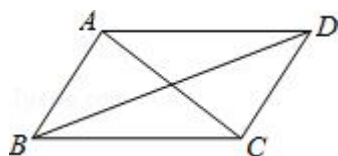


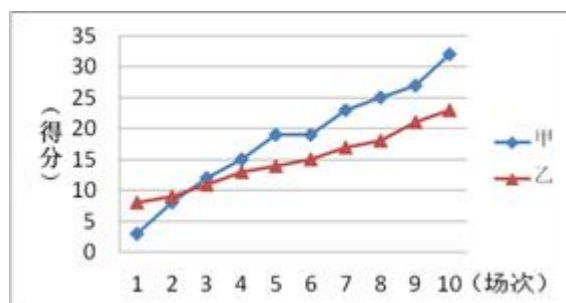
2014 年上海市黄浦区中考数学二模试卷

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)【下列各题的四个选项中，有且只有一个是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. (4 分) 下列二次根式中， $\sqrt{2}$ 的同类根式是 ()
- A. $\sqrt{4}$ B. $\sqrt{6}$ C. $\sqrt{8}$ D. $\sqrt{10}$
2. (4 分) 化简 $(3a^3)^2$ 的结果是 ()
- A. $6a^6$ B. $6a^9$ C. $9a^6$ D. $9a^9$
3. (4 分) 方程 $x^2 - 6x + 9 = 0$ 的根的情况是 ()
- A. 没有实数根 B. 有且仅有一个实数根
- C. 有两个相等的实数根 D. 有两个不相等的实数根
4. (4 分) 下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()
- A. 正三角形 B. 正方形
- C. 等腰直角三角形 D. 等腰梯形
5. (4 分) 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，添加下列条件不能判定平行四边形 $ABCD$ 是菱形的是 ()



- A. $AB = BC$ B. $AC \perp BD$ C. BD 平分 $\angle ABC$ D. $AC = BD$
6. (4 分) 某赛季甲、乙两名篮球运动员各参加 10 场比赛，各场得分情况如图，下列四个结论中，正确的是 ()



- A. 甲运动员得分的平均数小于乙运动员得分的平均数
- B. 甲运动员得分的中位数小于乙运动员得分的中位数
- C. 甲运动员得分的最小值大于乙运动员得分的最小值

D. 甲运动员得分的方差大于乙运动员得分的方差

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. (4 分) $\frac{1}{2}$ 的相反数是_____.

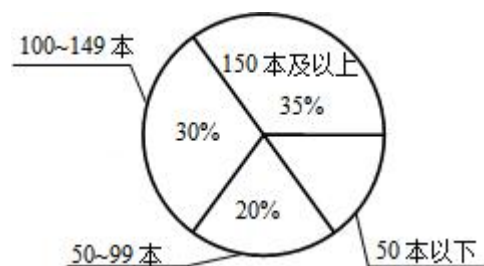
8. (4 分) 分解因式: $x^2y - 4y =$ _____.

9. (4 分) 不等式组 $\begin{cases} -3x > -6 \\ 2x+1 > 0 \end{cases}$ 的解集是_____.

10. (4 分) 方程 $\sqrt{x+2} = x$ 的根是_____.

11. (4 分) 若反比例函数 $y = \frac{1-3k}{x}$ 的图象经过第一、三象限, 则 k 的取值范围是_____.

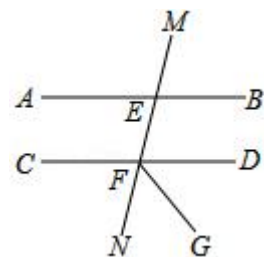
12. (4 分) 某校对部分学生家庭进行图书量调查, 调查情况如图, 若本次调查中, 有 50 本以下图书的学生家庭有 24 户, 则参加本次调查的学生家庭数有_____户.



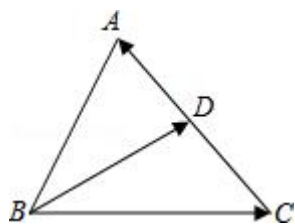
13. (4 分) 布袋中有 1 个黑球和 1 个白球, 这两个球除颜色外其他都相同, 如果从布袋中先摸出一个球, 放回摇匀后, 再摸出一个球, 那么两次都摸到白球的概率是_____.

14. (4 分) 将抛物线 $y = x^2 + x$ 向右平移 1 个单位后, 所得新抛物线的表达式是_____.

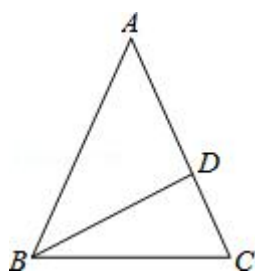
15. (4 分) 如图, $AB \parallel CD$, 直线 MN 分别与 AB 、 CD 交于点 E 、 F , FG 是 $\angle NFD$ 的平分线, 若 $\angle MEB = 80^\circ$, 则 $\angle GFD$ 的度数为_____.



16. (4分) 如图, $\triangle ABC$ 中, D 为边 AC 的中点, 设 $\overrightarrow{BD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{CA}$ 用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 可表示为_____.



17. (4分) 当两个圆有两个公共点, 且其中一个圆的圆心在另一圆的圆内时, 我们称此两圆的位置关系为“内相交”. 如果 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 半径分别 3 和 1, 且两圆“内相交”, 那么两圆的圆心距 d 的取值范围是_____.
18. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5$, $BC = 4$, D 为边 AC 上一点, 且 $AD = 3$, 如果 $\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针旋转, 使点 B 与点 C 重合, 点 D 旋转至 D' , 那么线段 DD' 的长为_____.



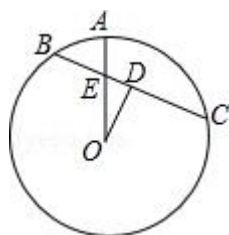
三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10分) 计算: $\cot 30^\circ + 2 \times \frac{1}{3^2} - (2 - \sqrt{3})^{-1} + (\sqrt{3} - 1)^2$.

20. (10分) 解方程: $\frac{3}{x+3} - \frac{1}{1-x} = 1$.

21. (10分) 如图, D 是 $\odot O$ 弦 BC 的中点, A 是 $\widehat{BC}$ 上一点, OA 与 BC 交于点 E , 已知 $AO = 8$, $BC = 12$.

- (1) 求线段 OD 的长;
- (2) 当 $EO = \sqrt{2}BE$ 时, 求 $\angle DEO$ 的余弦值.



22. (10 分) 已知弹簧在其弹性限度内, 它的长度 y (厘米) 与所挂重物质量 x (千克) 的关系可表示为 $y = kx + b$ 的形式, 其中 k 称为弹力系数, 测得弹簧 A 的长度与所挂重物 (不超过弹性限度) 的关系如图 1.

(1) 求弹簧 A 的弹力系数;

(2) 假设在其它条件不变的情况下, 弹簧的弹力系数 k 与弹簧的直径 d (如图 2) 成正比例. 已知弹簧 B 的直径是弹簧 A 的 1.5 倍, 且其它条件均与弹簧 A 相同 (包括不挂重物时的长度). 当弹簧 B 挂一重物后, 测得此时弹簧长度为 9 厘米, 求该重物的质量.

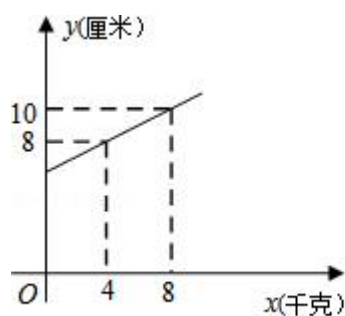


图 1

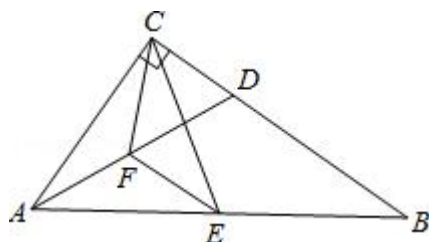


图 2

23. (12 分) 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, D 是边 BC 上一点, 点 E 、 F 分别是线段 AB 、 AD 中点, 联结 CE 、 CF 、 EF .

(1) 求证: $\triangle CEF \cong \triangle AEF$;

(2) 联结 DE , 当 $BD = 2CD$ 时, 求证: $DE = AF$.



24. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知顶点为 $P(0, 2)$ 的二次函数图象与 x 轴交于 A 、 B 两点, A 点坐标为 $(2, 0)$.

(1) 求该二次函数的解析式, 并写出点 B 坐标;

(2) 点 C 在该二次函数的图象上, 且在第四象限, 当 $\triangle ABC$ 的面积为 12 时, 求点 C 坐标;

(3) 在 (2) 的条件下, 点 D 在 y 轴上, 且 $\triangle APD$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 求点 D 坐标.

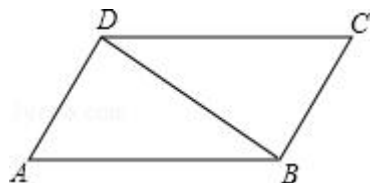
25. (14 分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $BC = 2$, $\angle A = 60^\circ$.

(1) 求证: $BD \perp BC$;

(2) 延长 CB 至 G , 使 $BG = BC$, E 是边 AB 上一点, F 是线段 CG 上一点, 且 $\angle EDF = 60^\circ$, 设 $AE = x$, $CF = y$.

①当点 F 在线段 BC 上时 (点 F 不与点 B 、 C 重合), 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;

②当以 AE 为半径的 $\odot E$ 与以 CF 为半径的 $\odot F$ 相切时, 求 x 的值.



2014 年上海市黄浦区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. (4 分) 下列二次根式中, $\sqrt{2}$ 的同类根式是 ()

A. $\sqrt{4}$

B. $\sqrt{6}$

C. $\sqrt{8}$

D. $\sqrt{10}$

【考点】77: 同类二次根式.

【分析】根据同类二次根式的意义, 将选项中的根式化简, 找到被开方数为 2 者即可.

【解答】解: A 、 $\sqrt{4}=2$, 与 $\sqrt{2}$ 的被开方数不同, 故本选项错误;

B 、 $\sqrt{6}$ 与 $\sqrt{2}$ 的被开方数不同, 故本选项错误;

C 、 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, 与 $\sqrt{2}$ 的被开方数相同, 故本选项正确;

D 、 $\sqrt{10}$ 与 $\sqrt{2}$ 的被开方数不同, 故本选项错误;

故选: C .

【点评】本题考查了同类二次根式的知识, 要判断几个根式是不是同类二次根式, 须先化简根号里面的数, 把非最简二次根式化成最简二次根式, 然后判断.

2. (4 分) 化简 $(3a^3)^2$ 的结果是 ()

A. $6a^6$

B. $6a^9$

C. $9a^6$

D. $9a^9$

【考点】47: 幂的乘方与积的乘方.

【分析】根据积得乘方等于每个因式分别乘方, 再把所得的幂相乘,

【解答】解: 原式 $= 3^2 (a^3)^2$
 $= 9a^6$,

故选: C .

【点评】本题考查了幂的乘方与积得乘方, 先算积的乘方, 再算幂的乘方.

3. (4 分) 方程 $x^2 - 6x + 9 = 0$ 的根的情况是 ()

A. 没有实数根

B. 有且仅有一个实数根

C. 有两个相等的实数根

D. 有两个不相等的实数根

【考点】AA: 根的判别式.

【分析】 找出方程 a , b 及 c 的值, 计算出根的判别式的值, 根据其值的正负即可作出判断.

【解答】 解: $a = 1$, $b = -6$, $c = 9$,

$$\because \Delta = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0,$$

则方程有两个相等的实数根.

故选: C.

【点评】 本题考查了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$, a , b , c 为常数) 根的判别式. 当 $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$, 方程没有实数根.

4. (4 分) 下列图形中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()

A. 正三角形

B. 正方形

C. 等腰直角三角形

D. 等腰梯形

【考点】 P3: 轴对称图形; R5: 中心对称图形.

【分析】 根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解. 如果一个图形沿着一条直线对折后两部分完全重合, 这样的图形叫做轴对称图形, 这条直线叫做对称轴. 如果一个图形绕某一点旋转 180° 后能够与自身重合, 那么这个图形就叫做中心对称图形, 这个点叫做对称中心.

【解答】 解: A、是轴对称图形, 不是中心对称图形, 故此选项错误;

B、是轴对称图形, 是中心对称图形, 故此选项正确;

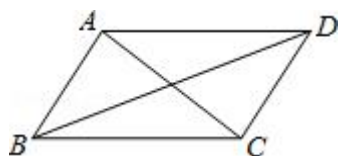
C、是轴对称图形, 不是中心对称图形, 故此选项错误;

D、是轴对称图形, 不是中心对称图形, 故此选项错误.

故选: B.

【点评】 本题主要考查了中心对称图形与轴对称图形的概念: 轴对称图形的关键是寻找对称轴, 图形两部分折叠后可重合, 中心对称图形是要寻找对称中心, 旋转 180 度后两部分重合.

5. (4 分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 添加下列条件不能判定平行四边形 $ABCD$ 是菱形的是 ()



A. $AB = BC$ B. $AC \perp BD$ C. BD 平分 $\angle ABCD$. $AC = BD$

【考点】L5: 平行四边形的性质; L9: 菱形的判定.

【分析】根据菱形的判定定理, 即可求得答案. 注意排除法的应用.

【解答】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore$ A、当 $AB = BC$ 时, 根据有一组邻边相等的平行四边形是菱形, 可得 $\square ABCD$ 是菱形, 故本选项正确;

B、当 $AC \perp BD$ 时, 根据对角线互相垂直的平行四边形是菱形, 可得 $\square ABCD$ 是菱形, 故本选项正确;

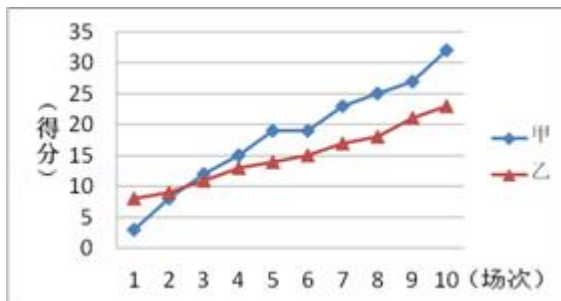
C、当 BD 平分 $\angle ABC$ 时, 易证得 $AB = AD$, 根据有一组邻边相等的平行四边形是菱形, 可得 $\square ABCD$ 是菱形, 故本选项正确;

由排除法可得 D 选项错误.

故选: D.

【点评】此题考查了菱形的判定. 熟记判定定理是解此题的关键.

6. (4 分) 某赛季甲、乙两名篮球运动员各参加 10 场比赛, 各场得分情况如图, 下列四个结论中, 正确的是 ()



A. 甲运动员得分的平均数小于乙运动员得分的平均数

B. 甲运动员得分的中位数小于乙运动员得分的中位数

C. 甲运动员得分的最小值大于乙运动员得分的最小值

D. 甲运动员得分的方差大于乙运动员得分的方差

【考点】VD: 折线统计图; W1: 算术平均数; W4: 中位数; W7: 方差.

【分析】结合折线统计图, 利用数据逐一分析解答即可.

【解答】解: A、由图可知甲运动员得分 8 场得分大于乙运动员得分, 所以甲运动员的得分平均数大于乙运动员的得分平均数, 此选项错误;

B、由图可知甲运动员 8 场得分大于乙运动员得分, 所以甲运动员得分的中位数

大于乙运动员得分的中位数，此选项错误；

C、由图可知甲运动员得分最小值是 5 分以下，乙运动员得分的最小值是 5 分以上，甲运动员得分的最小值小于乙运动员得分的最小值，此选项正错误；

D、由图可知甲运动员得分数据波动性较大，乙运动员得分数据波动性较小，乙运动员的成绩比甲运动员的成绩稳定，甲运动员得分的方差大于乙运动员得分的方差，此选项正确。

故选：D。

【点评】此题主要结合折线统计图，利用中位数、平均数以及方差来进行分析数据，找到解决问题的突破口。

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7.（4 分） $\frac{1}{2}$ 的相反数是 $-\frac{1}{2}$ 。

【考点】14：相反数。

【分析】根据只有符号不同的两个数叫做互为相反数解答。

【解答】解： $\frac{1}{2}$ 的相反数是 $-\frac{1}{2}$ 。

故答案为： $-\frac{1}{2}$ 。

【点评】本题考查了相反数的定义，是基础题，熟记概念是解题的关键。

8.（4 分）分解因式： $x^2y - 4y = y(x+2)(x-2)$ 。

【考点】55：提公因式法与公式法的综合运用。

【分析】先提取公因式 y ，然后再利用平方差公式进行二次分解。

【解答】解： $x^2y - 4y$ ，

$=y(x^2 - 4)$ ，

$=y(x+2)(x-2)$ 。

故答案为： $y(x+2)(x-2)$ 。

【点评】本题考查了提公因式法，公式法分解因式，利用平方差公式进行二次分解因式是解本题的难点，也是关键。

9.（4 分）不等式组 $\begin{cases} -3x > -6 \\ 2x+1 > 0 \end{cases}$ 的解集是 $-\frac{1}{2} < x < 2$ 。

【考点】CB：解一元一次不等式组.

【分析】首先解每个不等式,两个不等式的解集的公共部分就是不等式组的解集.

【解答】解: $\begin{cases} -3x > -6 \cdots ① \\ 2x+1 > 0 \cdots ② \end{cases}$,

解①得: $x < 2$,

解②得: $x > -\frac{1}{2}$.

则不等式组的解集是: $-\frac{1}{2} < x < 2$.

故答案是: $-\frac{1}{2} < x < 2$.

【点评】本题考查的是一元一次不等式组的解,解此类题目常常要结合数轴来判断.还可以观察不等式的解,若 $x >$ 较小的数、 $<$ 较大的数,那么解集为 x 介于两数之间.

10. (4分) 方程 $\sqrt{x+2} = x$ 的根是 $x = 2$.

【考点】AG：无理方程.

【专题】11：计算题.

【分析】先把方程两边平方,使原方程化为整式方程 $x+2 = x^2$,解此一元二次方程得到 $x_1 = 2, x_2 = -1$,把它们分别代入原方程得到 $x_2 = -1$ 是原方程的增根,由此得到原方程的根为 $x = 2$.

【解答】解: 方程两边平方得, $x+2 = x^2$,

解方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 得 $x_1 = 2, x_2 = -1$,

经检验 $x_2 = -1$ 是原方程的增根,

所以原方程的根为 $x = 2$.

故答案为 $x = 2$.

【点评】本题考查了无理方程:根号内含有未知数的方程叫无理方程;解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解,常常采用平方法去根号.

11. (4分) 若反比例函数 $y = \frac{1-3k}{x}$ 的图象经过第一、三象限,则 k 的取值范围是

$$k < \frac{1}{3}.$$

【考点】G4：反比例函数的性质.

【分析】先根据反比例函数的性质列出关于 k 的不等式,求出 k 的取值范围即可.

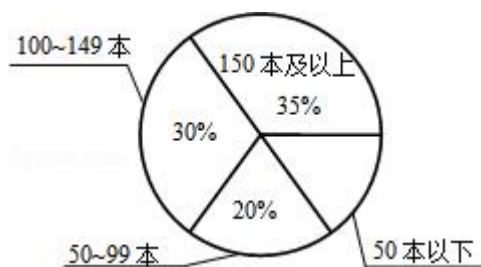
【解答】解：∵反比例函数 $y = \frac{1-3k}{x}$ 的图象经过第一、三象限，

∴ $1 - 3k \geq 0$ ，解得 $k < \frac{1}{3}$ ．

故答案为： $k < \frac{1}{3}$ ．

【点评】本题考查的是反比例函数的性质，熟知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象是双曲线；当 $k > 0$ ，双曲线的两支分别位于第一、第三象限是解答此题的关键．

12. (4分) 某校对部分学生家庭进行图书量调查，调查情况如图，若本次调查中，有 50 本以下图书的学生家庭有 24 户，则参加本次调查的学生家庭数有 160 户．



【考点】VB：扇形统计图．

【分析】首先求得有 50 本以下图书的学生家庭所占的比例，然后根据有 50 本以下图书的学生家庭有 24 户，即可求解．

【解答】解：有 50 本以下图书的学生家庭所占的比例是： $1 - 30\% - 35\% - 20\% = 15\%$ ，

则本次调查的总户数是： $24 \div 15\% = 160$ (户)．

故答案是：160．

【点评】本题考查扇形统计图及相关计算．在扇形统计图中，每部分占总部分的百分比等于该部分所对应的扇形圆心角的度数与 360° 比．

13. (4分) 布袋中有 1 个黑球和 1 个白球，这两个球除颜色外其他都相同，如果从布袋中先摸出一个球，放回摇匀后，再摸出一个球，那么两次都摸到白球的概率是 $\frac{1}{4}$ ．

【考点】X6：列表法与树状图法．

【分析】首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与两次

都摸出白球的情况，再利用概率公式求解即可求得答案．

【解答】解：画树状图得：



$\therefore$ 共有 4 种等可能的结果，两次都摸出白球的有 1 种情况，

$\therefore$ 两次都摸出白球的概率是： $\frac{1}{4}$ ，

故答案为： $\frac{1}{4}$ ．

【点评】本题考查的是用列表法或画树状图法求概率．注意列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件，树状图法适合两步或两步以上完成的事件．注意概率 = 所求情况数与总情况数之比．

14. (4 分) 将抛物线 $y = x^2 + x$ 向右平移 1 个单位后，所得新抛物线的表达式是 $y = x^2 - x$ ．

【考点】H6：二次函数图象与几何变换．

【分析】先把函数化为顶点式的形式，再根据“左加右减”的法则即可得出结论．

【解答】解： $\because$ 抛物线 $y = x^2 + x$ 可化为 $y = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ ，

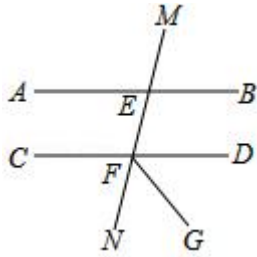
$\therefore$ 抛物线向右平移 1 个单位后，所得新抛物线的表达式为 $y = (x + \frac{1}{2} - 1)^2 - \frac{1}{4}$ ，

即 $y = x^2 - x$ ．

故答案为： $y = x^2 - x$ ．

【点评】本题考查的是二次函数的图象与几何变换，熟知“上加下减，左加右减”的法则是解答此题的关键．

15. (4 分) 如图， $AB \parallel CD$ ，直线 MN 分别与 AB 、 CD 交于点 E 、 F ， FG 是 $\angle NFD$ 的平分线，若 $\angle MEB = 80^\circ$ ，则 $\angle GFD$ 的度数为 50° ．



【考点】JA：平行线的性质．

【专题】11：计算题．

【分析】先根据平行线的性质得 $\angle MFD = \angle MEB = 80^\circ$ ，再根据邻补角的定义计算出 $\angle NFD = 100^\circ$ ，然后根据角平分线的定义求解．

【解答】解： $\because AB \parallel CD$ ，

$$\therefore \angle MFD = \angle MEB = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle NFD = 180^\circ - \angle MFD = 100^\circ,$$

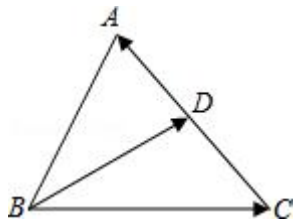
$\because FG$ 是 $\angle NFD$ 的平分线，

$$\therefore \angle GFD = \frac{1}{2} \angle NFD = 50^\circ.$$

故答案为 50° ．

【点评】本题考查了平行线的性质：两直线平行，同位角相等；两直线平行，同旁内角互补；两直线平行，内错角相等．

16. (4分) 如图， $\triangle ABC$ 中， D 为边 AC 的中点，设 $\overrightarrow{BD} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{CA}$ 用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 可表示为 $2\vec{a} - 2\vec{b}$ ．



【考点】LM：*平面向量．

【分析】根据三角形法则表示出 $\overrightarrow{CD}$ ，再根据 D 为 AC 的中点可得 $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CD}$ ．

【解答】解： $\because \overrightarrow{BD} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{CD} = \vec{a} - \vec{b},$$

$\because D$ 为边 AC 的中点，

$$\therefore \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CD} = 2(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = 2\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}.$$

故答案为: $2\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$.

【点评】 本题考查了平面向量, 线段的中点, 平面向量的问题, 熟记平行四边形法则和三角形法则是解题的关键.

17. (4分) 当两个圆有两个公共点, 且其中一个圆的圆心在另一圆的圆内时, 我们称此两圆的位置关系为“内相交”. 如果 $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 半径分别3和1, 且两圆“内相交”, 那么两圆的圆心距 d 的取值范围是 $2 < d < 3$.

【考点】 MJ: 圆与圆的位置关系.

【专题】 23: 新定义.

【分析】 读懂“内相交”的定义, 然后结合两圆相交时两圆的圆心距和两圆的半径的大小关系求解.

【解答】 解: $\because \odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 半径分别3和1,

$\therefore$ 当两圆相交时, $2 < d < 4$,

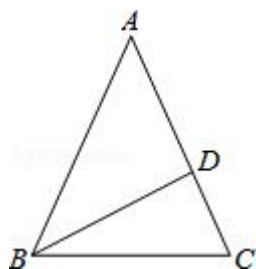
$\because$ 其中一个圆的圆心在另一圆的圆内,

$\therefore 2 < d < 3$,

故答案为: $2 < d < 3$.

【点评】 本题考查了圆与圆的位置关系, 解题的关键是弄清内相交的定义, 难度不大.

18. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5$, $BC = 4$, D 为边 AC 上一点, 且 $AD = 3$, 如果 $\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针旋转, 使点 B 与点 C 重合, 点 D 旋转至 D' , 那么线段 DD' 的长为 $\frac{12}{5}$.

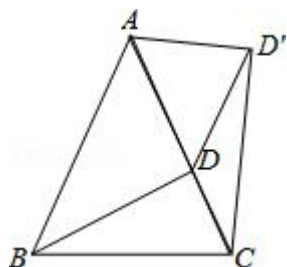


【考点】 R2: 旋转的性质.

【分析】 根据题意画出图形, 根据旋转的性质可知三角形 ABD 全等于三角形 ACD' , 所以三角形 ADD' 也是等腰三角形, 所以两三角形相似, 由相似三角形

的性质可求出 DD' .

【解答】解: $\because \triangle ABD$ 绕点 A 逆时针旋转, 使点 B 与点 C 重合, 点 D 旋转至 D' ,
 $\therefore AD = AD'$, $\angle BAD = \angle DAD'$,
 $\because AB = AC$,
 $\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADD'$,
 $\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DD'}$,
 $\therefore \frac{5}{3} = \frac{4}{DD'}$,
 $\therefore DD' = \frac{12}{5}$.



【点评】 本题考查了旋转的性质、等腰三角形的判定和性质、相似三角形的判定和性质, 解题的关键是利用旋转的性质得到 $\triangle ADD'$ 是等腰三角形.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $\cot 30^\circ + 2 \times \frac{1}{3^2} - (2 - \sqrt{3})^{-1} + (\sqrt{3} - 1)^2$.

【考点】 6F: 负整数指数幂; 79: 二次根式的混合运算; T5: 特殊角的三角函数值.

【分析】 根据负整数指数幂和特殊角的三角函数值得到原式 $= \sqrt{3} + 2 \times \frac{1}{9} - \frac{1}{2 - \sqrt{3}} + (3 - 2\sqrt{3} + 1)$, 然后分母有理化后合并即可.

【解答】 解: 原式 $= \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \frac{1}{2 - \sqrt{3}} + (3 - 2\sqrt{3} + 1)$
 $= \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3}) + 4 - 2\sqrt{3}$
 $= 2$.

【点评】 本题考查了二次根式的混合运算: 先把各二次根式化为最简二次根式, 再进行二次根式的乘除运算, 然后合并同类二次根式. 也考查了负整数指数幂和特殊角的三角函数值.

20. (10 分) 解方程: $\frac{3}{x+3} - \frac{1}{1-x} = 1$.

【考点】B3: 解分式方程.

【专题】11: 计算题.

【分析】分式方程去分母转化为一元二次方程, 求出一元二次方程的解得到 x 的值, 经检验即可得到分式方程的解.

【解答】解: 去分母得: $3(1-x) - (x+3) = (1-x)(x+3)$,

整理得: $x^2 - 2x - 3 = 0$, 即 $(x+1)(x-3) = 0$,

解得: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$,

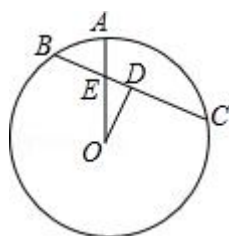
经检验 $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ 都是原方程的根.

【点评】此题考查了解分式方程, 解分式方程的基本思想是“转化思想”, 把分式方程转化为整式方程求解. 解分式方程一定要注意要验根.

21. (10 分) 如图, D 是 $\odot O$ 弦 BC 的中点, A 是 $\widehat{BC}$ 上一点, OA 与 BC 交于点 E , 已知 $AO = 8$, $BC = 12$.

(1) 求线段 OD 的长;

(2) 当 $EO = \sqrt{2}BE$ 时, 求 $\angle DEO$ 的余弦值.



【考点】KQ: 勾股定理; M2: 垂径定理.

【分析】(1) 连接 OB , 先根据垂径定理得出 $OD \perp BC$, $BD = \frac{1}{2}BC$, 在 $\text{Rt}\triangle BOD$ 中, 根据勾股定理即可得出结论;

(2) 在 $\text{Rt}\triangle EOD$ 中, 设 $BE = x$, 则 $OE = \sqrt{2}x$, $ED = 6 - x$, 再根据勾股定理即可得出结论.

【解答】解: (1) 连接 OB .

$\because OD$ 过圆心, 且 D 是弦 BC 中点,

$\therefore OD \perp BC$, $BD = \frac{1}{2}BC$,

在 $\text{Rt}\triangle BOD$ 中, $OD^2 + BD^2 = BO^2$.

$$\because BO = AO = 8, BD = 6.$$

$$\therefore OD = 2\sqrt{7};$$

$$(2) \text{ 在 Rt}\triangle EOD \text{ 中, } OD^2 + ED^2 = EO^2.$$

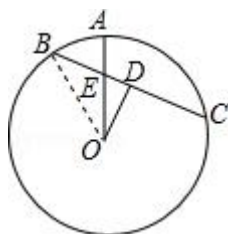
$$\text{设 } BE = x, \text{ 则 } OE = \sqrt{2}x, ED = 6 - x.$$

$$(2\sqrt{7})^2 + (6 - x)^2 = (\sqrt{2}x)^2,$$

$$\text{解得 } x_1 = -16 \text{ (舍)}, x_2 = 4.$$

$$\therefore ED = 2, EO = 4\sqrt{2}.$$

$$\text{在 Rt}\triangle EOD \text{ 中, } \cos \angle DEO = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$



【点评】 本题考查的是垂径定理，根据题意作出辅助线，构造出直角三角形是解答此题的关键。

22. (10 分) 已知弹簧在其弹性限度内，它的长度 y (厘米) 与所挂重物质量 x (千克) 的关系可表示为 $y = kx + b$ 的形式，其中 k 称为弹力系数，测得弹簧 A 的长度与所挂重物 (不超过弹性限度) 的关系如图 1.

(1) 求弹簧 A 的弹力系数;

(2) 假设在其它条件不变的情况下，弹簧的弹力系数 k 与弹簧的直径 d (如图 2) 成正比例. 已知弹簧 B 的直径是弹簧 A 的 1.5 倍，且其它条件均与弹簧 A 相同 (包括不挂重物时的长度). 当弹簧 B 挂一重物后，测得此时弹簧长度为 9 厘米，求该重物的质量.

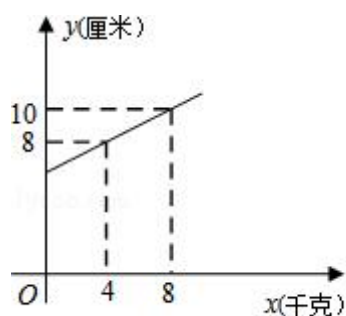


图 1



图 2

【考点】 FH：一次函数的应用.

【分析】 (1) 直接利用待定系数法求一次函数解析式得出即可；

(2) 设弹簧 B 弹力系数为 k_b ，弹簧 A 的直径为 d_A ，则弹簧 B 的直径为 $\frac{3}{2}d_A$ ，则

$$\frac{k_b}{\frac{3}{2}d_A} = \frac{k}{d_A}, \text{ 进而得出 } k_b, \text{ 得出解析式进而得出答案.}$$

【解答】 解：(1) 把 $(4, 8)$, $(8, 10)$ 代入 $y = kx + b$ 得：

$$\begin{cases} 8 = 4k + b \\ 10 = 8k + b \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = 6 \end{cases}$

故弹簧 A 的弹力系数为 $\frac{1}{2}$.

(2) 设弹簧 B 弹力系数为 k_b ，弹簧 A 的直径为 d_A ，则弹簧 B 的直径为 $\frac{3}{2}d_A$.

由题意得 $\frac{k_b}{\frac{3}{2}d_A} = \frac{k}{d_A}.$

$$\therefore k_b = \frac{3}{2}k = \frac{3}{4}.$$

又 $\because$ 弹簧 B 与弹簧 A 不挂重物时的长度相同，

$\therefore$ 弹簧 B 长度与所挂重物质量的关系可表示为 $y = \frac{3}{4}x + 6$.

把 $y = 9$ 代入 $y = \frac{3}{4}x + 6$ 得： $9 = \frac{3}{4}x + 6$

解得： $x = 4$.

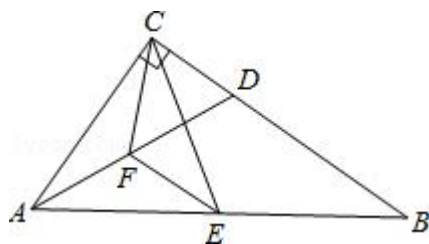
故此时所挂重物质量为 4 千克.

【点评】 此题主要考查了一次函数的应用以及待定系数法求一次函数解析式等知识，得出 k_b 的值是解题关键.

23. (12 分) 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， D 是边 BC 上一点，点 E 、 F 分别是线段 AB 、 AD 中点，联结 CE 、 CF 、 EF .

(1) 求证： $\triangle CEF \cong \triangle AEF$;

(2) 联结 DE ，当 $BD = 2CD$ 时，求证： $DE = AF$.



【考点】KD：全等三角形的判定与性质；KX：三角形中位线定理；L7：平行四边形的判定与性质．

【专题】14：证明题．

【分析】（1）在直角三角形 ABC 中， E 为斜边 AB 的中点，利用斜边上的中线等于斜边的一半得到 $CE = AE$ ，在直角三角形 ACD 中， F 为斜边 AD 的中点，利用斜边上的中线等于斜边的一半得到 $AF = CF$ ，再由 $EF = EF$ ，利用 SSS 即可得证；

（2）由 EF 为三角形 ABD 的中点，利用中位线定理得到 EF 与 BD 平行， EF 等于 BD 的一半，再由 $BD = 2DC$ ，等量代换得到 $EF = CD$ ，再由 EF 与 CD 平行，得到四边形 $CEFD$ 为平行四边形，可得出 $DE = CF$ ，再由 $CF = AF$ ，等量代换得到 $DE = AF$ ．

【解答】证明：（1） $\because \angle ACB = 90^\circ$ ，且 E 为线段 AB 中点，

$$\therefore CE = \frac{1}{2}AB = AE,$$

$\because \angle ACD = 90^\circ$ ， F 为线段 AD 中点，

$$\therefore AF = CF = \frac{1}{2}AD,$$

在 $\triangle CEF$ 和 $\triangle AEF$ 中，

$$\begin{cases} CF=AF \\ EF=EF, \\ CE=AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle CEF \cong \triangle AEF$ (SSS);

（2）连接 DE ，

$\because$ 点 E 、 F 分别是线段 AB 、 AD 中点，

$$\therefore EF = \frac{1}{2}BD, EF \parallel BC,$$

$\because BD = 2CD$ ，

$\therefore EF = CD$ ．

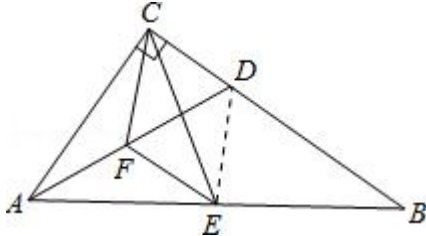
又 $\because EF \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $CFED$ 是平行四边形,

$\therefore DE = CF$,

$\because CF = AF$,

$\therefore DE = AF$.



【点评】 此题考查了全等三角形的判定与性质, 中位线定理, 以及平行四边形的判定与性质, 熟练掌握全等三角形的判定与性质是解本题的关键.

24. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知顶点为 $P(0, 2)$ 的二次函数图象与 x 轴交于 A 、 B 两点, A 点坐标为 $(2, 0)$.

(1) 求该二次函数的解析式, 并写出点 B 坐标;

(2) 点 C 在该二次函数的图象上, 且在第四象限, 当 $\triangle ABC$ 的面积为 12 时, 求点 C 坐标;

(3) 在 (2) 的条件下, 点 D 在 y 轴上, 且 $\triangle APD$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 求点 D 坐标.

【考点】 HF: 二次函数综合题.

【分析】 (1) 已知二次函数图象的顶点坐标和图象上另一点的坐标, 所以利用顶点式方程来表示二次函数解析式;

(2) 如图, 过点 C 作 $CH \perp x$ 轴, 垂足为 H . 设点 C 横坐标为 m , 则 $CH = \frac{1}{2}m^2 - 2$. 由三角形的面积公式得 $\frac{1}{2} \cdot [2 - (-2)] \cdot (\frac{1}{2}m^2 - 2) = 12$, 所以由点 C 所在的象限求得 $C(4, -6)$;

(3) 需要分类讨论: ① $\triangle APD \sim \triangle ABC$; ② $\triangle ADP \sim \triangle ABC$.

【解答】 解: (1) 设抛物线表达式为 $y = ax^2 + 2$ ($a \neq 0$).

把 $(2, 0)$ 代入解析式, 解得 $a = -\frac{1}{2}$.

所以 抛物线表达式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$. 则 $B(-2, 0)$;

(2) 如图, 过点 C 作 $CH \perp x$ 轴, 垂足为 H .

设点 C 横坐标为 m , 则 $CH = \frac{1}{2}m^2 - 2$.

由题意得 $\frac{1}{2} \cdot [2 - (-2)] \cdot (\frac{1}{2}m^2 - 2) = 12$,

解得 $m = \pm 4$.

$\because$ 点 C 在第四象限,

$\therefore m = 4$.

$\therefore C(4, -6)$;

(3) $\because PO = AO = 2$, $\angle POA = 90^\circ$,

$\therefore \angle APO = 45^\circ$.

$\because BH = CH = 6$, $\angle CHB = 90^\circ$,

$\therefore \angle CBA = 45^\circ$.

$\because \angle BAC < 135^\circ$,

$\therefore$ 点 D 应在点 P 下方,

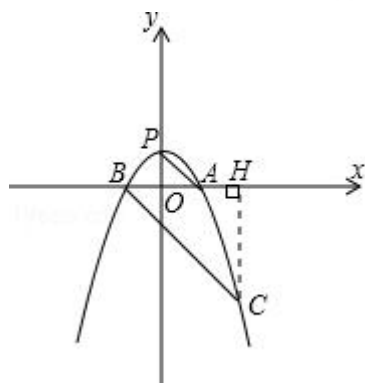
$\therefore$ 在 $\triangle APD$ 与 $\triangle ABC$ 中, $\angle APD = \angle CBA$.

由勾股定理得 $PA = 2\sqrt{2}$, $BC = 6\sqrt{2}$.

① 当 $\frac{PD}{AB} = \frac{PA}{BC}$ 时, $\frac{PD}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}$. 解得 $PD = \frac{4}{3}$. $\therefore D_1(0, \frac{2}{3})$;

② 当 $\frac{PD}{BC} = \frac{PA}{AB}$ 时, $\frac{PD}{6\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{4}$. 解得 $PD = 6$. $\therefore D_2(0, -4)$.

综上所述, 点 D 坐标为 $(0, \frac{2}{3})$ 或 $(0, -4)$.



【点评】 本题综合考查了待定系数法求二次函数解析式, 二次函数图象上点的坐标特征以及相似三角形的判定与性质等二次函数综合题. 解答(3)题时, 对于动点问题, 一定要分类讨论.

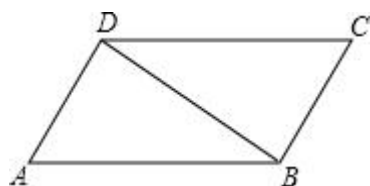
25. (14分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=2$, $\angle A=60^\circ$.

(1) 求证: $BD \perp BC$;

(2) 延长 CB 至 G , 使 $BG=BC$, E 是边 AB 上一点, F 是线段 CG 上一点, 且 $\angle EDF=60^\circ$, 设 $AE=x$, $CF=y$.

①当点 F 在线段 BC 上时 (点 F 不与点 B 、 C 重合), 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出定义域;

②当以 AE 为半径的 $\odot E$ 与以 CF 为半径的 $\odot F$ 相切时, 求 x 的值.



【考点】SO: 相似形综合题.

【专题】15: 综合题.

【分析】(1) 过点 D 作 $DH \perp AB$, 垂足为 H , 在 $\text{Rt}\triangle AHD$ 中, 由三角函数可得出 $AH=1$, 由 $\frac{AH}{AD}=\frac{1}{2}$, $\frac{BC}{CD}=\frac{1}{2}$, 可得 $\frac{AH}{AD}=\frac{BC}{CD}$, 即 $\frac{AH}{BC}=\frac{AD}{CD}$. 可证明 $\triangle AHD \sim \triangle CBD$, 则 $\angle CBD = \angle AHD = 90^\circ$, 即 $BD \perp BC$;

(2) ①根据 $AD \parallel BC$, 得 $\angle ADB = \angle DBC = 90^\circ$, 可证明 $\triangle EHD \sim \triangle FBD$, 得 $\frac{DH}{BD} = \frac{EH}{BF}$, 即 $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{x-1}{2-y}$, 从而得出 $y = 4 - 2x$ ($1 < x < 2$); ②连接 EF , 分三种情况:

1° 当点 F 在线段 BC (点 F 不与点 B 、 C 重合) 上时, 根据 $\triangle EHD \sim \triangle FBD$, 得 $\frac{DH}{BD} = \frac{DE}{DF}$. 即 $\frac{DH}{DE} = \frac{BD}{DF}$, 可证明 $\triangle BDH \sim \triangle FDE$, 在 $\text{Rt}\triangle EDH$ 中, 由勾股定理得 DE , 即可得出 EF ; i) 当 $\odot E$ 与 $\odot F$ 内切时, $|x - (4 - 2x)| = \sqrt{3x^2 - 6x + 12}$. 解得, $x_1 = \frac{9 + \sqrt{57}}{6}$ (舍), $x_2 = \frac{9 - \sqrt{57}}{6}$ (舍); ii) 当 $\odot E$ 与 $\odot F$ 外切时, $x + (4 - 2x) = \sqrt{3x^2 - 6x + 12}$. 解得 $x_1 = 1$ (舍), $x_2 = -2$ (舍); 2° 点 F 与点 B 重合时, 即 $x = 1$ 时, 两圆外切; 3° 当点 F 在线段 BG (点 F 不与点 B 重合) 上时,

易得 $CF = 4 - 2x$, 且 $\triangle BDH \sim \triangle FDE$ 仍然成立, 即可得出 EF , 由 1° 计算可知

$x = \frac{9 - \sqrt{57}}{6}$ 时两圆内切. 综上所述, 当 $x = 1$ 时, 两圆外切, 当 $x = \frac{9 - \sqrt{57}}{6}$ 时,

两圆内切.

【解答】解: (1) 过点 D 作 $DH \perp AB$, 垂足为 H ,

在 $\text{Rt}\triangle AHD$ 中, $AH = AD \cdot \cos A = BC \cdot \cos A = 1$,

$$\therefore \frac{AH}{AD} = \frac{1}{2}, \quad \frac{BC}{CD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AH}{AD} = \frac{BC}{CD}, \quad \text{即} \frac{AH}{BC} = \frac{AD}{CD}.$$

又 $\because \angle C = \angle A = 60^\circ$,

$$\therefore \triangle AHD \sim \triangle CBD,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle AHD = 90^\circ,$$

$$\therefore BD \perp BC;$$

(2) ① $\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC = 90^\circ,$$

$$\because \angle BDH + \angle HDA = 90^\circ, \quad \angle A + \angle HDA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDH = \angle A = 60^\circ,$$

$$\because \angle EDF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BDH = \angle EDF, \quad \text{即} \angle EDH + \angle BDE = \angle FDB + \angle BDE,$$

$$\therefore \angle EDH = \angle FDB,$$

$$\text{又} \because \angle EHD = \angle CBD = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle EHD \sim \triangle FBD,$$

$$\therefore \frac{DH}{BD} = \frac{EH}{BF},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{x-1}{2-y},$$

$$\therefore y = 4 - 2x \quad (1 < x < 2);$$

② 连接 EF , 分三种情况:

1° 当点 F 在线段 BC (点 F 不与点 B 、 C 重合) 上时,

$$\because \triangle EHD \sim \triangle FBD,$$

$$\therefore \frac{DH}{BD} = \frac{DE}{DF}, \quad \text{即} \frac{DH}{DE} = \frac{BD}{DF}.$$

$$\text{又} \because \angle BDH = \angle EDF,$$

$$\therefore \triangle BDH \sim \triangle FDE,$$

$$\therefore \angle DEF = 90^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle EDH \text{ 中, } DE = \sqrt{EH^2 + DH^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 4},$$

$$\therefore EF = DE \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3} \cdot DE = \sqrt{3x^2 - 6x + 12};$$

$$i) \text{ 当 } \odot E \text{ 与 } \odot F \text{ 内切时, } |x - (4 - 2x)| = \sqrt{3x^2 - 6x + 12}.$$

$$\text{解得, } x_1 = \frac{9 + \sqrt{57}}{6} \text{ (舍), } x_2 = \frac{9 - \sqrt{57}}{6} \text{ (舍);}$$

$$ii) \text{ 当 } \odot E \text{ 与 } \odot F \text{ 外切时, } x + (4 - 2x) = \sqrt{3x^2 - 6x + 12}.$$

$$\text{解得 } x_1 = 1 \text{ (舍), } x_2 = -2 \text{ (舍);}$$

2° 点 F 与点 B 重合时, 即 $x = 1$ 时, 两圆外切;

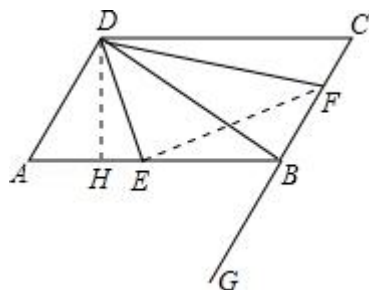
3° 当点 F 在线段 BG (点 F 不与点 B 重合) 上时,

易得 $CF = 4 - 2x$, 且 $\triangle BDH \sim \triangle FDE$ 仍然成立,

$$\therefore EF = \sqrt{3x^2 - 6x + 12}.$$

由 1° 计算可知 $x = \frac{9 - \sqrt{57}}{6}$ 时两圆内切.

综上所述, 当 $x = 1$ 时, 两圆外切, 当 $x = \frac{9 - \sqrt{57}}{6}$ 时, 两圆内切.



【点评】 本题考查了相似形的综合题以及三角函数、勾股定理、圆与圆的位置关系, 注意分类思想在解题中的应用.