\circ + \tan 45^\circ.$

【答案】 $\frac{m-1}{m}$, 原式 = $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了分式的化简求值. 原式括号中两项通分并利用同分母分式的减法法则计算, 同时利用除法法则变形, 约分得到最简结果, 利用特殊角的三角函数值化简 m , 再把 m 的值代入计算即可求出值.

【详解】 解: $\frac{m^2 - 2m + 1}{m^2 + 3m} \div \left(1 - \frac{4}{m+3}\right)$

$$= \frac{(m-1)^2}{m(m+3)} \div \frac{m+3-4}{m+3}$$

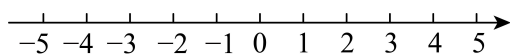
$$= \frac{(m-1)^2}{m(m+3)} \cdot \frac{m+3}{m-1}$$

$$= \frac{m-1}{m};$$

$$m = 2\sin 60^\circ + \tan 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \sqrt{3} + 1,$$

把 $m = \sqrt{3} + 1$ 代入, 原式 = $\frac{m-1}{m} = \frac{\sqrt{3}+1-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}.$

20. 解不等式组 $\begin{cases} 4(3+x) > 3-2x \\ \frac{x}{3} - \frac{x-2}{2} \geq 1 \end{cases}$, 将其解集在数轴上表示出来, 并写出这个不等式组的整数解.



【答案】 $-\frac{3}{2} < x \leq 0$ ，数轴表示见解析， $x = -1, 0$

【解析】

【分析】 本题考查解不等式组的解集及整数解，在数轴上表示解集．先分别求出各不等式的解集，它们的公共部分即为不等式组的解集，再根据数轴上表示解集的方法表示出该不等式组的解集，最后写出整数解即可．

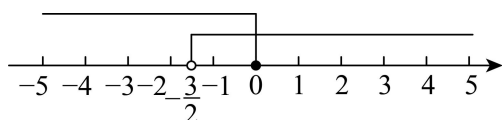
【详解】 解：
$$\begin{cases} 4(3+x) > 3-2x \text{ ①} \\ \frac{x}{3} - \frac{x-2}{2} \geq 1 \text{ ②} \end{cases},$$

解不等式①，得 $x > -\frac{3}{2}$ ，

解不等式②，得 $x \leq 0$ ，

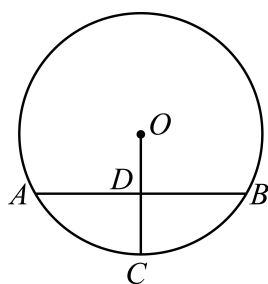
∴ 该不等式组的解集为 $-\frac{3}{2} < x \leq 0$ ．

该解集在数轴上表示为：



∴ 该不等式组的整数解为 $x = -1, 0$ ．

21. 在 $\odot O$ 中，点 C 是弧 AB 的中点， OC 交弦 AB 于点 D ，且 D 是 OC 的中点．



(1) 求 $\angle AOD$ 的度数；

(2) 延长 AO 交 $\odot O$ 于点 E ，连接 EC ，交 AB 于点 F ，如果 $AE = 8$ ，求 FB 的长度．

【答案】 (1) 60 度 (2) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了垂径定理的推论，解直角三角形，圆周角定理，等边对等角等等，熟知垂径定理的推理是解题的关键．

(1) 由垂径定理的推论可得 $OC \perp AB$ ，再由线段中点的定义可得 $OD = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}OA$ ，据此解直角三角形

即可得到答案；

(2) 先求出 $OA = OC = 4$ ，则 $OD = CD = \frac{1}{2}OC = 2$ ，再由垂径定理的推论得到 $OC \perp AB$ ， $AD = BD$ ，

解直角三角形得到 $AD = BD = 2\sqrt{3}$ ，再证明 $\angle C = \angle E = 30^\circ$ ，解直角三角形得到 $DF = CD \cdot \tan C = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，

则 $BF = BD - DF = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 。

【小问 1 详解】

解：连接 OA

$\because$ 在 $\odot O$ 中，点 C 是弧 AB 的中点，

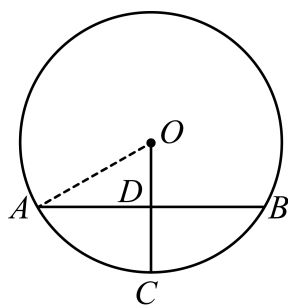
$\therefore OC \perp AB$ ，

$\because D$ 是 OC 的中点，且 $OA = OC$ ，

$\therefore OD = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}OA$ ，

$\therefore \cos \angle AOD = \frac{OD}{OA} = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore \angle AOD = 60^\circ$ ；



【小问 2 详解】

解： $\because AE = 8$ ，且 AE 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore OA = OC = 4$ ，

$\because D$ 是 OC 的中点，

$\therefore OD = CD = \frac{1}{2}OC = 2$ ，

$\because$ 在 $\odot O$ 中，点 C 是弧 AB 的中点，

$\therefore OC \perp AB$ ， $AD = BD$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中, $AD = OA \cdot \sin \angle AOD = 2\sqrt{3}$,

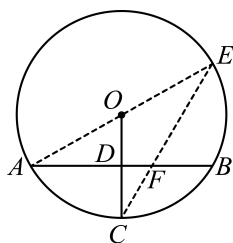
$$\therefore BD = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \angle E = \frac{1}{2} \angle AOC = 30^\circ, \quad OC = OE,$$

$$\therefore \angle C = \angle E = 30^\circ,$$

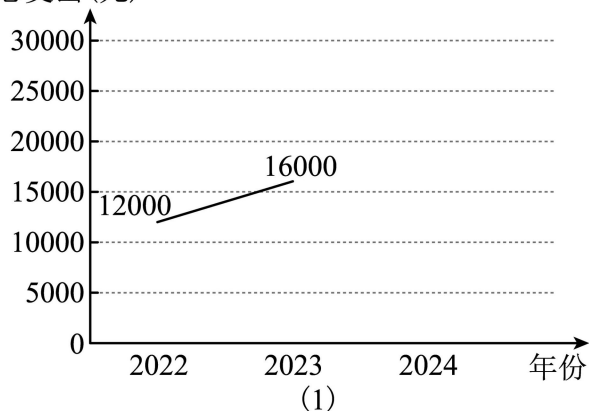
$$\therefore DF = CD \cdot \tan C = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore BF = BD - DF = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

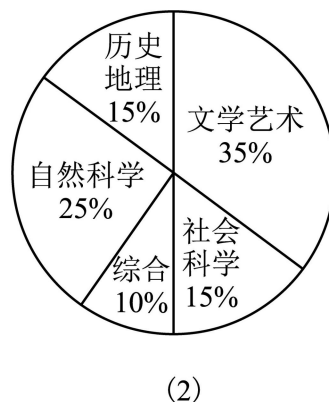


22. 近年来, 某校积极响应“全民阅读活动”, 致力打造“书香校园”, 每年划拨专项经费用于图书馆购置图书, 确保图书种类齐全、数量充足. 该校 2022 年至 2024 年图书馆购进新书总支出如图所示:

某校 2022 年至 2024 年图书馆购进新书总支出情况折线统计图



某校 2024 年图书馆购进新书总支出分配情况扇形统计图



(1) 该校图书馆 2024 年购进新书总支出比 2023 年提高了 50%, 2022 年图书馆购进的图书中, 社会科学类图书的支出占购进总支出的 10%, 那么 2024 年与 2022 年相比, 社会科学类图书在购进支出上的增长率为多少?

(2) 为了更好地满足师生的阅读需求, 该校经过问卷调查和借阅数据的综合分析, 2025 年新书购进计划在 2024 年基础上做如下调整: 将自然科学类图书的购书金额提高 20%, 同时购书的数量增加 80 册, 这样调整后, 自然科学类图书的每册均价可比 2024 年降低 20 元, 那么学校计划 2025 年购进自然科学类图书多少

册?

【答案】(1) 200%

(2) 180 册

【解析】

【分析】本题主要考查分式方程的运用，理解数量关系，正确列式求解是关键.

(1) 根据题意算出 2024 年购进新书总支出，2022 年购进社会科学类图书支出，2024 年购进社会科学类图书支出，根据占比的计算方法即可求解；

(2) 设 2024 年购进自然科学类图书 x 册，那么 2025 年计划购进此类图书为 $(x+80)$ 册，由此列分式方程求即可.

【小问 1 详解】

解：2024 年购进新书总支出： $16000(1+50\%)=24000$ 元，

2022 年购进社会科学类图书支出： $12000 \times 10\% = 1200$ 元，

2024 年购进社会科学类图书支出： $24000 \times 15\% = 3600$ 元，

2024 年与 2022 年相比，社会科学类图书支出的增长率： $\frac{3600-1200}{1200} \times 100\% = 200\%$ ；

【小问 2 详解】

解：2024 年购进自然科学类图书支出： $24000 \times 25\% = 6000$ 元，

设 2024 年购进自然科学类图书 x 册，那么 2025 年计划购进此类图书为 $(x+80)$ 册，

由题意得 $\frac{6000}{x} - \frac{6000(1+20\%)}{x+80} = 20$ ，

整理得， $x^2 + 140x - 24000 = 0$ ，

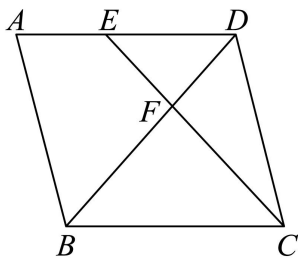
解得 $x_1 = 100, x_2 = -240$ ，

经检验， $x_1 = 100, x_2 = -240$ 是原方程的根，但 $x_2 = -240$ 不符题意，应舍去，

$\therefore x+80=180$ ，

答：2025 年计划购入自然科学类图书 180 册.

23. 如图，已知平行四边形 $ABCD$ 中，点 F 是对角线 BD 上一点， $\angle BFC = \angle A$ ，延长 CF 交边 AD 于点 E .



(1) 求证: $AB^2 = CF \cdot CE$;

(2) 当 $BD = CE$ 时, 求证: 四边形 $ABCD$ 是菱形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查平行四边形的性质, 菱形的判定, 相似三角形的判定和性质, 熟练掌握平行四边形的性质, 证明三角形相似是解题的关键:

(1) 根据平行四边形的性质, 得到 $AB = DC$, 证明 $\triangle DCF \sim \triangle ECD$, 得到 $CD^2 = CE \cdot CF$, 等量代换即可得出结论;

(2) 平行线分线段成比例, 得到 $\frac{EF}{EC} = \frac{DF}{DB}$, 进而得到 $EF = DF$, 推出 $\angle FED = \angle FDE$, 相似三角形的性质, 推出 $\angle CDF = \angle CED$, 进而得到 $\angle FDE = \angle CDF$, 结合平行线的性质, 推出 $\angle ABD = \angle FDE$, 进而得到 $AB = AD$, 即可得证.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB \parallel CD, AB = CD,$

$\therefore \angle A + \angle ADC = 180^\circ.$

又 $\because \angle BFC + \angle DFC = 180^\circ, \angle A = \angle BFC,$

$\therefore \angle ADC = \angle DFC.$

又 $\because \angle DCF = \angle ECD,$

$\therefore \triangle DCF \sim \triangle ECD.$

$\therefore \frac{DC}{EC} = \frac{CF}{CD}.$

$\therefore CD^2 = CE \cdot CF.$

$\therefore AB^2 = CE \cdot CF.$

【小问 2 详解】

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{EF}{EC} = \frac{DF}{DB}.$$

$$\therefore EC = DB,$$

$$\therefore EF = DF,$$

$$\therefore \angle FED = \angle FDE.$$

$$\therefore \triangle DCF \sim \triangle ECD,$$

$$\therefore \angle CDF = \angle CED,$$

$$\therefore \angle FDE = \angle CDF.$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CDB,$$

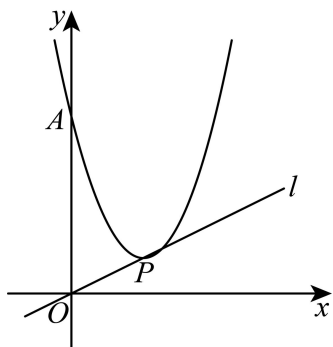
$$\therefore \angle ABD = \angle FDE,$$

$$\therefore AB = AD.$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 y 轴交于点 $A(0, 5)$, 抛物线顶点 P 在第一象限且在直线 $l: y = \frac{1}{2}x$ 上.



(1) 求抛物线的表达式;

(2) 向上平移直线 l , 交抛物线于 C 、 D 两点(C 在 D 左侧), 当 $CD = OP$ 时, 求 C 点坐标;

(3) 将抛物线向右平移 m 个单位, 平移后的抛物线与原抛物线交于点 M , 顶点为 N , 如果 $MN \perp l$, 求 m 的值.

【答案】 (1) $y = x^2 - 4x + 5$

(2) $\left(\frac{5}{4}, \frac{25}{16}\right)$

(3) 4

【解析】

【分析】(1) 把 $A(0,5)$ 代入函数解析式得 $c=5$ ，即得 $y=x^2+bx+5=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+5-\frac{b^2}{4}$ ，得到

$P\left(-\frac{b}{2}, 5-\frac{b^2}{4}\right)$ ，再把 P 点坐标代入一次函数解析式求出 b 的值即可求解；

(2) 延长 DC 交 x 轴于点 E ，过点 P 作 $PH \perp x$ 轴于 H ，过点 C 作 x 轴平行线 l' ，

过点 D 作 $DI \perp l'$ 于 I ，可证 $\triangle DCI \cong \triangle POH$ (AAS)，可得 $CI = OH = 2$ ， $DI = PH = 1$ ，设

$C(m, m^2-4m+5)$ ，得 $D(m+2, m^2-4m+6)$ ，再把 D 点坐标代入二次函数解析式求出 m 的值即可求解；

(3) 求出平移前抛物线顶点坐标为 $(2,1)$ ，可得平移后的抛物线顶点 $N(m+2,1)$ ，由对称性可知 $MP=MN$ ，

即得 $PG=GN=\frac{m}{2}$ ，再证明 $\triangle MPG \sim \triangle PFG$ ，得 $\frac{PG}{MG} = \frac{FG}{PG} = \frac{1}{2}$ ，即得 $MG=m$ ，得到 $M\left(2+\frac{m}{2}, m+1\right)$ ，

再把 M 点坐标代入二次函数解析式即可求出 m 的值。

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线与 y 轴交于点 $A(0,5)$ ，

∴ $c=5$ ，

$$\therefore y = x^2 + bx + 5 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + 5 - \frac{b^2}{4}$$

$$\therefore P\left(-\frac{b}{2}, 5 - \frac{b^2}{4}\right),$$

∵ 顶点 P 在直线 $l: y = \frac{1}{2}x$ 上，

$$\therefore 5 - \frac{b^2}{4} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{b}{2}\right),$$

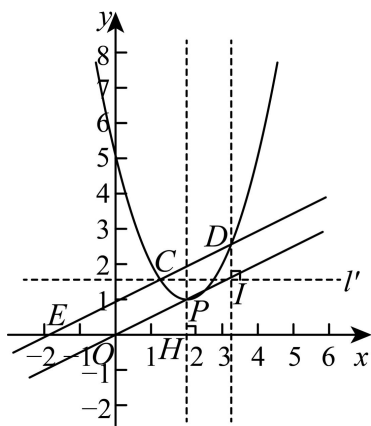
解得 $b = -4$ ，

∴ 抛物线表达式 $y = x^2 - 4x + 5$ ；

【小问 2 详解】

解：如图，延长 DC 交 x 轴于点 E ，过点 P 作 $PH \perp x$ 轴于 H ，过点 C 作 x 轴平行线 l' ，

过点 D 作 $DI \perp l'$ 于 I ，



$\because$ 由平移可知 $l \parallel DE$,

$\therefore \angle DEO = \angle POH$,

同理 $\angle DCI = \angle DEO$,

$\therefore \angle DCI = \angle POH$,

$\because CD = OP$, $\angle DIC = \angle PHO = 90^\circ$,

$\therefore \triangle DCI \cong \triangle POH$ (AAS),

$\therefore CI = OH = 2$, $DI = PH = 1$,

$\therefore$ 设 $C(m, m^2 - 4m + 5)$,

$\therefore D(m+2, m^2 - 4m + 6)$,

把 $D(m+2, m^2 - 4m + 6)$ 代入 $y = x^2 - 4x + 5$ 得,

$$m^2 - 4m + 6 = (m+2)^2 - 4(m+2) + 5,$$

解得 $m = \frac{5}{4}$,

$\therefore C\left(\frac{5}{4}, \frac{25}{16}\right)$;

【小问 3 详解】

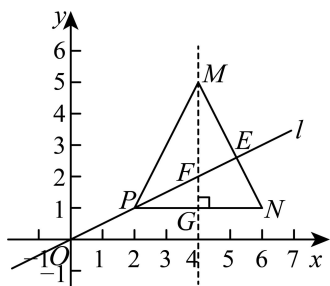
解: $\because y = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$,

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $(2, 1)$,

$\because$ 将抛物线向右平移 m 个单位,

$\therefore$ 平移后的抛物线顶点 $N(m+2, 1)$,

设 $l \perp MN$ 于 E , 作 $MG \perp PN$ 于 G , 交 PE 于点 F ,



由对称性可知 $MP = MN$,

$$\therefore PG = GN = \frac{m}{2}, \quad \angle MPN = \angle MNP, \quad \angle PMG = \angle NMG,$$

$$\because MG \perp PN, \quad MN \perp l,$$

$$\therefore \angle PGF = \angle MEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FPG + \angle PFG = \angle NMG + \angle MFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PFG = \angle MFE,$$

$$\therefore \angle FPG = \angle NMG,$$

$$\therefore \angle PMG = \angle FPG,$$

$$\text{又} \because \angle MGP = \angle PGF,$$

$$\therefore \triangle MPG \sim \triangle PFG,$$

$$\therefore \frac{PG}{MG} = \frac{FG}{PG} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore MG = m,$$

$$\therefore M\left(2 + \frac{m}{2}, m+1\right),$$

把 $M\left(2 + \frac{m}{2}, m+1\right)$ 代入 $y = x^2 - 4x + 5$ 得,

$$m+1 = \left(2 + \frac{m}{2}\right)^2 - 4\left(2 + \frac{m}{2}\right) + 5,$$

$$\text{整理得, } m^2 - 4m = 0,$$

$$\text{解得 } m_1 = 4, \quad m_2 = 0 \text{ (不合, 舍去)}$$

$$\therefore m \text{ 的值为 } 4.$$

【点睛】 本题考查了待定系数法求二次函数解析式，二次函数的几何应用，二次函数的平移，等腰三角形的性质，相似三角形的判定和性质，掌握以上知识点是解题的关键.

25. 定义：如果一个三角形的三个顶点分别在另一个三角形的三边上，且这两个三角形相似，那么我们把这

个三角形称为另一个三角形的镶嵌相似形；已知 $\triangle ABC$ 中，点 P 、 D 、 E 分别在 BC 、 AB 、 AC 上，连接 PD 、 DE 、 PE 。

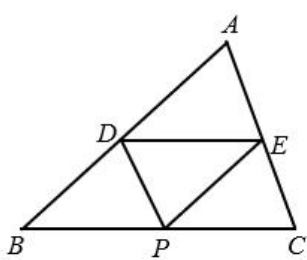


图 1

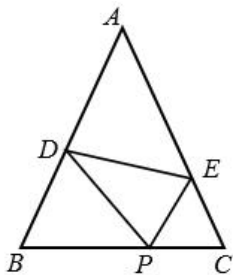


图 2

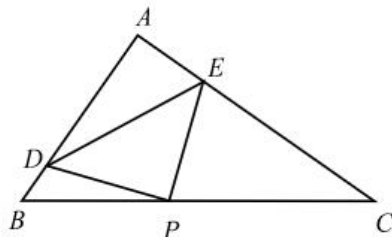


图 3

- (1) 如图1， P 是 BC 中点， $PD \parallel AC$ ， $PE \parallel AB$ 时，求证： $\triangle PDE$ 是 $\triangle ABC$ 的镶嵌相似形；
- (2) 如图2，当 $AB = AC$ ， $BP = 2PC$ ， $\triangle PDE$ 是 $\triangle ABC$ 的镶嵌相似形， $\angle A = \angle PDE$ 。求 $\frac{AD}{AB}$ 的值；
- (3) 如图3，如果 $\angle A = \angle DPE = 90^\circ$ ， $BP = 2$ ， $PC = 3$ ， $\triangle PDE$ 是 $\triangle ABC$ 的镶嵌相似形，且 PE 与 AB 不平行，求 AB 的长。

【答案】(1) 见解析；

(2) $\frac{2}{3}$ ；

(3) $\sqrt{10}$ 。

【解析】

【分析】 本题考查了平行线分线段成比例定理，相似三角形的判定与性质，掌握知识点的应用是解题的关键。

(1) 由平行线分线段成比例定理可得 $\frac{BD}{AD} = \frac{BP}{PC}$ ， $\frac{CE}{AE} = \frac{PC}{BP}$ ，又 P 是 BC 中点，则 $BP = PC$ ，所以 $CE = AE$ ，故 $\frac{DE}{BC} = \frac{PE}{AB} = \frac{DP}{AC}$ ，从而求证；

(2) 由 $\triangle PDE$ 是 $\triangle ABC$ 的镶嵌相似形， $AB = AC$ ， $\angle A = \angle PDE$ ，则 $\angle B = \angle C = \angle DPE = \angle DEP$ ， $\frac{AB}{DP} = \frac{BC}{PE}$ ，证明 $\triangle BDP \sim \triangle CEP$ ，所以 $\frac{BD}{CP} = \frac{DP}{PE}$ ，然后代入即可求解；

(3) 由 $\triangle PDE$ 是 $\triangle ABC$ 的镶嵌相似形， $\angle A = \angle DPE = 90^\circ$ ，则分 ① 当 $\triangle PDE \sim \triangle ABC$ 时，② 当 $\triangle PDE \sim \triangle ACB$ 时两种情况分析即可。

【小问 1 详解】

证明： $\because PD \parallel AC$ ， $PE \parallel AB$ ，

$$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{BP}{PC}, \quad \frac{CE}{AE} = \frac{PC}{BP},$$

$\because P$ 是 BC 中点，

$$\therefore BP = PC,$$

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore CE = AE,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{PE}{AB} = \frac{DP}{AC},$$

$$\therefore \triangle PDE \sim \triangle ABC,$$

$\therefore \triangle PDE$ 是 ABC 的镶嵌相似形;

【小问 2 详解】

解: $\because \triangle PDE$ 是 ABC 的镶嵌相似形, $AB = AC$, $\angle A = \angle PDE$,

$$\therefore \angle B = \angle C = \angle DPE = \angle DEP, \quad \frac{AB}{DP} = \frac{BC}{PE},$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DP}{PE},$$

$$\therefore \angle DPC = \angle DPE + \angle EPC, \quad \angle DPC = \angle B + \angle BDP,$$

$$\therefore \angle BDP = \angle EPC,$$

$$\therefore \triangle BDP \sim \triangle CEP,$$

$$\therefore \frac{BD}{CP} = \frac{DP}{PE},$$

$$\therefore \frac{BD}{CP} = \frac{DP}{PE},$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{CP},$$

$$\therefore BP = 2CP,$$

$$\therefore \frac{CP}{BC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{2}{3};$$

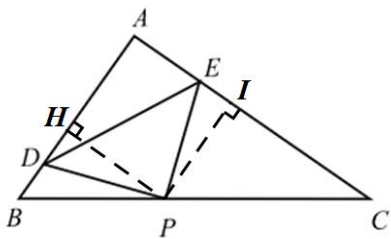
【小问 3 详解】

解: $\because \triangle PDE$ 是 ABC 的镶嵌相似形, $\angle A = \angle DPE = 90^\circ$,

① 当 $\triangle PDE \sim \triangle ABC$ 时,

$$\therefore \frac{DP}{EP} = \frac{AB}{AC},$$

过点 P 作 $PH \perp AB$ 于 H , 作 $PI \perp AC$ 于 I ,



$$\therefore \angle PHB = \angle A = 90^\circ, \quad \angle PIC = \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore HP \parallel AC, \quad IP \parallel AB,$$

$$\therefore \angle DPE = \angle HPI = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DPH = \angle EPI,$$

$$\therefore \angle DHP = \angle EIP = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle DHP \sim \triangle EIP,$$

$$\therefore \frac{DP}{EP} = \frac{HP}{PI},$$

$$\therefore \frac{DP}{EP} = \frac{AB}{AC},$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{HP}{PI},$$

$$\therefore HP \parallel AC,$$

$$\therefore \frac{HP}{AC} = \frac{BP}{BC} = \frac{2}{5},$$

$$\text{设 } HP = 2k, \quad AC = 5k,$$

$$\therefore IP \parallel AB,$$

$$\therefore \frac{IP}{AB} = \frac{CP}{BC} = \frac{3}{5},$$

$$\text{设 } IP = 3a, \quad AB = 5a,$$

$$\therefore \frac{5a}{5k} = \frac{2k}{3a},$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{6}}{3}k,$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{5a}{5k} = \frac{a}{k} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore \text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } \angle A = 90^\circ, \quad BC = 5,$$

$$\therefore AB = \sqrt{10};$$

② 当 $\triangle PDE \sim \triangle ACB$ 时, 不成立, 舍去.

