

2019 年上海市普陀区中考数学一模试卷

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上]

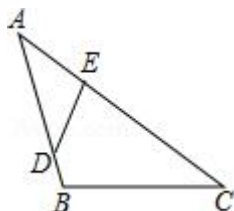
1. (4 分) 已知二次函数 $y = (a - 1)x^2 + 3$ 的图象有最高点，那么 a 的取值范围是 ()

- A. $a > 0$ B. $a < 0$ C. $a > 1$ D. $a < 1$

2. (4 分) 下列二次函数中，如果图象能与 y 轴交于点 $A(0, 1)$ ，那么这个函数是 ()

- A. $y = 3x^2$ B. $y = 3x^2 + 1$ C. $y = 3(x + 1)^2$ D. $y = 3x^2 - x$

3. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上，如果添加下列其中之一条件，不一定能使 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似，那么这个条件是 ()



- A. $\angle AED = \angle B$ B. $\angle ADE = \angle C$ C. $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$ D. $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$

4. (4 分) 已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 都是非零向量，如果 $\vec{a} = 2\vec{c}$ ， $\vec{b} = -2\vec{c}$ ，那么下列说法中，错误的是 ()

- A. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ B. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$
C. $\vec{a} + \vec{b} = 0$ D. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反

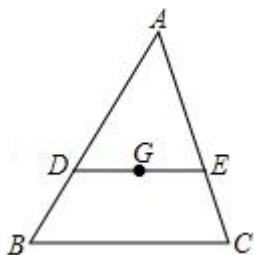
5. (4 分) 已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ ，其中 $\odot O_1$ 为大圆，半径为 3。如果两圆内切时圆心距等于 2，那么两圆外切时圆心距等于 ()

- A. 1 B. 4 C. 5 D. 8

6. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上， $DE \parallel BC$ ，且 DE 经过重心 G ，

在下列四个说法中① $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$ ；② $\frac{BD}{AD} = \frac{1}{3}$ ；③ $\frac{C_{\triangle ADE}}{C_{\triangle ABC}} = \frac{2}{3}$ ；④ $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\text{四边形DBCE}}} = \frac{4}{5}$ ，正确的

个数是 ()



- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7.（4 分）如果 $\frac{x}{y} = \frac{7}{2}$ ，那么 $\frac{x-2y}{y}$ 的值是_____.

8.（4 分）化简： $3(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) - 2(\vec{a} - \vec{b}) =$ _____.

9.（4 分）如果抛物线 $y = 2x^2 + x + m - 1$ 经过原点，那么 m 的值等于_____.

10.（4 分）将抛物线 $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 4$ 先向右平移 2 个单位，再向上平移 3 个单位，那么
平移后所得新抛物线的表达式是_____.

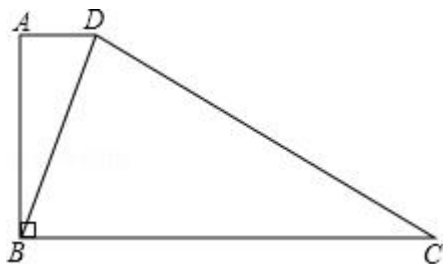
11.（4 分）已知抛物线 $y = 2x^2 + bx - 1$ 的对称轴是直线 $x = 1$ ，那么 b 的值等于_____.

12.（4 分）已知 $\triangle ABC$ 三边的比为 2: 3: 4，与它相似的 $\triangle A' B' C'$ 最小边的长等于 12，
那么 $\triangle A' B' C'$ 最大边的长等于_____.

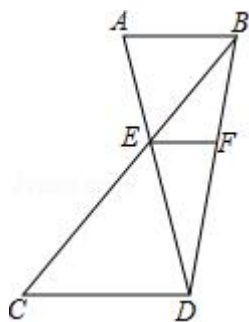
13.（4 分）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $BC = 1$ ，那么 $\angle A$ 的正弦值是_____.

14.（4 分）正八边形的中心角为_____度.

15.（4 分）如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB \perp BC$ ， $BD \perp DC$ ， $\tan \angle ABD = \frac{1}{2}$ ， $BC =$
5，那么 DC 的长等于_____.

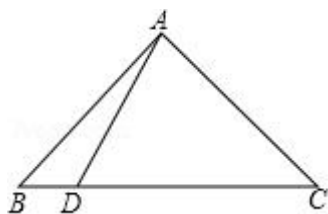


16.（4 分）如图， $AB \parallel CD$ ， AD 、 BC 相交于点 E ，过 E 作 $EF \parallel CD$ 交 BD 于点 F ，如果 $AB:$
 $CD = 2: 3$ ， $EF = 6$ ，那么 CD 的长等于_____.



17. (4分) 已知二次函数 $y = ax^2 + c$ ($a > 0$) 的图象上有纵坐标分别为 y_1 、 y_2 的两点 A 、 B , 如果点 A 、 B 到对称轴的距离分别等于 2、3, 那么 y_1 _____ y_2 (填 “<”、“=” 或 “>”)

18. (4分) 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 8$, $\cos B = \frac{3}{4}$, 点 D 在边 BC 上, 将 $\triangle ABD$ 沿直线 AD 翻折得到 $\triangle AED$, 点 B 的对应点为点 E , AE 与边 BC 相交于点 F , 如果 $BD = 2$, 那么 $EF =$ _____.



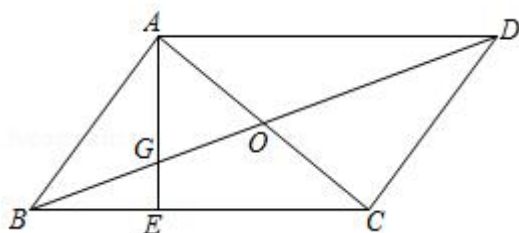
三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10分) 计算: $4\sin 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \frac{2\cot 45^\circ}{\tan 60^\circ - \sqrt{2}}$.

20. (10分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 点 E 在边 BC 上, AE 与 BD 相交于点 G , $AG:GE = 3:1$.

(1) 求 $EC:BC$ 的值;

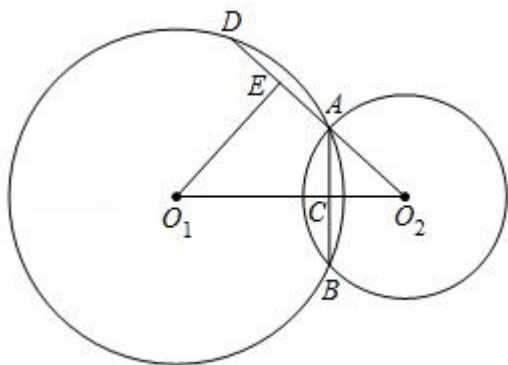
(2) 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AO} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{EC} =$ _____, $\overrightarrow{GB} =$ _____ (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示)



21. (10分) 如图, $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于 A 、 B 两点, O_1O_2 与 AB 交于点 C , O_2A 的延长线交 $\odot O_1$ 于点 D , 点 E 为 AD 的中点, $AE = AC$, 联结 OE .

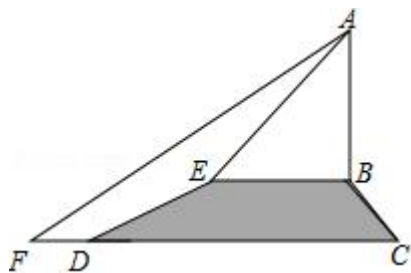
(1) 求证: $O_1E = O_1C$;

(2) 如果 $O_1O_2 = 10$, $O_1E = 6$, 求 $\odot O_2$ 的半径长.



22. (10分) 如图, 小山的一个横断面是梯形 $BCDE$, $EB \parallel DC$, 其中斜坡 DE 的坡长为 13 米, 坡度 $i = 1:2.4$, 小山上有一座铁塔 AB , 在山坡的坡顶 E 处测得铁塔顶端 A 的仰角为 45° , 在与山坡的坡底 D 相距 5 米的 F 处测得铁塔顶端 A 的仰角为 31° (点 F 、 D 、 C 在一直线上), 求铁塔 AB 的高度.

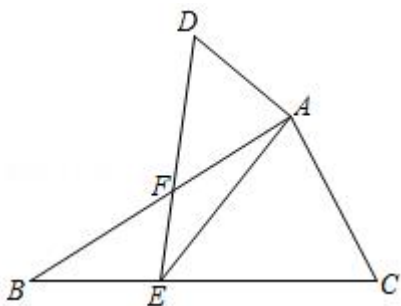
(参考数值: $\sin 31^\circ \approx 0.52$, $\cos 31^\circ \approx 0.86$, $\tan 31^\circ \approx 0.6$)



23. (12分) 已知: 如图, $\triangle ADE$ 的顶点 E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上, DE 与 AB 相交于点 F , $AE^2 = AF \cdot AB$, $\angle DAF = \angle EAC$.

(1) 求证: $\triangle ADE \sim \triangle ACB$;

(2) 求证: $\frac{DF}{DE} = \frac{CE}{CB}$.

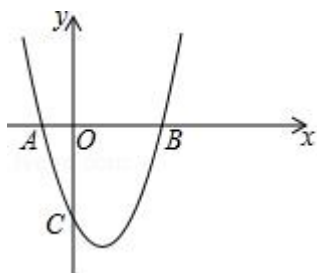


24. (12分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 B , 且 $OB = 3OA$, 与 y 轴交于点 C , 此抛物线顶点为点 D .

(1) 求抛物线的表达式及点 D 的坐标;

(2) 如果点 E 是 y 轴上的一点 (点 E 与点 C 不重合), 当 $BE \perp DE$ 时, 求点 E 的坐标;

(3) 如果点 F 是抛物线上的一点，且 $\angle FBD = 135^\circ$ ，求点 F 的坐标．

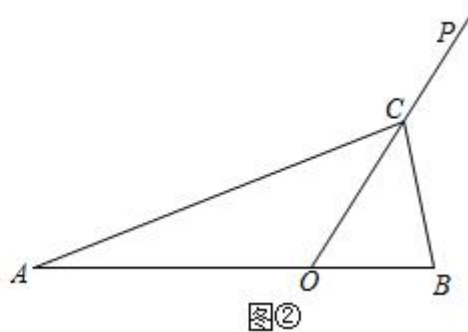
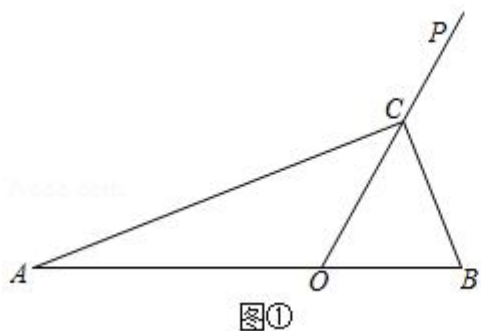


25. (14 分) 如图，点 O 在线段 AB 上， $AO = 2OB = 2a$ ， $\angle BOP = 60^\circ$ ，点 C 是射线 OP 上的一个动点．

(1) 如图①，当 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $OC = 2$ ，求 a 的值；

(2) 如图②，当 $AC = AB$ 时，求 OC 的长（用含 a 的代数式表示）；

(3) 在第 (2) 题的条件下，过点 A 作 $AQ \parallel BC$ ，并使 $\angle QOC = \angle B$ ，求 $AQ : OQ$ 的值．



2019 年上海市普陀区中考数学一模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上]

1.（4 分）已知二次函数 $y = (a - 1)x^2 + 3$ 的图象有最高点，那么 a 的取值范围是（ ）

- A. $a > 0$ B. $a < 0$ C. $a > 1$ D. $a < 1$

【分析】根据二次函数的图象与性质即可求出答案.

【解答】解：由题意可知： $a - 1 < 0$,

$$\therefore a < 1,$$

故选：D.

【点评】本题考查二次函数，解题的关键是熟练运用二次函数的图象与性质，本题属于中等题型.

2.（4 分）下列二次函数中，如果图象能与 y 轴交于点 $A(0, 1)$ ，那么这个函数是（ ）

- A. $y = 3x^2$ B. $y = 3x^2 + 1$ C. $y = 3(x + 1)^2$ D. $y = 3x^2 - x$

【分析】根据 y 轴上点的坐标特征，分别计算出 $x = 0$ 时四个函数对应的函数值，然后根据函数值是否为 1 来判断图象能否与 y 轴交于点 $A(0, 1)$.

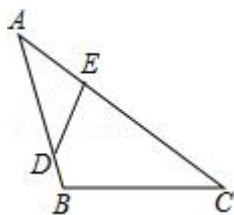
【解答】解：当 $x = 0$ 时， $y = 3x^2 = 0$ ；当 $x = 0$ 时， $y = 3x^2 + 1 = 1$ ；当 $x = 0$ 时， $y = 3(x + 1)^2 = 9$ ；当 $x = 0$ 时， $y = 3x^2 - x = 0$,

所以抛物线 $y = 3x^2 + 1$ 与 y 轴交于点 $(0, 1)$.

故选：B.

【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征：二次函数图象上点的坐标满足其解析式.

3.（4 分）如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB 、 AC 上，如果添加下列其中之一条件，不一定能使 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似，那么这个条件是（ ）



- A. $\angle AED = \angle B$ B. $\angle ADE = \angle C$ C. $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$ D. $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$

【分析】由已知及三角形相似的判定方法，对每个选项分别分析、判断解答出即可．

【解答】解：由题意得， $\angle A = \angle A$ ，

A、当 $\angle ADE = \angle B$ 时， $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ；故本选项不符合题意；

B、当 $\angle ADE = \angle C$ 时， $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ；故本选项不符合题意；

C、当 $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$ 时， $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ；故本选项不符合题意；

D、当 $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$ 时，不能推断 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 相似；故选项符合题意；

故选：D．

【点评】本题考查了直角三角形相似的判定：①有两个对应角相等的三角形相；②有两个对应边的比相等，且其夹角相等，则两个三角形相似；③三组对应边的比相等，则两个三角形相似．

4. (4分) 已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 都是非零向量，如果 $\vec{a} = 2\vec{c}$ ， $\vec{b} = -2\vec{c}$ ，那么下列说法中，错误的是 ()

- A. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ B. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$
C. $\vec{a} + \vec{b} = 0$ D. $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反

【分析】根据平面相等向量的定义、共线向量的定义以及向量的模的计算方法解答．

【解答】解：A、因为 $\vec{a} = 2\vec{c}$ ， $\vec{b} = -2\vec{c}$ ，所以 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反，故本选项说法正确；

B、因为 $\vec{a} = 2\vec{c}$ ， $\vec{b} = -2\vec{c}$ ，所以 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |2\vec{c}|$ ，故选项说法正确；

C、因为 $\vec{a} = 2\vec{c}$ ， $\vec{b} = -2\vec{c}$ ，所以 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，故本选项说法错误；

D、因为 $\vec{a} = 2\vec{c}$ ， $\vec{b} = -2\vec{c}$ ，所以 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反，故本选项说法正确；

故选：C．

【点评】考查了向量，向量是既有方向又有大小的．

5. (4分) 已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ ，其中 $\odot O_1$ 为大圆，半径为3．如果两圆内切时圆心距等于2，那么两圆外切时圆心距等于 ()

- A. 1 B. 4 C. 5 D. 8

【分析】根据两圆位置关系是内切，则圆心距 = 两圆半径之差，以及外切时， $r+R=d$ ，分别求出即可．

【解答】解：∵两圆相内切，设小圆半径为 x ，圆心距为 2，

$$\therefore 3 - x = 2,$$

$$\therefore x = 1,$$

∴小圆半径为 1，

这两圆外切时，圆心距为： $1+3=4$ ．

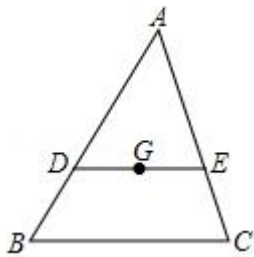
故选：B．

【点评】此题主要考查了两圆的位置关系，用到的知识点为：两圆内切，圆心距 = 两圆半径之差，外切时， $r+R=d$ ．

6. (4 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上， $DE \parallel BC$ ，且 DE 经过重心 G ，

在下列四个说法中① $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$ ；② $\frac{BD}{AD} = \frac{1}{3}$ ；③ $\frac{C_{\triangle ADE}}{C_{\triangle ABC}} = \frac{2}{3}$ ；④ $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\text{四边形}DBCE}} = \frac{4}{5}$ ，正确的

个数是 ()



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【分析】连接 AG 并延长，交 BC 于 F ，依据 $DE \parallel BC$ ，且 DE 经过重心 G ，即可得到 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，且相似比为 2:3，依据相似三角形的性质，即可得到正确结论．

【解答】解：如图所示，连接 AG 并延长，交 BC 于 F ，

∵ $DE \parallel BC$ ，且 DE 经过重心 G ，

∴ $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AG}{AF} = \frac{2}{3}, \text{ 故①正确;}$$

$$\therefore \frac{C_{\triangle ADE}}{C_{\triangle ABC}} = \frac{2}{3}, \text{ 故③正确;}$$

∵ $DG \parallel BF$ ，

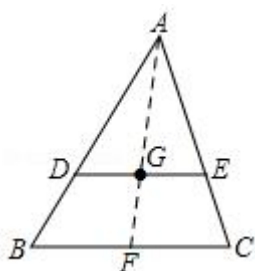
$$\therefore \frac{GF}{GA} = \frac{DB}{DA} = \frac{1}{2}, \text{ 故②错误;}$$

$$\because \triangle ADE \sim \triangle ABC, \frac{DE}{BC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{9},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\text{四边形DBCE}}} = \frac{4}{5}, \text{ 故④正确;}$$

故选: C.



【点评】 本题考查相似三角形的判定和性质以及三角形重心的性质的运用, 解决问题的关键是知道相似三角形的对应边对应成比例.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4 分) 如果 $\frac{x}{y} = \frac{7}{2}$, 那么 $\frac{x-2y}{y}$ 的值是 $\frac{3}{2}$.

【分析】 直接根据已知用同一未知数表示出各数, 进而得出答案.

【解答】 解: $\because \frac{x}{y} = \frac{7}{2},$

$$\therefore \text{设 } x = 7a, \text{ 则 } y = 2a,$$

$$\text{那么 } \frac{x-2y}{y} = \frac{7a-4a}{2a} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{3}{2}.$$

【点评】 此题主要考查了比例的性质, 正确表示出 x, y 的值是解题关键.

8. (4 分) 化简: $3(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) - 2(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} + \frac{7}{2}\vec{b}.$

【分析】 平面向量的运算法则也符合实数的运算法则.

【解答】 解: $3(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) - 2(\vec{a} - \vec{b}) = 3\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} - 2\vec{a} + 2\vec{b} = (3-2)\vec{a} + (\frac{3}{2}+2)\vec{b} = \vec{a} + \frac{7}{2}\vec{b}.$

$$\text{故答案是: } \vec{a} + \frac{7}{2}\vec{b}.$$

【点评】 考查了平面向量, 解题的关键是掌握平面向量的计算法则.

9. (4分) 如果抛物线 $y = 2x^2 + x + m - 1$ 经过原点, 那么 m 的值等于 1.

【分析】把原点坐标代入抛物线解析式即可得到对应 m 的值.

【解答】解: 把 $(0, 0)$ 代入 $y = 2x^2 + x + m - 1$ 得 $m - 1 = 0$, 解得 $m = 1$,

故答案为 1.

【点评】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征: 二次函数图象上点的坐标满足其解析式.

10. (4分) 将抛物线 $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 4$ 先向右平移 2 个单位, 再向上平移 3 个单位, 那么平移后所得新抛物线的表达式是 $\frac{1}{2}(x+1)^2 - 1$.

【分析】根据“左加右减、上加下减”的原则进行解答即可.

【解答】解: 将抛物线 $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 4$ 向右平移 2 个单位所得直线解析式为: $y = \frac{1}{2}(x+3-2)^2 - 4 = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 4$;

再向上平移 3 个单位为: $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 4 + 3$, 即 $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 1$.

故答案是: $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 1$.

【点评】此题主要考查了二次函数图象与几何变换, 要求熟练掌握平移的规律: 左加右减, 上加下减.

11. (4分) 已知抛物线 $y = 2x^2 + bx - 1$ 的对称轴是直线 $x = 1$, 那么 b 的值等于 -4.

【分析】由对称轴公式可得到关于 b 的方程, 可求得答案.

【解答】解: $\because y = 2x^2 + bx - 1$,

$\therefore$ 抛物线对称轴为 $x = -\frac{b}{2 \times 2} = -\frac{b}{4}$,

$\therefore -\frac{b}{4} = 1$, 解得 $b = -4$,

故答案为: -4.

【点评】本题主要考查二次函数的性质, 掌握二次函数的对称轴公式是解题的关键, 即 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴为 $x = -\frac{b}{2a}$.

12. (4分) 已知 $\triangle ABC$ 三边的比为 2: 3: 4, 与它相似的 $\triangle A' B' C'$ 最小边的长等于 12, 那么 $\triangle A' B' C'$ 最大边的长等于 24.

【分析】由于 $\triangle A' B' C' \sim \triangle ABC$, 因此它们各对应边的比都相等, 可据此求出 $\triangle A' B' C'$ 的最大边的长.

【解答】解：设 $\triangle A'B'C'$ 的最大边长是 x ，

根据相似三角形的对应边的比相等，可得：

$$\frac{x}{12} = \frac{4}{2},$$

解得： $x = 24$ ，

$\therefore \triangle A'B'C'$ 最大边的长等于24.

故答案为：24.

【点评】本题主要考查了相似三角形的性质：相似三角形的对应边成比例.

13. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $BC = 1$ ，那么 $\angle A$ 的正弦值是 $\frac{1}{3}$.

【分析】我们把锐角 A 的对边 a 与斜边 c 的比叫做 $\angle A$ 的正弦，记作 $\sin A$. 代入数据直接计算得出答案.

【解答】解： $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $BC = 1$ ，

$$\therefore \angle A \text{ 的正弦值 } \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{3},$$

故答案为： $\frac{1}{3}$.

【点评】本题考查了锐角三角函数的定义及运用：在直角三角形中，锐角的正弦为对边比斜边，余弦为邻边比斜边，正切为对边比邻边.

14. (4分) 正八边形的中心角为 45 度.

【分析】根据中心角是正多边形相邻的两个半径的夹角来解答.

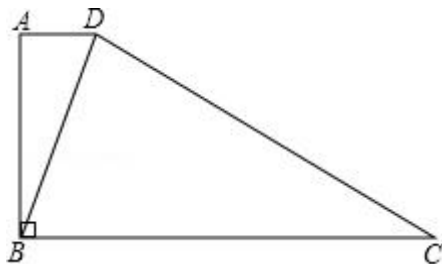
【解答】解：正八边形的中心角等于 $360^\circ \div 8 = 45^\circ$ ；

故答案为45.

【点评】本题考查了正多边形和圆的知识，解题的关键是牢记中心角的定义及求法.

15. (4分) 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB \perp BC$ ， $BD \perp DC$ ， $\tan \angle ABD = \frac{1}{2}$ ， $BC =$

5，那么 DC 的长等于 $2\sqrt{5}$.



【分析】根据垂直的定义得到 $\angle ABD = \angle C$ ，根据正切的定义得到 $BD = \frac{1}{2}CD$ ，根据勾股

定理计算即可．

【解答】解： $\because AB \perp BC$ ，

$$\therefore \angle ABD + \angle DBC = 90^\circ,$$

$$\because BD \perp DC,$$

$$\therefore \angle C + \angle DBC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle C,$$

$$\therefore \tan C = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2}CD,$$

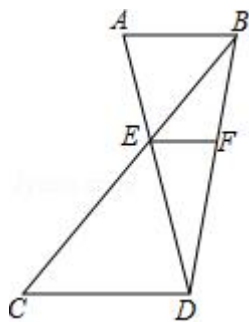
由勾股定理得， $BD^2 + CD^2 = BC^2$ ，即 $(\frac{1}{2}CD)^2 + CD^2 = 5^2$ ，

解得， $CD = 2\sqrt{5}$ ，

故答案为： $2\sqrt{5}$ ．

【点评】本题考查的是梯形的性质，正切的定义，勾股定理，掌握梯形的性质，正切的定义是解题的关键．

16. (4分) 如图， $AB \parallel CD$ ， AD 、 BC 相交于点 E ， 过 E 作 $EF \parallel CD$ 交 BD 于点 F ， 如果 $AB:CD = 2:3$ ， $EF = 6$ ， 那么 CD 的长等于 15．



【分析】由 $\triangle ABE \sim \triangle DCE$ ， 推出 $\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{CD} = \frac{2}{3}$ ， 可得 $\frac{BE}{BC} = \frac{2}{5}$ ， 再证明 $\triangle BEF \sim \triangle BCD$ ，

可得 $\frac{EF}{CD} = \frac{BE}{BC} = \frac{2}{5}$ ， 由此即可解决问题．

【解答】解： $\because AB \parallel CD$ ，

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DCE,$$

$$\therefore \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{CD} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{2}{5},$$

$$\because EF \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle BEF \sim \triangle BCD,$$

$$\therefore \frac{EF}{CD} = \frac{BE}{BC} = \frac{2}{5},$$

$$\because EF = 6,$$

$$\therefore CD = 15,$$

故答案为 15.

【点评】 本题考查平行线的性质，相似三角形的判定和性质等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

17. (4 分) 已知二次函数 $y = ax^2 + c$ ($a > 0$) 的图象上有纵坐标分别为 y_1 、 y_2 的两点 A 、 B ，如果点 A 、 B 到对称轴的距离分别等于 2、3，那么 y_1 < y_2 (填“<”、“=”或“>”)

【分析】 由于二次函数 $y = 2(x-1)^2 + k$ 的图象的开口向上，然后根据点 A 和点 B 离对称轴的远近可判断 y_1 与 y_2 的大小关系.

【解答】 解： $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + c$ ($a > 0$),

$\therefore$ 抛物线开口向上,

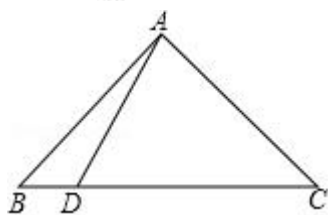
$\therefore$ 点 A 、 B 到对称轴的距离分别等于 2、3,

$$\therefore y_1 < y_2.$$

故答案为 <.

【点评】 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征：二次函数图象上点的坐标满足解析式 $y = ax^2 + bx + c$ (a 、 b 、 c 为常数， $a \neq 0$).

18. (4 分) 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 8$ ， $\cos B = \frac{3}{4}$ ，点 D 在边 BC 上，将 $\triangle ABD$ 沿直线 AD 翻折得到 $\triangle AED$ ，点 B 的对应点为点 E ， AE 与边 BC 相交于点 F ，如果 $BD = 2$ ，那么 $EF = \frac{32}{15}$.



【分析】 过 A 作 $AH \perp BC$ 于 H ，依据等腰三角形的性质即可得到 $BH = 6 = CH$ ，由折叠可

得, $BD = DE = 2$, $\angle E = \angle ABC = \angle C$, $AB = AE = 6$, 依据 $\triangle AFC \sim \triangle DFE$, 即可得到 $\frac{DF}{AF}$

$$= \frac{EF}{CF} = \frac{DE}{AC} = \frac{1}{4}, \text{ 设 } EF = x, \text{ 则 } CF = 4x, AF = 8 - x, DF = \frac{1}{4}AF = 2 - \frac{1}{4}x, \text{ 依据 } BD + DF + CF$$

$= BC$, 可得 x 的值, 进而得出 EF 的长.

【解答】 解: 如图所示, 过 A 作 $AH \perp BC$ 于 H ,

$$\because AB = AC = 8, \cos B = \frac{3}{4},$$

$$\therefore BH = 6 = CH, BC = 12,$$

由折叠可得, $BD = DE = 2$, $\angle E = \angle ABC = \angle C$, $AB = AE = 6$,

又 $\because \angle AFC = \angle DFE$,

$$\therefore \triangle AFC \sim \triangle DFE,$$

$$\therefore \frac{DF}{AF} = \frac{EF}{CF} = \frac{DE}{AC} = \frac{1}{4},$$

设 $EF = x$, 则 $CF = 4x$, $AF = 8 - x$,

$$\therefore DF = \frac{1}{4}AF = 2 - \frac{1}{4}x,$$

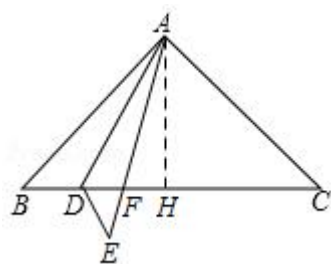
$$\because BD + DF + CF = BC,$$

$$\therefore 2 + 2 - \frac{1}{4}x + 4x = 12,$$

$$\text{解得 } x = \frac{32}{15},$$

$$\therefore EF = \frac{32}{15},$$

故答案为: $\frac{32}{15}$.



【点评】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质, 等腰三角形的性质的运用, 解决问题的关键是利用相似三角形的对应边成比例, 列方程求解.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $4\sin 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \frac{2\cot 45^\circ}{\tan 60^\circ - \sqrt{2}}.$

【分析】 直接利用特殊角的三角函数值分别代入求出答案.

【解答】解：原式 $= 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{2 \times 1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

$$= 2\sqrt{2} + \frac{3}{4} - 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

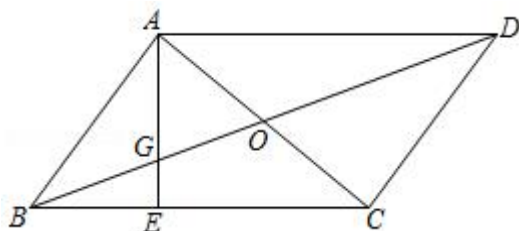
$$= \frac{3}{4} - 2\sqrt{3}.$$

【点评】此题主要考查了特殊角的三角函数值，正确记忆相关数据是解题关键.

20. (10分) 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，点 E 在边 BC 上， AE 与 BD 相交于点 G ， $AG:GE=3:1$.

(1) 求 $EC:BC$ 的值；

(2) 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AO} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{EC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$ ， $\overrightarrow{GB} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示)



【分析】(1) 根据平行四边形的性质，平行线分线段成比例定理即可解决问题；

(2) 利用三角形法则计算即可；

【解答】解：(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC, AD = BC,$$

$$\therefore \frac{AD}{BE} = \frac{AG}{GE} = 3,$$

$$\therefore \frac{BC}{BE} = 3,$$

$$\therefore EC:BC = 2:3.$$

$$(2) \because \overrightarrow{AO} = \vec{b}, AC = 2AO,$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = 2\vec{b},$$

$$\because \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + 2\vec{b}, EC = \frac{2}{3}BC,$$

$$\therefore \overrightarrow{EC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b},$$

$$\because AD \parallel BE,$$

$$\therefore \frac{BG}{GD} = \frac{EG}{AG} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore BG = \frac{1}{4}BD,$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{a} + 2\vec{b} = 2\vec{a} + 2\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BG} = \frac{1}{4}(2\vec{a} + 2\vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{GB} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

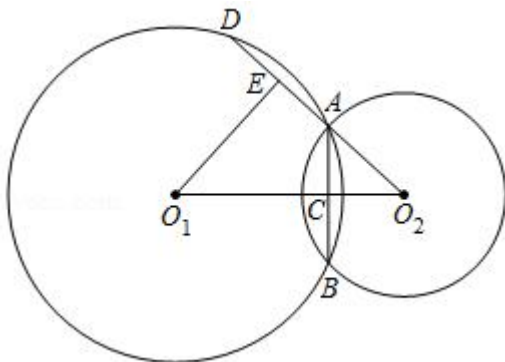
$$\text{故答案为 } \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}, -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$

【点评】 本题考查平行四边形的性质，平行线分线段成比例定理，平面向量等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

21. (10分) 如图， $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于 A 、 B 两点， O_1O_2 与 AB 交于点 C ， O_2A 的延长线交 $\odot O_1$ 于点 D ，点 E 为 AD 的中点， $AE = AC$ ，联结 OE .

(1) 求证： $O_1E = O_1C$;

(2) 如果 $O_1O_2 = 10$ ， $O_1E = 6$ ，求 $\odot O_2$ 的半径长.



【分析】 (1) 连接 O_1A ，根据垂径定理得到 $O_1E \perp AD$ ，根据相交两圆的性质得到 $O_1C \perp AB$ ，证明 $\text{Rt}\triangle O_1EA \cong \text{Rt}\triangle O_1CA$ ，根据全等三角形的性质证明结论；

(2) 设 $\odot O_2$ 的半径长为 r ，根据勾股定理列出方程，解方程得到答案.

【解答】 (1) 证明：连接 O_1A ，

$\because$ 点 E 为 AD 的中点，

$\therefore O_1E \perp AD$ ，

$\because \odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于 A 、 B 两点， O_1O_2 与 AB 交于点 C ，

$\therefore O_1C \perp AB$ ，

在 $\text{Rt}\triangle O_1EA$ 和 $\text{Rt}\triangle O_1CA$ 中，

$$\begin{cases} O_1A=O_1A \\ AE=AC \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle O_1EA \cong \text{Rt}\triangle O_1CA \quad (HL)$$

$$\therefore O_1E = O_1C;$$

(2) 解: 设 $\odot O_2$ 的半径长为 r ,

$$\therefore O_1E = O_1C = 6,$$

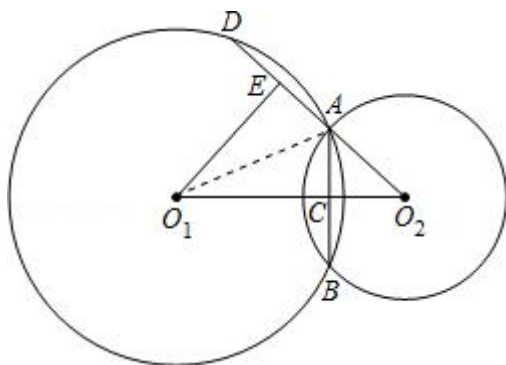
$$\therefore O_2C = 10 - 6 = 4,$$

$$\text{在 Rt}\triangle O_1EO_2 \text{ 中, } O_2E = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1E^2} = 8,$$

$$\text{则 } AC = AE = 8 - r,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACO_2 \text{ 中, } O_2A^2 = AC^2 + O_2C^2, \text{ 即 } r^2 = (8 - r)^2 + 4^2,$$

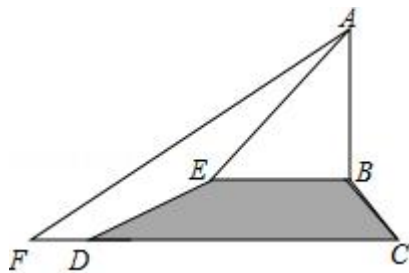
解得, $r = 5$, 即 $\odot O_2$ 的半径长为 5.



【点评】 本题考查的是相交两圆的性质, 全等三角形的判定和性质, 垂径定理, 勾股定理的应用, 掌握相交两圆的连心线, 垂直平分两圆的公共弦是解题的关键.

22. (10 分) 如图, 小山的一个横断面是梯形 $BCDE$, $EB \parallel DC$, 其中斜坡 DE 的坡长为 13 米, 坡度 $i = 1:2.4$, 小山上有一座铁塔 AB , 在山坡的坡顶 E 处测得铁塔顶端 A 的仰角为 45° , 在与山坡的坡底 D 相距 5 米的 F 处测得铁塔顶端 A 的仰角为 31° (点 F 、 D 、 C 在一直线上), 求铁塔 AB 的高度.

(参考数值: $\sin 31^\circ \approx 0.52$, $\cos 31^\circ \approx 0.86$, $\tan 31^\circ \approx 0.6$)



【分析】 延长 AB 交 DC 于 G , 过 E 作 $EH \perp CD$ 于 H , 则四边形 $EHGB$ 是矩形, 根据勾

股定理得到 $EH = 5$, $DH = 12$ 根据三角函数的定义列方程即可得到结论.

【解答】解：延长 AB 交 DC 于 G ，过 E 作 $EH \perp CD$ 于 H ，

则四边形 $EHGB$ 是矩形，

$\therefore$ 斜坡 DE 的坡长为 13 米，坡度 $i = 1:2.4$ ，

$\therefore$ 设 $EH = 5x$, $DH = 12x$ ，

$\therefore EH^2 + DH^2 = DE^2$ ，

$\therefore (5x)^2 + (12x)^2 = 13^2$ ，

$\therefore x = 1$ ，

$\therefore EH = 5$, $DH = 12$ ，

$\therefore EB \parallel DC$ ，

$\therefore \angle ABE = \angle AGH = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AEB = 45^\circ$ ，

$\therefore AB = BE$ ，

$\therefore HG = AB$ ，

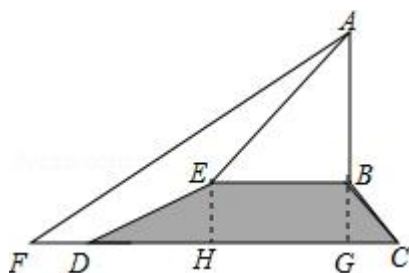
$\therefore FG = 5 + 12 + AB$, $AG = AB + 5$ ，

$\therefore \angle F = 31^\circ$ ，

$\therefore \tan F = \tan 31^\circ = \frac{AG}{FG} = \frac{AB+5}{17+AB} = 0.6$ ，

$\therefore AB = 13$ 米，

答：铁塔 AB 的高度是 13 米.



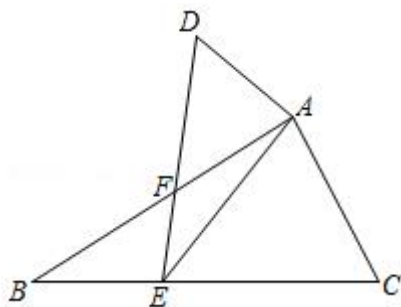
【点评】 本题考查了解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题，解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题，矩形的性质，掌握的作出辅助线是解题的关键.

23. (12 分) 已知：如图， $\triangle ADE$ 的顶点 E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上， DE 与 AB 相交于点 F ，

$$AE^2 = AF \cdot AB, \quad \angle DAF = \angle EAC.$$

(1) 求证： $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ ；

(2) 求证: $\frac{DF}{DE} = \frac{CE}{CB}$.



【分析】(1) 由 $AE^2 = AF \cdot AB$, 推出 $\triangle AEF \sim \triangle ABE$, 推出 $\angle AEF = \angle B$, 再证明 $\angle DAE = \angle BAC$, 即可解决问题;

(2) 由 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$, 推出 $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC}$, $\angle D = \angle C$, 再证明 $\triangle ADF \sim \triangle ACE$, 可得 $\frac{AD}{AC} = \frac{DF}{EC}$, 由此即可解决问题;

【解答】证明: (1) $\because AE^2 = AF \cdot AB$,

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AE}, \because \angle EAF = \angle BAE,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ABE,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle B,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle EAC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BAC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB.$$

$$(2) \because \triangle ADE \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC}, \angle D = \angle C,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle EAC,$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle ACE,$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{DF}{EC},$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{DF}{EC},$$

$$\therefore \frac{DF}{DE} = \frac{CE}{CB}.$$

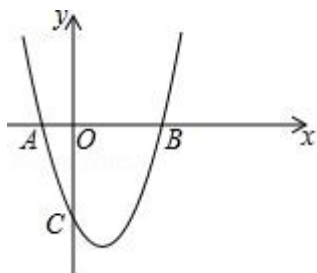
【点评】本题考查相似三角形的判定和性质, 解题的关键是正确寻找相似三角形解决问题, 属于中考常考题型.

24. (12分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 B , 且 $OB = 3OA$, 与 y 轴交于点 C , 此抛物线顶点为点 D .

(1) 求抛物线的表达式及点 D 的坐标;

(2) 如果点 E 是 y 轴上的一点 (点 E 与点 C 不重合), 当 $BE \perp DE$ 时, 求点 E 的坐标;

(3) 如果点 F 是抛物线上的一点, 且 $\angle FBD = 135^\circ$, 求点 F 的坐标.



【分析】 (1) 把点 A 、 B 的坐标代入二次函数表达式, 即可求解;

(2) 设: $OE = m$, 则 $EL = 4 - m$, $OB = 3$, $DL = 1$, 利用 $\angle LED = \angle OBE$, 即可求解;

(3) 延长 BD 交 y 轴于点 H , 将 $\triangle BCH$ 围绕点 B 顺时针旋转 135° 至 $\triangle BC'H'$ 的位置, 延长 BH' 交抛物线于点 F . 确定直线 BH' 的表达式, 即可求解.

【解答】 解: (1) $OB = 3OA = 3$, 则点 B 的坐标为 $(3, 0)$, 点 $A(-1, 0)$,

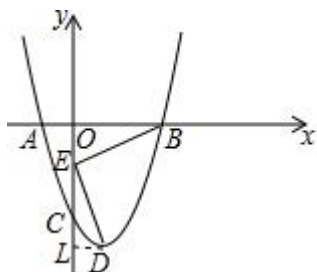
则函数的表达式为: $y = a(x+3)(x-1) = a(x^2 + 2x - 3)$,

则 $-3a = -3$, 解得: $a = 1$,

则抛物线的表达式为: $y = x^2 - 2x - 3 \cdots \textcircled{1}$

函数对称轴为 $x = -\frac{b}{2a} = 1$, 则点 D 的坐标为 $(1, -4)$;

(2) 如图, 过点 D 作 $DL \perp y$ 轴, 交于点 L ,



设: $OE = m$, 则 $EL = 4 - m$, $OB = 3$, $DL = 1$,

$\because \angle LED + \angle OEB = 90^\circ$, $\angle OEB + \angle OBE = 90^\circ$,

$\therefore \angle LED = \angle OBE$,

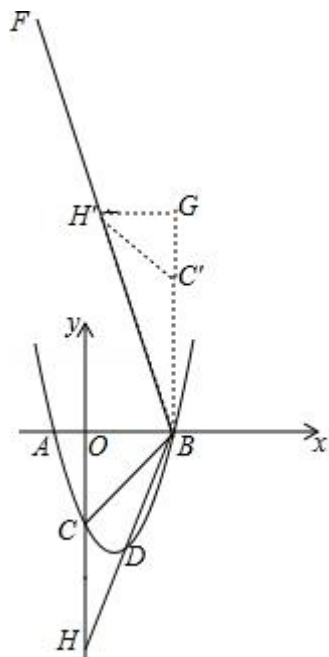
$\therefore \tan \angle LED = \tan \angle OBE$,

$$\text{即: } \frac{OE}{OB} = \frac{LD}{EL}, \quad \frac{m}{3} = \frac{1}{4-m},$$

解得: $m = 1$ 或 3 (舍去 $x = 3$),

则点 E 的坐标为 $(0, -1)$;

(3) 延长 BD 交 y 轴于点 H , 将 $\triangle BCH$ 围绕点 B , 顺时针旋转 135° 至 $\triangle BC'H'$ 的位置, 延长 BH' 交抛物线于点 F ,



$$\because OB = OC = 3,$$

$$\therefore \angle OCB = \angle OBC = 45^\circ,$$

则 $\angle FBD = 135^\circ$, $BC' \perp x$ 轴, 则点 $C' (3, 3\sqrt{2})$,

$$\angle H' C' B = \angle HCB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ,$$

$$\tan \angle ABD = \frac{-y_D}{OB - x_D} = \frac{4}{2} = 2,$$

$$OH = OB \cdot \tan \angle ABD = 2 \times 3 = 6,$$

$$\text{则: } HC = 6 - 3 = 3 = H' C',$$

过点 C' 作 $C'G \perp GH'$ 交于点 G ,

$$\text{在 } \triangle BGH' \text{ 中, } GC' = H' C' \cos 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{2} = GH',$$

$$\text{则点 } H' \text{ 的坐标为 } \left(3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{9\sqrt{2}}{2} \right),$$

将点 H' 、 B 的坐标代入一次函数表达式 $y = kx + b$ 得:

$$\begin{cases} 0=3k+b \\ \frac{9\sqrt{2}}{2}=(3-\frac{3\sqrt{2}}{2})k+b \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k=-3 \\ b=9 \end{cases},$$

则直线 BH' 的表达式为: $y = -3x+9 \cdots \textcircled{2}$,

联立①②并解得: $x = 3$ 或 -4 ($x = 3$ 舍去),

故点 F 的坐标为 $(-4, 21)$.

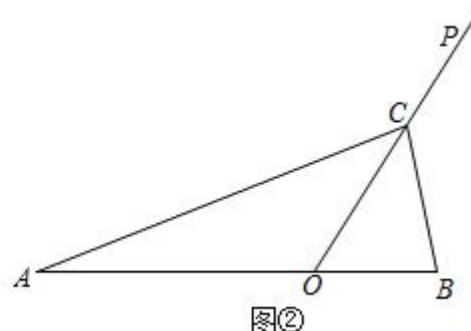
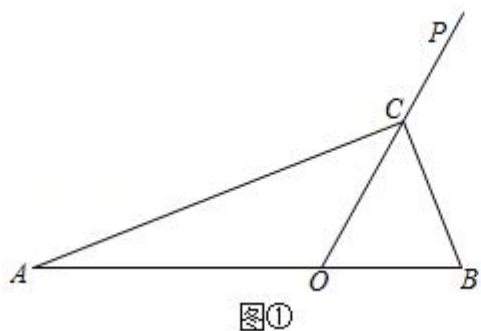
【点评】 本题考查的是二次函数综合运用, 涉及到解直角三角形、图形旋转等知识, 其中 (3) 用图形旋转的方法, 确定旋转后图形的位置时本题的难点.

25. (14 分) 如图, 点 O 在线段 AB 上, $AO = 2OB = 2a$, $\angle BOP = 60^\circ$, 点 C 是射线 OP 上的一个动点.

(1) 如图①, 当 $\angle ACB = 90^\circ$, $OC = 2$, 求 a 的值;

(2) 如图②, 当 $AC = AB$ 时, 求 OC 的长 (用含 a 的代数式表示);

(3) 在第 (2) 题的条件下, 过点 A 作 $AQ \parallel BC$, 并使 $\angle QOC = \angle B$, 求 $AQ : OQ$ 的值.

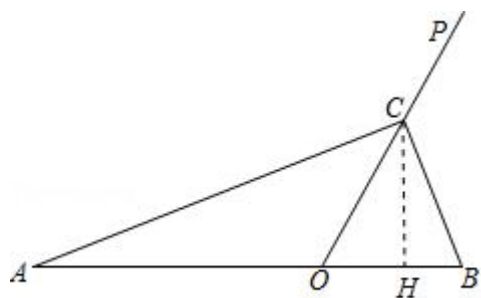


【分析】 (1) 如图①中, 作 $CH \perp AB$ 于 H . 证明 $\triangle ACH \sim \triangle CBH$, 可得 $\frac{CH}{BH} = \frac{AH}{CH}$, 由此构建方程即可解决问题.

(2) 如图②中, 设 $OC = x$. 作 $CH \perp AB$ 于 H , 则 $OH = \frac{x}{2}$, $CH = \frac{\sqrt{3}}{2}x$. 在 $\text{Rt}\triangle ACH$ 中, 根据 $AC^2 = AH^2 + CH^2$, 构建方程即可解决问题.

(3) 如图②-1 中, 延长 QC 交 CB 的延长线于 K . 利用相似三角形的性质证明 $\frac{AQ}{OQ} = \frac{OB}{OC}$, 即可解决问题.

【解答】 解: (1) 如图①中, 作 $CH \perp AB$ 于 H .



图①

$$\because CH \perp AB,$$

$$\therefore \angle AHC = \angle BHC = 90^\circ,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACH + \angle BCH = 90^\circ, \because \angle ACH + \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCH = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ACH \sim \triangle CBH,$$

$$\therefore \frac{CH}{BH} = \frac{AH}{CH},$$

$$\because OC = 2, \angle COH = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle OCH = 30^\circ,$$

$$\therefore OH = \frac{1}{2}OC = 1, CH = \sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{a-1} = \frac{2a+1}{\sqrt{3}},$$

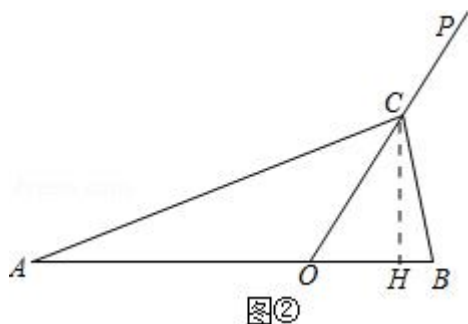
$$\text{整理得: } 2a^2 - a - 4 = 0,$$

$$\text{解得 } a = \frac{1+\sqrt{33}}{4} \text{ 或 } \frac{1-\sqrt{33}}{4} \text{ (舍去)}.$$

$$\text{经检验 } a = \frac{1+\sqrt{33}}{4} \text{ 是分式方程的解.}$$

$$\therefore a = \frac{1+\sqrt{33}}{4}.$$

$$(2) \text{ 如图②中, 设 } OC = x. \text{ 作 } CH \perp AB \text{ 于 } H, \text{ 则 } OH = \frac{x}{2}, CH = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$



在 $\text{Rt}\triangle ACH$ 中, $\because AC^2 = AH^2 + CH^2$,

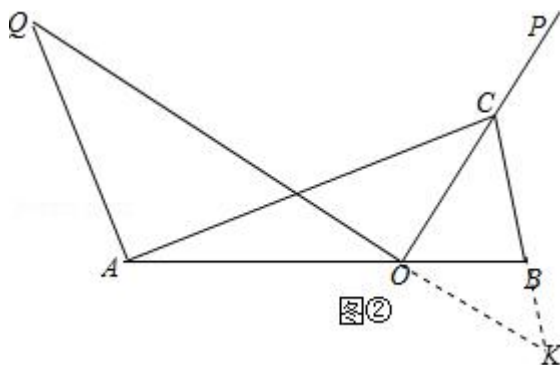
$$\therefore (3a)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(2a + \frac{1}{2}x\right)^2,$$

整理得: $x^2 + ax - 5a^2 = 0$,

解得 $x = (\sqrt{6} - 1)a$ 或 $(-\sqrt{6} - 1)a$ (舍弃),

$$\therefore OC = (\sqrt{6} - 1)a,$$

(3) 如图② - 1 中, 延长 QC 交 CB 的延长线于 K .



$$\because \angle AOC = \angle AOQ + \angle QOC = \angle ABC + \angle OCB, \quad \angle QOC = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle AOQ = \angle KCO,$$

$$\because AQ \parallel BK,$$

$$\therefore \angle Q = \angle K,$$

$$\therefore \triangle QOA \sim \triangle KCO,$$

$$\therefore \frac{AQ}{OK} = \frac{OQ}{KC},$$

$$\therefore \frac{AQ}{OQ} = \frac{OK}{KC},$$

$$\because \angle K = \angle K, \quad \angle KOB = \angle AOQ = \angle KCO,$$

$$\therefore \triangle KOB \sim \triangle KCO,$$

$$\therefore \frac{OK}{KC} = \frac{OB}{OC},$$

$$\therefore \frac{AQ}{OQ} = \frac{OB}{OC} = \frac{a}{(\sqrt{6}-1)a} = \frac{\sqrt{6}+1}{5}$$

【点评】本题属于相似形综合题，考查了相似三角形的判定和性质，勾股定理等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造相似三角形解决问题，学会利用参数构建方程解决问题，属于中考压轴题．