

2020 年上海市崇明区中考数学一模试卷

答案解析版

一、选择题

1. 下列各组图形一定相似的是 ()

- A. 两个菱形; B. 两个矩形; C. 两个直角梯形; D. 两个正方形.

【答案】D

【解析】

【分析】

形状相同的图形称为相似图形. 结合图形, 对选项一一分析, 排除错误答案即可.

【详解】A. 任意两个菱形, 边的比相等、对应角不一定相等, 不一定相似, 本选项不合题意;

B. 任意两个矩形, 对应角对应相等、边的比不一定相等, 不一定相似, 本选项不合题意;

C. 任意两个直角梯形, 形状不一定相同, 不一定相似, 本选项不合题意;

D. 任意两个正方形的对应角对应相等、边的比相等, 一定相似, 本选项符合题意;

故选: D.

【点睛】本题考查的是相似形的定义, 相似图形的形状必须完全相同; 相似图形的大小不一定相同.

2. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 如果 $AC = 8$, $BC = 6$, 那么 $\tan B$ 的余切值为 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【答案】A

【解析】

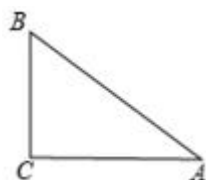
【分析】

根据余切函数的定义解答即可.

【详解】如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\because \angle C = 90^\circ$, $AC = 8$, $BC = 6$,

$$\therefore \cot B = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},$$

故选: A.



【点睛】本题考查解直角三角形, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.

3. 抛物线 $y = -3(x+1)^2 + 2$ 的顶点坐标是 ()

A. (1, 2)

B. (1, -2)

C. (-1, 2)

D. (-1, -2)

【答案】C

【解析】

【分析】

由函数解析式直接可得顶点坐标.

【详解】 $\because y = -3(x+1)^2 + 2$,

$\therefore$ 顶点为 $(-1, 2)$,

故选: C.

【点睛】本题考查二次函数的性质; 熟练掌握二次函数由解析式求顶点坐标的方法是解题的关键.

4. 已知 $\vec{c}$ 为非零向量, $\vec{a} = 3\vec{c}$, $\vec{b} = -2\vec{c}$, 那么下列结论中错误的是 ()

A. $\vec{a} \parallel \vec{b}$

B. $|\vec{a}| = \frac{3}{2}|\vec{b}|$

C. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同

D. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反

【答案】C

【解析】

【分析】

根据平面向量的性质一一判断即可.

【详解】 $\because \vec{a} = 3\vec{c}, \vec{b} = -2\vec{c}$

$$\therefore \vec{a} = -\frac{3}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \vec{a} \parallel \vec{b}, |\vec{a}| = -\frac{3}{2}|\vec{b}|$$

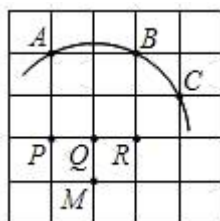
$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反,

$\therefore$ A, B, D 正确, C 错误;

故选: C.

【点睛】 本题考查平面向量, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.

5. 如图, 在 5×5 正方形网格中, 一条圆弧经过 A、B、C 三点, 那么这条圆弧所在的圆的圆心为图中的()



A. M

B. P

C. Q

D. R

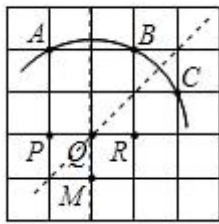
【答案】 C

【解析】

【分析】

根据垂径定理的推论: 弦的垂直平分线必过圆心, 分别作 AB, BC 的垂直平分线即可得到答案.

【详解】 解: 作 AB 的垂直平分线, 作 BC 的垂直平分线, 如图,

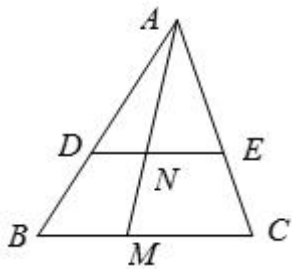


它们都经过 Q，所以点 Q 为这条圆弧所在圆的圆心.

故选 C.

【点睛】本题考查了垂径定理的推论：弦的垂直平分线必过圆心. 这也常用来确定圆心的方法.

6.如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在 AB 和 AC 边上且 $DE \parallel BC$ ，点 M 为 BC 边上一点（不与点 B 、 C 重合），联结 AM 交 DE 于点 N ，下列比例式一定成立的是（ ）



- A. $\frac{AD}{AN} = \frac{AN}{AE}$ B. $\frac{DN}{NE} = \frac{BM}{CM}$ C. $\frac{DN}{BM} = \frac{AE}{EC}$ D. $\frac{DN}{MC} = \frac{NE}{BM}$

【答案】B

【解析】

【分析】

根据相似三角形的判定和性质分析即可.

【详解】 $\because DE \parallel BC$,

$\therefore \triangle ADN \sim \triangle ABM$, $\triangle ANE \sim \triangle AMC$,

$$\therefore \frac{DN}{BM} = \frac{AN}{AM}, \quad \frac{NE}{MC} = \frac{AN}{AM},$$

$$\therefore \frac{DN}{BM} = \frac{NE}{CM},$$

$$\text{即 } \frac{DN}{NE} = \frac{BM}{CM},$$

故选：B.

【点睛】此题考查了相似三角形的判定和性质，牢记定理是解决此题的关键.

二、填空题

7. 已知 $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ ，那么 $\frac{x+y}{x} =$ _____.

【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】

【分析】

直接利用已知得出 $x = \frac{2}{3}y$ ，进而得出答案.

【详解】 $\because \frac{x}{y} = \frac{2}{3},$

$$\therefore x = \frac{2}{3}y$$

$$\therefore \frac{x+y}{x} = \frac{\frac{2}{3}y+y}{\frac{2}{3}y} = \frac{5}{2}.$$

故答案为： $\frac{5}{2}$.

【点睛】此题主要考查了比例的性质，正确运用已知变形是解题关键.

8. 已知线段 $AB = 8\text{cm}$ ，点 C 在线段 AB 上，且 $AC^2 = BC \cdot AB$ ，那么线段 AC 的长 _____ cm .

【答案】 $4\sqrt{5} - 4$

【解析】

【分析】

根据黄金分割的定义得到点 C 是线段 AB 的黄金分割点，根据黄金比值计算得到答案.

【详解】 $\because AC^2 = BC \cdot AB$,

$\therefore$ 点 C 是线段 AB 的黄金分割点, $AC > BC$,

$$\therefore AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 8 = 4\sqrt{5} - 4$$

故答案为: $4\sqrt{5} - 4$.

【点睛】 本题考查的是黄金分割的概念和性质, 掌握黄金比值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是解题的关键.

9. 如果两个三角形相似, 其中一个三角形的两个内角分别为 50° 和 60° , 那么另一个三角形的最大角为_____度.

【答案】 70

【解析】

【分析】

根据相似三角形的性质以及三角形的内角和定理即可解决问题.

【详解】 $\because$ 三角形的两个内角分别为 50° 和 60° ,

$\therefore$ 这个三角形的第三个内角为 $180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$,

根据相似三角形的性质可知, 另一个三角形的最大角为 70° .

故答案为 70.

【点睛】 本题考查三角形内角和定理, 相似三角形的性质等知识, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.

10. 小杰沿坡比为 1:2.4 的山坡向上走了 130 米. 那么他沿着垂直方向升高了_____米.

【答案】 50

【解析】

【分析】

设他沿着垂直方向升高了 x 米，根据坡度的概念用 x 表示出他行走的水平宽度，根据勾股定理计算即可．

【详解】 设他沿着垂直方向升高了 x 米，

$\therefore$ 坡比为 $1:2.4$ ，

$\therefore$ 他行走的水平宽度为 $2.4x$ 米，

由勾股定理得， $x^2 + (2.4x)^2 = 1302$ ，

解得， $x = 50$ ，即他沿着垂直方向升高了 50 米，

故答案为： 50 ．

【点睛】 本题考查的是解直角三角形的应用—坡度坡角问题，掌握坡度是坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比是解题的关键．

11. 在某一时刻，测得一根高为 $1.8m$ 的竹竿的影长为 $3m$ ，同时同地测得一栋楼的影长为 $90m$ ，则这栋楼的高度为 _____ m ．

【答案】 54

【解析】

【分析】

根据同一时刻物高与影长成正比即可得出结论．

【详解】 解：设这栋楼的高度为 hm ，

$\therefore$ 在某一时刻，测得一根高为 $1.8m$ 的竹竿的影长为 $3m$ ，同时测得一栋楼的影长为 $90m$ ，

$$\therefore \frac{1.8}{3} = \frac{h}{90},$$

解得 $h = 54$ (m)．

故答案为 54 ．

【点睛】本题考查的是相似三角形的应用，熟知同一时刻物高与影长成正比是解答此题的关键.

12.如果将抛物线 $y=x^2+2x-1$ 先向右平移 2 个单位，再向上平移 3 个单位，那么所得的新抛物线的顶点坐标为_____.

【答案】 (1,1)

【解析】

【分析】

先把 $y=x^2+2x-1$ 配方得到 $y=(x+1)^2-2$ ，则抛物线 $y=x^2+2x-1$ 的顶点坐标为 $(-1, -2)$ ，然后把点 $(-1, -2)$ 先向右平移 2 个单位，再向上平移 3 个单位即可得到新抛物线的顶点坐标.

【详解】 $\because y=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$,

$\therefore$ 抛物线 $y=x^2+2x-1$ 的顶点坐标为 $(-1, -2)$,

$\therefore$ 把点 $(-1, -2)$ 先向右平移 2 个单位，再向上平移 3 个单位得到点的坐标为 $(1, 1)$,

即新抛物线的顶点坐标为 $(1, 1)$.

故答案为： $(1, 1)$.

【点睛】本题考查了二次函数图象与几何变换，利用平移规律：左加右减，上加下减是解题关键.

13.如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图像上部分点的横坐标 x 与纵坐标 y 的对应值如下表所示，那么它的图像与 x 轴的另一个交点坐标是_____.

x	...	-1	0	1	2	...
y	...	0	3	4	3	...

【答案】 (3,0)

【解析】

【分析】

根据 (0, 3)、(2, 3) 两点求得对称轴，再利用对称性解答即可.

【详解】 $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 (0, 3)、(2, 3) 两点，

$$\therefore \text{对称轴 } x = \frac{0+2}{2} = 1;$$

点 (-1, 0) 关于对称轴对称点为 (3, 0),

因此它的图象与 x 轴的另一个交点坐标是 (3, 0).

故答案为: (3, 0).

【点睛】 本题考查了抛物线与 x 轴的交点，关键是熟练掌握二次函数的对称性.

14. 正五边形的中心角的度数是_____.

【答案】 72° .

【解析】

【分析】

根据正多边形的圆心角定义可知: 正 n 边形的圆中心角为 $\frac{360^\circ}{n}$, 则代入求解即可.

【详解】 解: 正五边形的中心角为: $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

故答案为 72° .

【点睛】 此题考查了正多边形的中心角的知识. 题目比较简单, 注意熟记定义.

15. 两圆的半径之比为 3:1, 当它们外切时, 圆心距为 4, 那么当它们内切时, 圆心距为_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】

只需根据两圆的半径比以及两圆外切时, 圆心距等于两圆半径之和, 列方程求得两圆的半径;

再根据两圆内切时, 圆心距等于两圆半径之差求解.

【详解】 设大圆的半径为 R , 小圆的半径为 r , 则有

$$r: R = 1: 3;$$

$$\text{又 } R + r = 4,$$

$$\text{解, 得 } R = 3, r = 1,$$

$$\therefore \text{当它们内切时, 圆心距} = 3 - 1 = 2.$$

故答案为: 2.

【点睛】 此题考查了两圆的位置关系与数量之间的联系. 解题的关键是正确的求出两个半径.

16. 如果梯形两底分别为 4 和 6, 高为 2, 那么两腰延长线的交点到这个梯形的较大底边的距离是_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】

根据 $DE \parallel BC$, 即可求得 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 得出 $\frac{AF}{AG} = \frac{AF}{AF+2} = \frac{DE}{BC} = \frac{4}{6}$, 求出 $AF = 4$,

即可得出答案.

【详解】 在梯形 $BCED$ 中, 作 $AG \perp BC$ 于 G , 交 DE 于 F , 如图所示: $\because DE \parallel BC$,

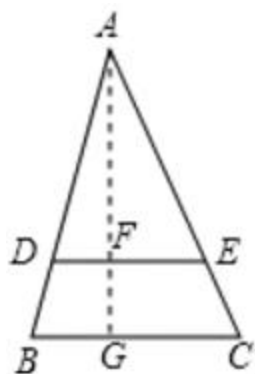
$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AF}{AG} = \frac{AF}{AF+2} = \frac{DE}{BC} = \frac{4}{6},$$

$$\text{解得: } AF = 4,$$

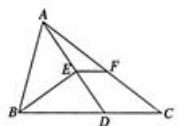
$$\therefore AG = AF + GF = 4 + 2 = 6.$$

故答案为：6.



【点睛】 本题考查了相似三角形的判定，相似三角形对应边比值相等的性质，本题中根据 DE、BC 的比值求 AF 的值是解题的关键.

17.如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在 BC 上，且 $BD = BA$ ， $\angle ABC$ 的平分线 BE 交 AD 于点 E ，点 F 是 AC 的中点，连结 EF .若四边形 $DCFE$ 和 $\triangle BDE$ 的面积都为 3，则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____.



【答案】 10

【解析】

【分析】

首先利用等腰三角形的性质得到点 E 是 AD 的中点，可得 EF 是 $\triangle ACD$ 的中位线，则 $EF \parallel CD$ ， $EF = \frac{1}{2} CD$ ，进而可证明 $\triangle AEF \sim \triangle ADC$ ，然后利用相似三角形面积的比等于相似比的平方求得 $\triangle ADC$ 的面积，由点 E 是 AD 的中点得 $\triangle BDE$ 和 $\triangle BAE$ 面积相等，利用 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BDE} + S_{\triangle BAE} + S_{\triangle ADC}$ 即可求解.

【详解】 解： $\because BE$ 平分 $\angle ABC$ ， $BD = BA$ ，

$\therefore BE$ 是 $\triangle ABD$ 的中线，

∴点 E 是 AD 的中点,

又∵F 是 AC 的中点,

∴EF 是 $\triangle ADC$ 的中位线,

$$\therefore EF \parallel CD, EF = \frac{1}{2} CD,$$

∴ $\triangle AEF \sim \triangle ADC$,

$$\therefore S_{\triangle AEF} : S_{\triangle ADC} = 1 : 4,$$

$$\therefore S_{\triangle AEF} : S_{\text{四边形 DCFE}} = 1 : 3,$$

∵四边形 DCFE 的面积为 3,

$$\therefore S_{\triangle AEF} = 1,$$

$$\therefore S_{\triangle ADC} = S_{\triangle AEF} + S_{\text{四边形 DCFE}} = 1 + 3 = 4,$$

∵点 E 是 AD 的中点, $\triangle BDE$ 的面积为 3,

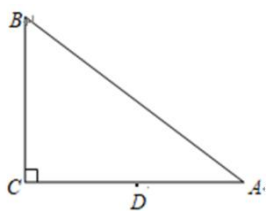
$$\therefore S_{\triangle BDE} = S_{\triangle BAE} = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BDE} + S_{\triangle BAE} + S_{\triangle ADC} = 3 + 3 + 4 = 10.$$

故答案为 10.

【点睛】 本题考查等腰三角形的判定和性质、三角形中位线的定义和性质、相似三角形的判定和性质, 解题的关键在于求证 EF 为中位线, $S_{\triangle AEF} : S_{\triangle ADC} = 1 : 4$.

18. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 10$, $AC = 8$, 点 D 是 AC 的中点, 点 E 在边 AB 上, 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 翻折, 使得点 A 落在点 A' 处, 当 $A'E \perp AB$ 时, 那么 A'A 的长为_____.



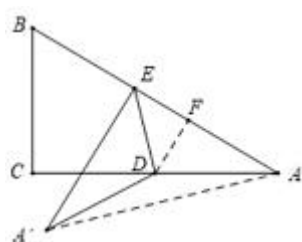
【答案】 $\frac{28}{5}\sqrt{2}$ 或 $\frac{4}{5}\sqrt{2}$

【解析】

【分析】

分两种情形分别求解，作 $DF \perp AB$ 于 F ，连接 AA' ．想办法求出 AE ，利用等腰直角三角形的性质求出 AA' 即可．

【详解】如图，作 $DF \perp AB$ 于 F ，连接 AA' ．



在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 6$ ，

$\because \angle DAF = \angle BAC$ ， $\angle AFD = \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle AFD \sim \triangle ACB$ ，

$$\therefore \frac{DF}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC},$$

$$\therefore \frac{DF}{6} = \frac{4}{10} = \frac{AF}{8},$$

$$\therefore DF = \frac{12}{5}, \quad AF = \frac{16}{5},$$

$\because A'E \perp AB$ ，

$\therefore \angle AEA' = 90^\circ$ ，

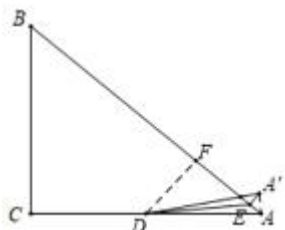
由翻折不变性可知： $\angle AED = 45^\circ$ ，

$$\therefore EF = DF = \frac{12}{5},$$

$$\therefore AE = A'E = \frac{12}{5} + \frac{16}{5} = \frac{28}{5},$$

$$\therefore AA' = \frac{28}{5}\sqrt{2},$$

如图,作 $DF \perp AB$ 于 F , 当 $EA' \perp AB$ 时, 同法可得 $AE = \frac{16}{5} - \frac{12}{5} = \frac{4}{5}$, $AA' = \sqrt{2} AE = \frac{4}{5}\sqrt{2}$.



故答案为 $\frac{28}{5}\sqrt{2}$ 或 $\frac{4}{5}\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查翻折变换, 相似三角形的判定和性质, 解直角三角形等知识, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 构造直角三角形解决问题, 属于中考填空题中的压轴题.

三、解答题

19. 计算: $\tan^2 60^\circ + \frac{\cot 60^\circ + 2 \tan 30^\circ}{2 \sin 30^\circ} - \sin^2 45^\circ$

【答案】 $\frac{5}{2} + \sqrt{3}$

【解析】

【分析】

根据特殊角的三角函数值即可代入求解.

【详解】解: 原式 $= (\sqrt{3})^2 + \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{2 \times \frac{1}{2}} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

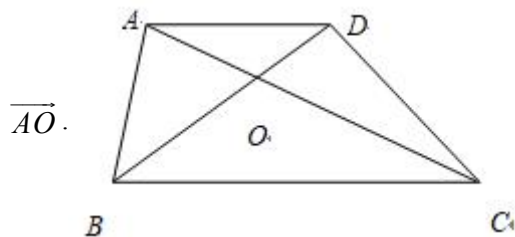
$$= 3 + \sqrt{3} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5}{2} + \sqrt{3}$$

【点睛】此题主要考查实数的运算, 解题的关键是熟知特殊角的三角函数值.

20. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $BC = 2AD$, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O ,

设 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. 试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示向量



【答案】 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a}$

【解析】

【分析】

先根据平行线分线段成比例得到 $\frac{AO}{OC} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$ ，得到 $AO = \frac{1}{3}AC$ ，再根据 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ 即可求解.

【详解】 $\because AD \parallel BC, BC = 2AD$

$$\therefore \frac{AO}{OC} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{AO}{AC} = \frac{1}{3} \text{ 即 } AO = \frac{1}{3}AC$$

$$\because \overrightarrow{AD} = \vec{a},$$

$$\overrightarrow{BC} \text{ 与 } \overrightarrow{AD} \text{ 同向, } \therefore \overrightarrow{BC} = 2\vec{a}$$

$$\because \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} + 2\vec{a}$$

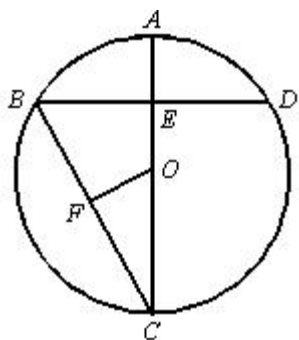
$$\therefore \overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a}$$

【点睛】 本题考查平面向量，解题的关键是熟练掌握基本知识.

21. 如图, AC 是 $\odot O$ 的直径, 弦 $BD \perp AO$ 于 E , 连接 BC , 过点 O 作 $OF \perp BC$ 于 F , 若 $BD=8\text{cm}$, $AE=2\text{cm}$,

(1) 求 $\odot O$ 的半径;

(2) 求 O 到弦 BC 的距离.



【答案】 (1) 5; (2) $\sqrt{5}$.

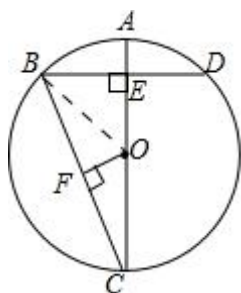
【解析】

【分析】

(1) 连结 OB ，设半径为 r ，则 $OE=r-2$ ，运用垂径定理和勾股定理即可求解；

(2) 利用 $S_{\triangle BCO} = \frac{1}{2} BC \cdot OF = \frac{1}{2} OC \cdot BE$ 即可求解.

【详解】 (1) 连结 OB ，设半径为 r ，则 $OE=r-2$ ，



$\because AC$ 是 $\odot O$ 的直径，弦 $BD \perp AO$ 于 E ， $BD=8\text{cm}$ ，

$\therefore BE=DE=4$ ，

在 $\text{Rt}\triangle OBE$ 中 $\because OE^2+BE^2=OB^2$ ，

$\therefore (r-2)^2+4^2=r^2$ ，

$\therefore r=5$ ；

(2) $\because r=5$ ，

$\therefore AC=10$ ， $EC=8$

$\therefore BC=4\sqrt{5}$ ；

$$\because OF \perp BC,$$

$$\therefore S_{\triangle BCO} = \frac{1}{2} BC \cdot OF = \frac{1}{2} OC \cdot BE$$

$$\therefore 4\sqrt{5} \cdot OF = 5 \times 4$$

$$\therefore OF = \sqrt{5}.$$

【点睛】此题考查垂径定理，关键是根据垂径定理得出 OE 的长.

22. 如图 1, 为放置在水平桌面 l 上的台灯, 底座的高 AB 为 5cm . 长度均为 20cm 的连杆 BC , CD 与 AB 始终在同一水平面上.

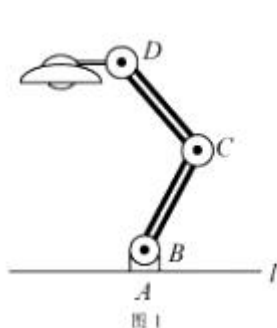


图 1

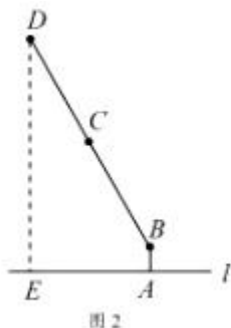


图 2

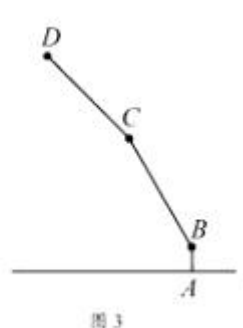


图 3

(1) 旋转连杆 BC , CD , 使 $\angle BCD$ 成平角, $\angle ABC = 150^\circ$, 如图 2, 求连杆端点 D 离桌面 l 的高度 DE .

(2) 将 (1) 中的连杆 CD 绕点 C 逆时针旋转, 使 $\angle BCD = 165^\circ$, 如图 3, 问此时连杆端点 D 离桌面 l 的高度是增加了还是减少? 增加或减少了多少? (精确到 0.1cm , 参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sqrt{3} \approx 1.73$)

【答案】(1) $DE \approx 39.6\text{cm}$; (2) 下降了, 约 3.2cm .

【解析】

【分析】

(1) 如图 2 中, 作 $BO \perp DE$ 于 O . 解直角三角形求出 OD 即可解决问题.

(2) 作 $DF \perp l$ 于 F , $CP \perp DF$ 于 P , $BG \perp DF$ 于 G , $CH \perp BG$ 于 H . 则四边形 $PCHG$ 是矩形, 求出 DF , 再求出 $DF-DE$ 即可解决问题.

【详解】(1) 过点 B 作 $BO \perp DE$ ，垂足为 O ，如图 2，

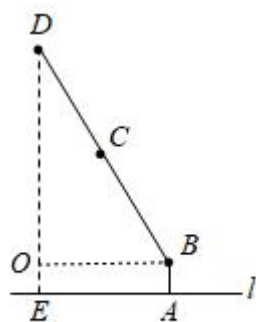


图2

则四边形 $ABOE$ 是矩形， $\angle OBD = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$ ，

$$\therefore DO = BO \cdot \sin 60^\circ = 40 \times \sin 60^\circ = 20\sqrt{3},$$

$$\therefore DE = DO + OE = DO + AB = 20\sqrt{3} + 5 \approx 39.6 \text{ cm}.$$

(2) 下降了.

如图 3，过点 D 作 $DF \perp l$ 于点 F ，过点 C 作 $CP \perp DF$ 于点 P ，过点 B 作 $BG \perp DF$ 于点

G ，过点 C 作 $CH \perp BG$ 于点 H ，则四边形 $PCHG$ 为矩形，

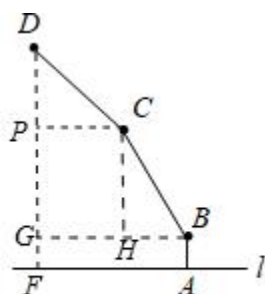


图3

$$\because \angle CBH = 60^\circ, \therefore \angle BCH = 30^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle BCD = 165^\circ, \therefore \angle DCP = 45^\circ,$$

$$\therefore CH = BC \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}, \quad DP = CD \sin 45^\circ = 10\sqrt{2},$$

$$\therefore DF = DP + PG + GF = DP + CH + AB$$

$$= 10\sqrt{2} + 10\sqrt{3} + 5.$$

$$\therefore \text{下降高度: } DE - DF = 20\sqrt{3} + 5 - 10\sqrt{2} - 10\sqrt{3} - 5$$

$$= 10\sqrt{3} - 10\sqrt{2}$$

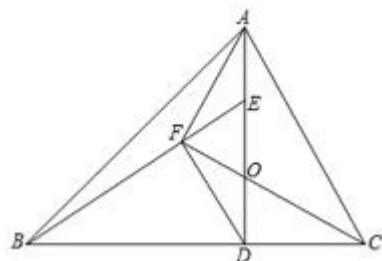
$$\approx 3.2\text{cm}.$$

【点睛】本题考查解直角三角形的应用，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造直角三角形解决问题.

23.如图， $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ ， E 是 AD 边上一点，联结 BE ，过点 D 作 $DF \perp BE$ ，垂足为 F ，且 $AE \cdot DF = EF \cdot CD$ ，联结 AF 、 CF ， CF 与边 AD 交于点 O 。

求证：(1) $\angle EAF = \angle DCF$ ；

$$(2) AF \cdot BD = AC \cdot DF.$$



【答案】(1) 见解析；(2) 见解析

【解析】

【分析】

(1) 证明 $\triangle AEF \sim \triangle CDF$ ，根据相似三角形的性质证明结论；

(2) 证明 $\triangle AOF \sim \triangle COD$ ，得到 $\frac{AO}{OF} = \frac{OC}{OD}$ ，得到 $\triangle AOC \sim \triangle FOD$ ，根据相似三角形的性质得到 $\angle ACF = \angle EDF$ ，证明 $\triangle BFD \sim \triangle CFA$ ，根据相似三角形的性质证明结论.

【详解】(1) 证明： $\because AD \perp BC$ ， $DF \perp BE$

$$\therefore \angle ADB = \angle DFE = 90^\circ$$

$$\therefore \angle DBE + \angle BED = 90^\circ, \quad \angle DBE + \angle BDF = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BED = \angle BDF$$

$$\therefore \angle AEF = \angle CDF$$

$$\because AE \cdot DF = CD \cdot EF$$

$$\therefore \frac{AE}{CD} = \frac{EF}{DF}$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle CDF$$

$$\therefore \angle EAF = \angle DCF$$

(2) 证明: $\because \triangle AEF \sim \triangle CDF$,

$$\therefore \angle EFA = \angle DFC$$

$$\therefore \angle AFO = \angle EFD = 90^\circ$$

$$\because \angle DFB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BFD = \angle AFC$$

$$\because \angle EAF = \angle DCF, \angle AOF = \angle COD$$

$$\therefore \triangle AOF \sim \triangle COD$$

$$\therefore \frac{AO}{OC} = \frac{OF}{OD}$$

$$\therefore \frac{AO}{OF} = \frac{OC}{OD}$$

$$\text{又} \because \angle AOC = \angle FOD$$

$$\therefore \triangle AOC \sim \triangle FOD$$

$$\therefore \angle ACF = \angle EDF$$

$$\because \angle DBE + \angle BED = \angle FDE + \angle BED = 90^\circ$$

$$\therefore \angle DBE = \angle EDF$$

$$\therefore \angle ACF = \angle DBE$$

$$\text{又} \because \angle BFD = \angle AFO$$

$$\therefore \triangle BFD \sim \triangle CFA$$

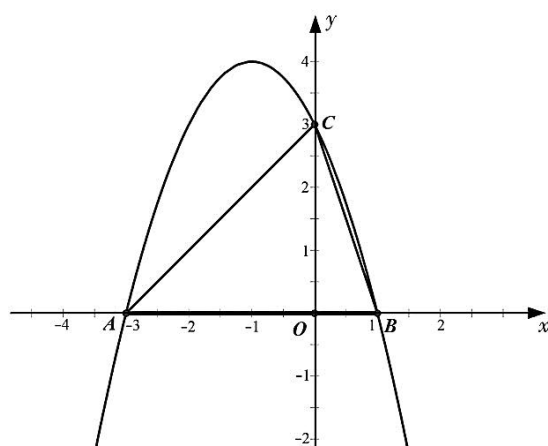
$$\therefore \frac{AF}{DF} = \frac{AC}{BD}$$

$$\therefore AF \cdot BD = AC \cdot DF$$

【点睛】本题考查的是相似三角形的判定和性质，掌握相似三角形的判定定理和性质定理是解题的关键。

24.如图，抛物线与 x 轴相交于点 $A(-3, 0)$ 、点 $B(1, 0)$ ，与 y 轴交于点 $C(0, 3)$ ，点 D 是抛物线上一动点，联结 OD 交线段 AC 于点 E 。

- (1) 求这条抛物线的解析式，并写出顶点坐标；
- (2) 求 $\angle ACB$ 的正切值；
- (3) 当 $\triangle AOE$ 与 $\triangle ABC$ 相似时，求点 D 的坐标。



【答案】 (1) $y = -x^2 - 2x + 3$, $(-1, 4)$; (2) 2; (3) 点 D 的坐标为 $\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{3\sqrt{13}-3}{2}\right)$ 或 $(-\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$

【解析】

【分析】

- (1) 利用待定系数法确定函数解析式，根据函数解析式求得该抛物线的顶点坐标；
- (2) 如图，过点 B 作 $BH \perp AC$ 于点 H ，构造等腰直角 $\triangle ABH$ 和直角 $\triangle BCH$ ，利用勾股定理和两点间的距离公式求得相关线段的长度，从而利用锐角三角函数的定义求得答案；
- (3) 如图 2，过点 D 作 $DK \perp x$ 轴于点 K ，构造直角 $\triangle DOK$ ，设 $D(x, -x^2-2x+3)$ ，则 $K(x, 0)$ 。并由题意知点 D 位于第二象限。由于 $\angle BAC$ 是公共角，所以当 $\triangle AOE$ 与 $\triangle ABC$ 相似时，有 2 种情况：
 - ① $\angle AOD = \angle ABC$ 。则 $\tan \angle AOD = \tan \angle ABC = 3$ 。由锐角三角函数定义列出比例式，从而

求得点 D 的坐标.

② $\angle AOD = \angle ACB$. 则 $\tan \angle AOD = \tan \angle ACB = 2$. 由锐角三角函数定义列出比例式, 从而求得点 D 的坐标.

【详解】(1) 解: 设抛物线的解析式为 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

$\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $A(-3, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 3)$

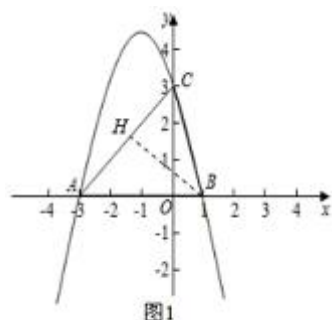
$$\therefore \begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 这条抛物线的解析式为 $y = -x^2 - 2x + 3$

顶点坐标为 $(-1, 4)$

(2) 解: 过点 B 作 $BH \perp AC$, 垂足为 H



$\because \angle AOC = 90^\circ$, $OA = OC = 3$

$\therefore \angle OAC = \angle OCA = 45^\circ$, $AC = 3\sqrt{2}$

$\because \angle BHA = 90^\circ$

$\therefore \angle HAB + \angle HBA = 90^\circ$

$\therefore \angle HAB = \angle HBA = 45^\circ$

$\because$ 在 $Rt\triangle AHB$ 中, $AH^2 + BH^2 = AB^2$, $AB = 4$

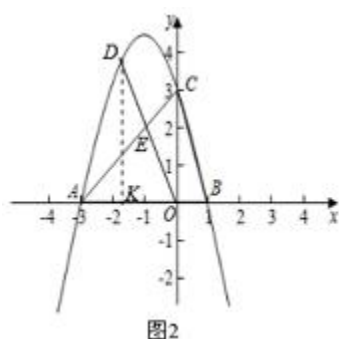
$$\therefore AH = BH = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore CH = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\because \angle BHC = 90^\circ$$

$$\therefore \tan \angle ACB = \frac{BH}{CH} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$$

(3) 解: 过点 D 作 $DK \perp x$ 轴, 垂足为 K



设 $D(x, -x^2 - 2x + 3)$, 则 $K(x, 0)$, 并由题意可得点 D 在第二象限

$$\therefore DK = -x^2 - 2x + 3, \quad OK = -x$$

$\because \angle BAC$ 是公共角

$\therefore$ 当 $\triangle AOE$ 与 $\triangle ABC$ 相似时

存在以下两种可能

$$\textcircled{1} \angle AOD = \angle ABC$$

$$\therefore \tan \angle AOD = \tan \angle ABC = 3$$

$$\therefore \frac{-x^2 - 2x + 3}{-x} = 3$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \quad (\text{舍去})$$

$$\therefore D\left(\frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{3\sqrt{13} - 3}{2}\right)$$

$$\textcircled{2} \angle AOD = \angle ACB$$

$$\therefore \tan \angle AOD = \tan \angle ACB = 2$$

$$\therefore \frac{-x^2 - 2x + 3}{-x} = 2$$

$$\text{解得 } x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3} \text{ (舍去)}$$

$$\therefore D(-\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$$

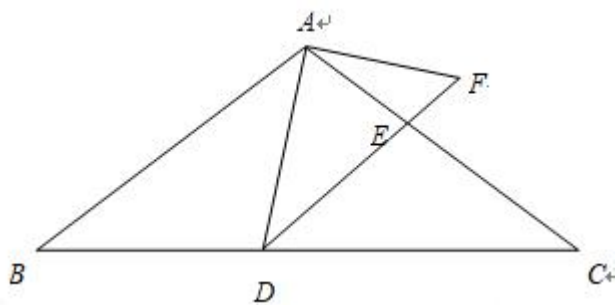
综上所述：当 $\triangle AOE$ 与 $\triangle ABC$ 相似时，

$$\text{点 } D \text{ 的坐标为 } \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{3\sqrt{13}-3}{2} \right) \text{ 或 } (-\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$$

【点睛】主要考查了二次函数的解析式的求法和与几何图形结合的综合能力的培养. 要会利用数形结合的思想把代数和几何图形结合起来, 利用点的坐标的意义表示线段的长度, 从而求出线段之间的关系.

25. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 10$, $BC = 16$, 点 D 为 BC 边上的一个动点 (点 D 不与点 B 、点 C 重合). 以 D 为顶点作 $\angle ADE = \angle B$, 射线 DE 交 AC 边于点 E , 过点 A 作 $AF \perp AD$ 交射线 DE 于点 F .

- (1) 求证: $AB \cdot CE = BD \cdot CD$;
- (2) 当 DF 平分 $\angle ADC$ 时, 求 AE 的长;
- (3) 当 $\triangle AEF$ 是等腰三角形时, 求 BD 的长.



【答案】(1) 见解析; (2) $AE = \frac{125}{32}$; (3) 当 $\triangle AEF$ 是等腰三角形时, BD 的长 11 或 $\frac{39}{4}$

或 $\frac{25}{2}$

【解析】

【分析】

(1) 根据题意证明 $\triangle BDA \sim \triangle CED$ 即可求解；

(2) 根据 OF 平分 $\angle ADC$ 得到 $\angle ADE = \angle CDE$ ，再根据 $DF \parallel AB$ 得到 $\frac{AE}{AC} = \frac{BD}{BC}$ 得到 $\angle BAD = \angle C$ ，从而得到 $\triangle BDA \sim \triangle BAC$ ，即可求解；

(3) 过点 A 作 $AH \perp BC$ ，垂足为 H ，根据三线合一得到 $BH = CH = \frac{1}{2}BC = 8$ ，由勾股定理得出 $AH = 6$ ，再得到 $\tan \angle ADF = \frac{AF}{AD} = \frac{3}{4}$ ，设 $AF = 3k$ ，则 $AD = 4k$ ， $DF = 5k$ ，根据 $\triangle BDA \sim \triangle CED$ 得到 $\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{CD}$ ，再分①点 F 在线段 DE 的延长线上，②点 F 在线段 DE 上，当 $\triangle AEF$ 是等腰三角形进行讨论求解。

【详解】(1) 证明： $\because AB = AC \therefore \angle B = \angle C$

$\because \angle ADC = \angle B + \angle BAD$

即 $\angle ADE + \angle CDE = \angle B + \angle BAD$

$\because \angle ADE = \angle B$

$\therefore \angle BAD = \angle CDE$

$\therefore \triangle BDA \sim \triangle CED$

$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{BD}{CE}$

$\therefore AB \cdot CE = BD \cdot CD$

(2) $\because OF$ 平分 $\angle ADC$ ，

$\therefore \angle ADE = \angle CDE$

$\because \angle CDE = \angle BAD$

$\therefore \angle ADE = \angle BAD$

$\therefore DF \parallel AB, \therefore \frac{AE}{AC} = \frac{BD}{BC}$

$\because \angle ADE = \angle B = \angle C$

$$\therefore \angle BAD = \angle C$$

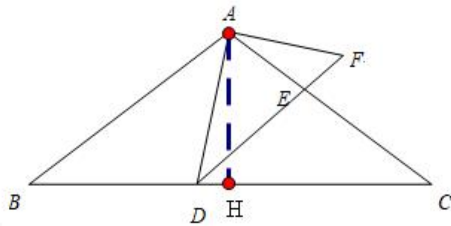
又 $\because \angle B$ 是公共角, $\therefore \triangle BDA \sim \triangle BAC$

$$\therefore \frac{BD}{BA} = \frac{BA}{BC} \quad \therefore \frac{BD}{10} = \frac{10}{16} \quad \therefore BD = \frac{25}{4}$$

$$\therefore \frac{AE}{10} = \frac{4}{16}$$

$$\therefore AE = \frac{125}{32}$$

(3) 过点 A 作 $AH \perp BC$, 垂足为 H



$\because AB = AC, AH \perp BC$

$$\therefore BH = CH = \frac{1}{2}BC = 8$$

由勾股定理得出 $AH = 6$, $\therefore \tan B = \frac{3}{4}$

$\because \angle ADE = \angle B, AF \perp AD$

$$\therefore \tan \angle ADF = \frac{AF}{AD} = \frac{3}{4}$$

设 $AF = 3k$, 则 $AD = 4k, DF = 5k$,

$\because \triangle BDA \sim \triangle CED$

$$\therefore \frac{AD}{DE} = \frac{AB}{CD}$$

①点 F 在线段 DE 的延长线上, 当 $\triangle AEF$ 是等腰三角形时, 存在以下三种情况:

1. $FA = FE = 3k$, 则 $DE = 2k$

$$\therefore \frac{10}{CD} = \frac{4k}{2k} \quad \therefore CD = 5 \quad \therefore BD = 16 - 5 = 11$$

2. $EA = EF$, 则 $ED = 2.5k$

$$\therefore \frac{10}{CD} = \frac{4k}{2.5k} \quad \therefore CD = \frac{25}{4} \quad \therefore BD = 16 - \frac{25}{4} = \frac{39}{4}$$

$$3. AE = AF = 3k, \text{ 则 } DE = \frac{7}{5}k$$

$$\therefore \frac{10}{CD} = \frac{4k}{\frac{7}{5}k} \quad \therefore CD = \frac{7}{2} \quad \therefore BD = 16 - \frac{7}{2} = \frac{25}{2}$$

②点 F 在线段 DE 上, 当 $\triangle AEF$ 是等腰三角形时,

$$\because \angle AFE = 90^\circ + \angle ADF$$

$\therefore \angle AFE$ 是一个钝角

$\therefore$ 只存在 $FA = FE = 3k$ 这种可能, 则 $DE = 8k$

$$\therefore \frac{10}{CD} = \frac{4k}{8k}$$

$\therefore CD = 20 > 16$, 不符合题意, 舍去

综上所述, 当 $\triangle AEF$ 是等腰三角形时, BD 的长 11 或 $\frac{39}{4}$ 或 $\frac{25}{2}$.

【点睛】此题主要考查相似三角形的判定与性质, 解题的关键是熟知相似三角形的判定与性质、等腰三角形的性质.