

2026 年上海市青浦区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 6 小题）

题号	1	2	3	4	5	6
答案	C	B	A	D	B	D

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【每小题只有一个正确选项，在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂】

1.（4 分）下列实数中，无理数是（ ）

- A. 0 B. $\sqrt{4}$ C. π D. $\frac{22}{7}$

【答案】C

【分析】先化简，再根据有理数、无理数的定义判断即可．

【解答】解：A、0 是有理数，故此选项不符合题意；

B、 $\sqrt{4}=2$ 是有理数，故此选项不符合题意；

C、 π 是无理数，故此选项符合题意；

D、 $\frac{22}{7}$ 是有理数，故此选项不符合题意；

故选：C．

【点评】此题主要考查了无理数的定义，注意带根号的要开不尽方才是无理数，无限不循环小数为无理数，如 π ， $\sqrt{6}$ ，0.8080080008…（每两个 8 之间依次多 1 个 0）等形式．

2.（4 分）计算 $8^{\frac{1}{2}}$ ，下列结果中正确的是（ ）

- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $4\sqrt{2}$

【答案】B

【分析】根据分数指数幂的计算法则计算即可求解．

【解答】解： $8^{\frac{1}{2}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ．

故选：B．

【点评】本题考查了分数指数幂，关键是熟练掌握计算法则正确进行计算．

3.（4 分）将分式方程 $\frac{1}{x}=\frac{2x}{x+1}$ 化为整式方程，下列答案正确的是（ ）

- A. $2x^2-x-1=0$ B. $2x^2-x+1=0$ C. $x^2-2x+1=0$ D. $x^2-2x-1=0$

【答案】A

【分析】先去分母，然后把方程化为一般式即可．

【解答】解：把方程两边乘以 $x(x+1)$ 得 $x+1=2x^2$ ，

方程化为一般式为 $2x^2 - x - 1 = 0$ ．

故选：A．

【点评】本题考查了解一元二次方程 - 因式分解法：因式分解法就是利用因式分解求出方程的解的方法，这种方法简便易用，是解一元二次方程最常用的方法．也考查了解分式方程．

4. (4分) 直角坐标平面内，已知函数 $y = -\frac{3}{x}$ 的图象经过点 $P(a, b)$ ，如果 $b < 0$ ，那么点 P 在 ()

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】D

【分析】根据 $k = -3 < 0$ ，从而可得反比例函数的图象在第二、四象限，再根据果 $b < 0$ 即可得出答案．

【解答】解： $\because k = -3 < 0$ ，

$\therefore$ 这个反比例函数的图象在第二、四象限，

又 $\because$ 函数 $y = -\frac{3}{x}$ 的图象经过点 $P(a, b)$ ，且 $b < 0$ ，

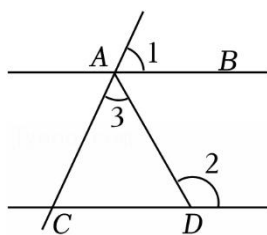
$\therefore a > 0$ ，

$\therefore$ 点 P 在第四象限，

故选：D．

【点评】本题考查了反比例函数的图象上点的坐标特点，熟练掌握反比例函数的图象与性质是解题关键．

5. (4分) 如图， $AB \parallel CD$ ，如果 $\angle 1 = 63^\circ$ ， $\angle 2 = 120^\circ$ ，那么 $\angle 3$ 的度数为 ()



A. 47° B. 57° C. 60° D. 63°

【答案】B

【分析】根据平行线的性质进行计算即可．

【解答】解： $\because AB \parallel CD$ ， $\angle 1 = 63^\circ$ ，

$\therefore \angle ACD = \angle 1 = 63^\circ$ ．

又 $\because \angle 2 = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle 3 = \angle 2 - \angle 1 = 120^\circ - 63^\circ = 57^\circ$ ．

故选：B.

【点评】 本题主要考查了平行线的性质，熟知平行线的性质是解题的关键.

6. (4分) 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=3$, $BC=4$, 动点 O 在对角线 AC 上. 如果以点 O 为圆心, 以 1 为半径长的 $\odot O$ 与边 AB 有两个公共点, 那么线段 OA 的取值范围是 ()

- A. $1 \leq OA \leq \frac{5}{4}$ B. $1 < OA < \frac{5}{4}$ C. $1 < OA \leq \frac{5}{4}$ D. $1 \leq OA < \frac{5}{4}$

【答案】 D

【分析】 过 O 点作 $OE \perp AB$ 于 E 点, 如图, 先利用勾股定理计算出 $AC=5$, 利用直线与圆的位置关系, 当 $OE=1$ 时, $\odot O$ 与边 AB 相切, 证明 $\triangle AOE \sim \triangle ACB$, 利用相似比可求出此时 $OA = \frac{5}{4}$, 所以当 $\odot O$ 与边 AB 有两个公共点时 $OA < \frac{5}{4}$, 同时当点 A 在 $\odot O$ 上时, $\odot O$ 与边 AB 有两个公共点, 所以 $OA \geq 1$, 然后综合两种情况可得线段 OA 的取值范围.

【解答】 解: 过 O 点作 $OE \perp AB$ 于 E 点, 如图,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$$\therefore \angle B = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\because AB=3$, $BC=4$,

$$\therefore AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

当 $OE=1$ 时, $\odot O$ 与边 AB 相切,

$$\because OE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle AOE \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{OA}{AC} = \frac{OE}{BC},$$

$$\text{即 } \frac{OA}{5} = \frac{1}{4},$$

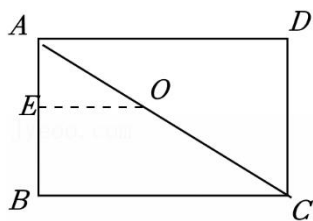
$$\text{解得 } OA = \frac{5}{4},$$

$$\therefore \text{当 } \odot O \text{ 与边 } AB \text{ 有两个公共点时 } OA < \frac{5}{4},$$

当点 A 在 $\odot O$ 上时, $\odot O$ 与边 AB 有两个公共点, 则 $OA \geq 1$,

$$\therefore \text{线段 } OA \text{ 的取值范围为 } 1 \leq OA < \frac{5}{4}.$$

故选：D.



【点评】 本题考查了直线和圆的位置关系：设 $\odot O$ 的半径为 r ，圆心 O 到直线 l 的距离为 d ，直线 l 和 $\odot O$ 相交 $\Leftrightarrow d < r$ ；直线 l 和 $\odot O$ 相切 $\Leftrightarrow d = r$ ；直线 l 和 $\odot O$ 相离 $\Leftrightarrow d > r$ ．也考查了矩形的性质．

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【在答题纸相应题号的空格内直接填写答案】

7. (4 分) $|2 - \sqrt{3}| = \underline{2 - \sqrt{3}}$.

【答案】 $2 - \sqrt{3}$

【分析】 判断 2 和 $\sqrt{3}$ 的大小，再去绝对值符号即可．

【解答】 解： $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$.

故答案为： $2 - \sqrt{3}$.

【点评】 本题考查了实数的性质，绝对值的应用，再判断 $2 - \sqrt{3}$ 的正负是解此题的关键．

8. (4 分) 分解因式： $ab - a = \underline{a(b - 1)}$.

【答案】 $a(b - 1)$

【分析】 直接提取公因式 a ，进而分解因式得出答案．

【解答】 解： $ab - a = a(b - 1)$.

故答案为： $a(b - 1)$.

【点评】 此题主要考查了提取公因式法分解因式，正确找出公因式是解题关键．

9. (4 分) 单项式 $-x^2y$ 的次数是 3 .

【答案】 3

【分析】 根据单项式次数的定义进行解答即可．

【解答】 解： $\because$ 单项式 $-x^2y$ 中字母的指数和 $= 2 + 1 = 3$ ，

$\therefore$ 此单项式的次数为 3．

故答案为： 3．

【点评】 本题考查的是单项式次数的定义，即单项式中所有字母指数的和叫单项式的次数．

10. (4 分) 方程 $\sqrt{x-6} = 2$ 的解为 $x = 10$.

【答案】 $x = 10$.

【分析】 将原方程两边同时平方得 $x - 6 = 4$ ，解得 x 的值后并检验即可．

【解答】 解： 已知方程 $\sqrt{x-6} = 2$ ，

则 $x - 6 = 4$,

解得: $x = 10$,

经检验, $x = 10$ 是原方程的解,

故答案为: $x = 10$.

【点评】 本题考查无理方程, 熟练掌握解方程的方法是解题的关键.

11. (4分) 上海青浦百联奥特莱斯是 2025 年国内首家且唯一一家年销售额突破 60 亿元大关的奥特莱斯, 其销售额高达 63 亿元. 其中 63 亿元用科学记数法表示为 6.3×10^9 元.

【答案】 6.3×10^9 .

【分析】 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时, n 是正整数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负整数.

【解答】 解: 63 亿元 = 6300000000 元 = 6.3×10^9 元. 故答案为: 6.3×10^9 .

【点评】 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

12. (4分) 若一组数据中有 a 个 x_1 , b 个 x_2 , c 个 x_3 , 则这组数据的平均数为 $\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}$.

【答案】 $\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}$.

【分析】 根据平均数的定义求解, 即用 $(a+b+c)$ 个数的和除以 $(a+b+c)$.

【解答】 解: 由题意, $\because$ 数据中有 a 个 x_1 , b 个 x_2 , c 个 x_3 ,

$\therefore$ 这组数据有 $(a+b+c)$ 个, 则总和为 $(ax_1 + bx_2 + cx_3)$.

$\therefore$ 平均数为 $\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}$.

故答案为: $\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}$.

【点评】 本题考查的是平均数的求法, 掌握平均数等于所有数据的和除以数据的个数是关键.

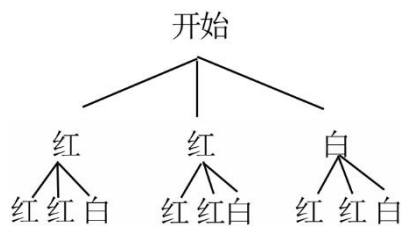
13. (4分) 在不透明的布袋里有 2 个红球和 1 个白球, 它们除颜色外其他都相同. 从布袋里摸出一个球再放回袋中, 摇匀后再摸出一个球, 摸到一红一白两球的概率为 $\frac{4}{9}$.

【答案】 $\frac{4}{9}$.

【分析】 画树状图, 共有 9 种等可能的结果, 其中摸到的球是一红一白两球的结果有 4 种, 再由概率公

式求解即可.

【解答】解：画树状图如下：



共有 9 种等可能的结果，其中摸到的球是一红一白两球的结果有 4 种，

$\therefore$ 摸到一红一白两球的概率为 $\frac{4}{9}$ ，

故答案为： $\frac{4}{9}$ 。

【点评】本题考查的是用列表法或树状图法求概率．列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件；解题时要注意此题是放回试验还是不放回试验．用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比．

14. (4 分) 将直线 $y = kx + b$ 沿 y 轴向下平移 2 个单位后得到的直线是 $y = kx - 3$ ，则 $b = \underline{-1}$ ．

【答案】 - 1 .

【分析】根据“上加下减”的平移法则，表示出平移后的直线解析式，据此可解决问题．

【解答】解：由题知，

将直线 $y = kx + b$ 沿 y 轴向下平移 2 个单位长度后，所得直线的解析式为 $y = kx + b - 2$ ．

因为直线 $y = kx + b$ 沿 y 轴向下平移 2 个单位后得到的直线是 $y = kx - 3$ ，

所以 $b - 2 = -3$ ，

解得 $b = -1$ ．

故答案为： - 1 .

【点评】本题主要考查了一次函数图象与几何变换，熟知“上加下减”的平移法则是解题的关键．

15. (4 分) 如果过 n 边形的一个顶点可作 5 条对角线，那么这个 n 边形的内角和是 $\underline{1080^\circ}$ ．

【答案】 1080° ．

【分析】根据题意，过 n 边形的一个顶点可作 5 条对角线，可得 $n - 3 = 5$ ，解得： $n = 8$ ，然后再根据多边形的内角和公式可得： $(8 - 2) \times 180^\circ$ ，即可得出答案．

【解答】解： $\because$ 过 n 边形的一个顶点可作 5 条对角线，

$\therefore n - 3 = 5$ ，

$\therefore n = 8$ ，

$\therefore$ 这个 n 边形的内角和是： $(8 - 2) \times 180^\circ = 6 \times 180^\circ = 1080^\circ$ ．

故答案为：1080° ．

【点评】 本题考查了多边形内角与外角，多边形的对角线，掌握多边形的内角和公式，多边形的对角线公式是解题的关键．

16. (4分) 某区“书香校园”项目组为了解初三学生每天的课外阅读情况，对全区初三学生进行了一次随机抽样调查，将学生按照每天课外阅读时长分为 A (约 1 小时)，B (约 30 分钟)，C (约 10 分钟)，D (几乎没有) 四个等级，并绘制成如图 1、图 2 所示的两幅不完整的统计图．如果该区共有 5300 名初三学生，根据抽样调查结果，估计该区几乎没有课外阅读的学生人数大约为 530 人．

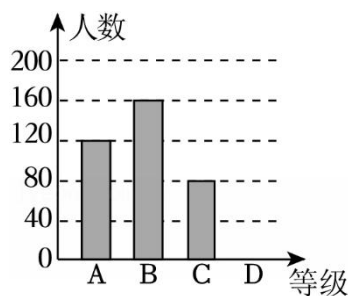


图1

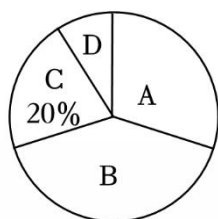


图2

【答案】 530.

【分析】 根据 C 等级的人数和占比求出抽样调查的总人数，然后得出 D 等级所占的比，乘以全部初三学生的人数即可解答．

【解答】 解：根据条形统计图可知 C 等级的人数为 80 人，占比为 20%，

$$\therefore \text{此次抽样的总人数为 } \frac{80}{20\%} = 400,$$

$$\therefore D \text{ 等级的人数为 } 400 - 120 - 160 - 80 = 40,$$

该区共有 5300 名初三学生，根据抽样调查结果，估计该区几乎没有课外阅读的学生人数大约为

$$\frac{40}{400} \times 5300 = 530 \text{ 人},$$

故答案为：530.

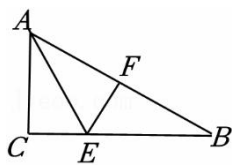
【点评】 本题考查用样本估算总体，解题的关键是正确识图获取信息．

17. (4分) 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ．将 $\triangle ABC$ 沿过点 A 的直线翻折，使点 C 落在斜边 AB 上，折痕与边 BC 的交点记为 E．如果 $\triangle CAE \sim \triangle CBA$ ，那么折痕 AE 的长为 $2\sqrt{3}$ ．

【答案】 $2\sqrt{3}$.

【分析】 利用折叠的性质，直角三角中 30° 角的性质进行求解．

【解答】 解：如图，点 C 与点 F 重合，



$$\because \triangle CAE \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle CBA,$$

$$\because \angle CAE = \angle BAE,$$

$$\because \angle CAE + \angle BAE + \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle CAE = 30^\circ,$$

$$\because \angle C = 90^\circ, AB = 6,$$

$$\therefore AC = 3,$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AC}{AE},$$

$$\therefore AE = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3},$$

故答案为: $2\sqrt{3}$.

【点评】 本题考查了折叠变换, 利用折叠的性质, 直角三角形的性质, 三角函数是解题的关键.

18. (4分) 定义: 如果一个圆的圆心与一个正多边形的中心重合, 那么称该正多边形为这个圆的同心正多边形. 已知一个圆的半径为 1, 该圆的同心正六边形的边长为 $\sqrt{3}$. 设点 P 在圆上, 点 Q 在正六边形的边上, 那么 P 、 Q 两点之间的最小距离为 $\frac{1}{2}$.

【答案】 $\frac{1}{2}$.

【分析】 根据正六边形的性质以及直角三角形的边角关系求出正六边形的边心距 OQ 的值即可.

【解答】 解: 如图, 连接 OA , OB , 过点 O 作 $OQ \perp AB$, 垂足为 Q , OQ 交 $\odot O$ 于点 P , 此时 PQ 最小,

$\because$ 点 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心,

$$\therefore \angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ,$$

又 $\because OA = OB$,

$\therefore \triangle AOB$ 是正三角形,

$$\therefore AB = OA = OB = \sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle AOQ$ 中, $\angle AOQ = \frac{1}{2}\angle AOB = 30^\circ$, $OA = \sqrt{3}$,

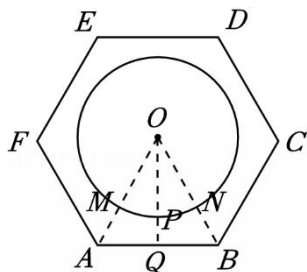
$$\therefore OQ = \frac{\sqrt{3}}{2}OA = \frac{3}{2},$$

又 $\because OM = OP = ON = 1$,

$$\therefore PQ = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2},$$

即 PQ 的最小值为 $\frac{1}{2}$,

故答案为: $\frac{1}{2}$.



【点评】本题考查正多边形和圆，掌握正六边形的性质，直角三角形的边角关系是正确解答的关键.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分) 【将下列各题的解答过程, 做在答题纸的相应位置上】

19. (10 分) 先化简, 再求值: $\frac{a^2-2a+1}{a^2+3a} \div (1-\frac{4}{a+3})$, 其中 $a=\sqrt{2}$.

【答案】 $\frac{a-1}{a}$, $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

【分析】先根据分式混合运算的法则把原式进行化简, 再把 a 的值代入进行计算即可.

【解答】解: $\frac{a^2-2a+1}{a^2+3a} \div (1-\frac{4}{a+3})$

$$= \frac{(a-1)^2}{a(a+3)} \div \frac{a+3-4}{a+3}$$

$$= \frac{(a-1)^2}{a(a+3)} \cdot \frac{a+3}{a-1}$$

$$= \frac{a-1}{a},$$

$$\text{当 } a=\sqrt{2} \text{ 时, 原式} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

【点评】本题考查的是分式的化简求值, 熟知分式混合运算的法则是解题的关键.

20. (10 分) 解不等式组 $\begin{cases} 2(x-4) \geq 6 & \text{①} \\ 8+x > 5x-24 & \text{②} \end{cases}$.

【答案】 $7 \leq x < 8$.

【分析】分别解出两个一元一次不等式, 再取它们的公共部分, 即为不等式组的解集.

【解答】解: $\begin{cases} 2(x-4) \geq 6 & \text{①} \\ 8+x > 5x-24 & \text{②} \end{cases}$,

解不等式①得, $x \geq 7$,

解不等式②得, $x < 8$,

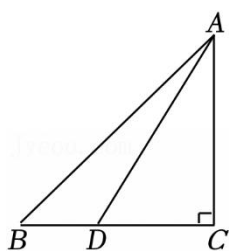
$\therefore$ 不等式组的解为: $7 \leq x < 8$.

【点评】 本题考查一元一次不等式组的解法, 熟练掌握单个不等式的求解及取公共解集的方法是解题的关键.

21. (10 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, 点 D 在 BC 边上, $\angle CAD = 30^\circ$, 且 $AC = \sqrt{3}$.

(1) 求线段 BD 的长;

(2) 求 $\sin \angle BAD$ 的值.



【答案】 (1) $\sqrt{3} - 1$;

(2) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

【分析】 (1) 利用直角三角形的三角函数性质, 分别求出 BC 和 CD 的长度, 再作差得到 BD 的长度. 第一步: 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, 已知 $\angle CAD = 30^\circ$, 直角边 $AC = \sqrt{3}$, 利用正切函数的定义求出 CD ; 第二步: 结合 $\angle B = 45^\circ$, 可得 $\text{Rt}\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 因此 $BC = AC = \sqrt{3}$; 第三步: 根据线段和差关系 $BD = BC - CD$, 代入计算得到最终结果;

(2) 通过作辅助线构造包含 $\angle BAD$ 的直角三角形, 结合正弦函数的定义计算结果. 第一步: 先在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, 利用三角函数求出斜边 AD 的长度; 第二步: 过 D 作 AB 的垂线 DE , 在等腰直角 $\triangle BDE$ 中, 利用 BD 的长度求出高 DE ; 第三步: 在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, 根据正弦定义: 正弦值等于对边比斜边, 代入 DE 和 AD 的长度计算得到结果; 本题也可利用角度差得到 $\angle BAD = 15^\circ$, 用两角差的正弦公式计算得到相同结果.

【解答】 解: (1) 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\angle C = 90^\circ$,

$$\tan \angle CAD = \frac{CD}{AC},$$

$$CD = AC \cdot \tan 30^\circ = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 45^\circ$,

可得 $BC = AC = \sqrt{3}$,

$$BD = BC - CD = \sqrt{3} - 1.$$

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中,

$$AD = \frac{AC}{\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2,$$

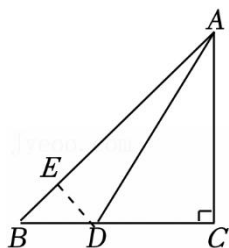
过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ,

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中, $\angle B = 45^\circ$,

$$DE = BD \cdot \sin 45^\circ = (\sqrt{3} - 1) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中,

$$\sin \angle BAD = \frac{DE}{AD} = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$



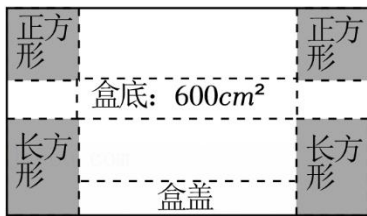
【点评】 题目考查了解直角三角形、勾股定理、等腰直角三角形, 解题的关键在于相关知识的灵活运用.

22. (10 分) 被誉为“金果子”的草莓, 是青浦区乡村振兴的一个亮点. 某草莓采摘园计划通过互联网销售草莓, 需设计一款底面积为 600cm^2 的有盖子的长方体快递包装盒, 所用的材料为长 100cm , 宽 60cm 的长方形硬纸板. 制作方法如下: 在每一张纸板的四个角上分别剪去两个相同的正方形和两个相同的长方形 (如方案 1 图所示). 然后折叠成一个有盖纸盒 (盒盖与盒底大小形状相同)
- 为了优化设计, 草莓采摘园的老板借助 AI 提出了一种改进方案 (称为方案 2), 方案 2 也需要在四个角上分别剪去两个相同的正方形和两个相同的长方形. AI 对方案 2 的优点给出了如下评价:

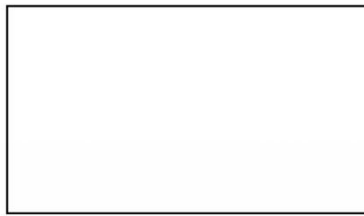
1. 节省材料, 成本更低: 两种方案体积相同, 底面积相同, 但方案 2 表面积更小, 用料更省, 长期生产可降低包装成本.
2. 结构更稳固: 方案 2 底面更接近正方形, 重心更稳, 抗压性更好, 运输时不易变形、挤压, 能更好保护物品.

接下来请你帮助老板解决以下问题:

- (1) 设方案 1 中剪去的正方形的边长为 $x\text{cm}$, 求包装盒的表面积;
- (2) 尝试在备用图中画出方案 2, 并通过计算说明 AI 对方案 2 “表面积最小” 的评价是否准确?



方案1



备用图: 方案2

【答案】(1) $-2x^2 - 60x + 6000$ (cm^2);

(2) $\because DH = CF = (100 - 2x) cm$, 底面积等于 $600cm^2$,

$\therefore (100 - 2x)(30 - x) = 600$,

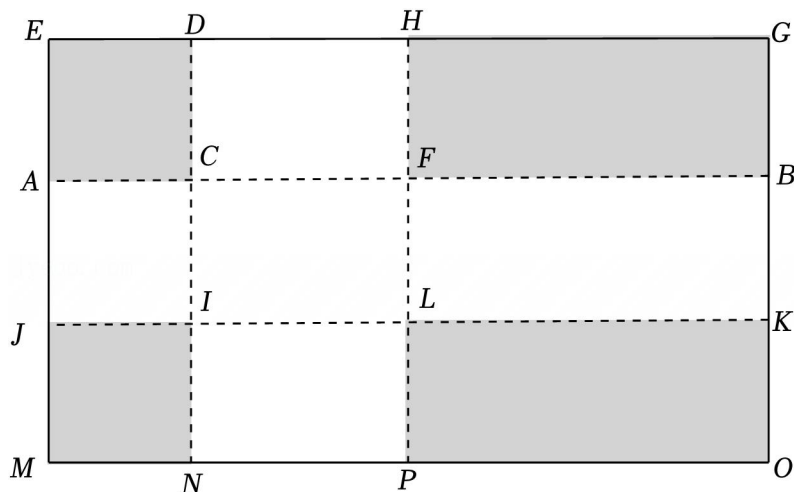
解得: $x = 20$ 或 $x = 60$ (舍去),

当 $x = 20$ 时, 方案 1 包装盒的表面积为: $-2 \times 20^2 - 60 \times 20 + 6000 = 4000cm^2$,

$\because$ 两种方案体积相同, 底面积相同, 底面更接近正方形,

$\therefore$ 得图,

当 $FL = 20cm$, $CF = 30cm$ 时, 满足条件,



$\therefore AC = 20cm$, $FB = 50cm$,

则包装盒的表面积 = 长方形硬纸板的面积 - 正方形面积 - 长方形面积 = $100 \times 60 - 2 \times 20^2 - 2 \times 20 \times 50 = 3200cm^2$,

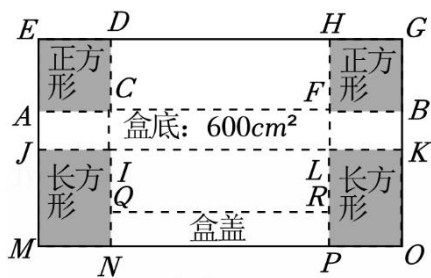
方案 2 包装盒的表面积为: $3200cm^2 < 4000cm^2$,

则 AI 对方案 2 “表面积最小”的评价准确.

【分析】(1) 根据图形可知剪去的长方形的长为 $LP = 30$, 则包装盒的表面积 = 长方形硬纸板的面积 - 正方形面积 - 长方形面积;

(2) 根据底面积相同, 可解方程得底边长宽分别为 $30cm$, $20cm$, 则包装盒的表面积 = 长方形硬纸板的面积 - 正方形面积 - 长方形面积, 即可验证方案.

【解答】解: (1) 由题意可得,



方案1

$$DE = HG = x, EG = 100, EM = 60,$$

$$\therefore FL = \frac{60-2x}{2} = 30-x,$$

则剪去的长方形的长为: $LP = 30 - x + x = 30$,

则包装盒的表面积 = 长方形硬纸板的面积 - 正方形面积 - 长方形面积 = $100 \times 60 - 2x^2 - 2 \times x \times 30 = -2x^2 - 60x + 6000$ (cm^2);

(2) $\because DH = CF = (100 - 2x) cm$, 底面积等于 $600cm^2$,

$$\therefore (100 - 2x)(30 - x) = 600,$$

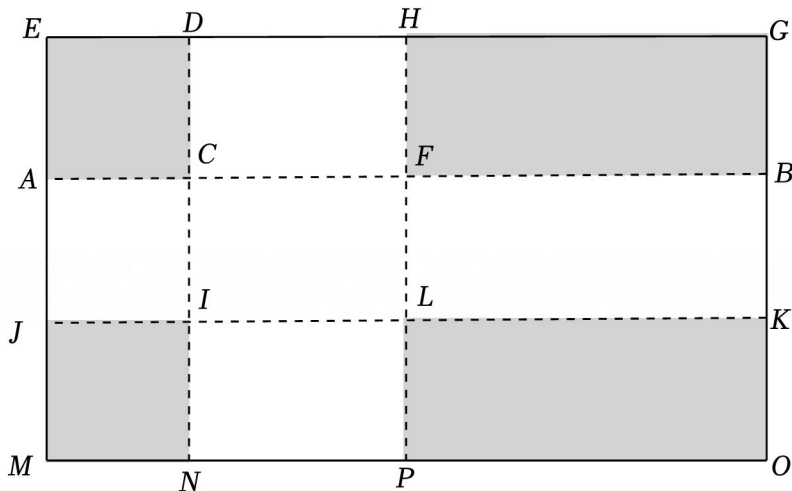
解得: $x = 20$ 或 $x = 60$ (舍去),

当 $x = 20$ 时, 方案 1 包装盒的表面积为: $-2 \times 20^2 - 60 \times 20 + 6000 = 4000cm^2$,

$\therefore$ 两种方案体积相同, 底面积相同, 底面更接近正方形,

$\therefore$ 得图,

当 $FL = 20cm$, $CF = 30cm$ 时, 满足条件,



$$\therefore AC = 20cm, FB = 50cm,$$

则包装盒的表面积 = 长方形硬纸板的面积 - 正方形面积 - 长方形面积 = $100 \times 60 - 2 \times 20^2 - 2 \times 20 \times 50 = 3200cm^2$,

方案 2 包装盒的表面积为: $3200cm^2 < 4000cm^2$,

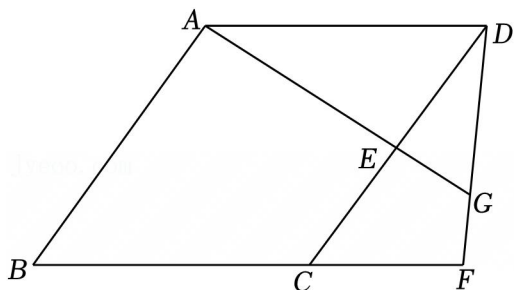
则 AI 对方案 2 “表面积最小”的评价准确.

【点评】 本题考查了图形的展开与折叠，掌握表面积是解题的关键．

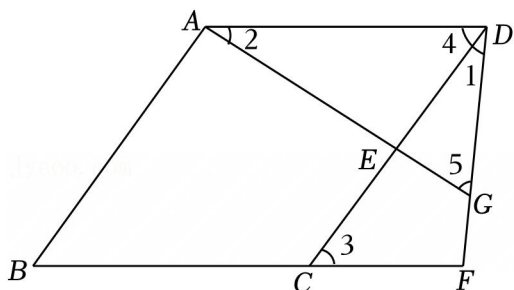
23. (12分) 已知：如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，点 E 在边 CD 上，点 F 在 BC 的延长线上， $CF = DE$ ， AE 的延长线与 DF 相交于点 G ，且 $DG^2 = GE \cdot GA$ ．

(1) 求证：四边形 $ABCD$ 是菱形；

(2) 如果 $AE = 3EG$ ，求证：点 E 是边 CD 的中点．



【答案】 (1) 如图，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle 4 = \angle 3$ ，

$\because DG^2 = GE \cdot GA$ ，

$$\therefore \frac{DG}{GE} = \frac{GA}{DG}$$

$\because \angle 5 = \angle 5$ ，

$\therefore \triangle GED \sim \triangle GDA$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ ，

$\because CF = DE$ ，

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle DCF$ (AAS)，

$\therefore AD = DC$ ，

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形；

(2) $\because AE = 3EG$ ，

$\therefore$ 设 $EG = m$ ， $AE = 3m$ ，

$$\therefore AG = EG + AE = 4m,$$

$$\therefore DG^2 = GE \cdot GA = m \times 4m,$$

$$\therefore DG = 2m \text{ (舍负)},$$

$$\therefore \triangle GED \sim \triangle GDA,$$

$$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{DG}{AG} = \frac{2m}{4m} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AD = CD,$$

$$\therefore \frac{DE}{CD} = \frac{1}{2},$$

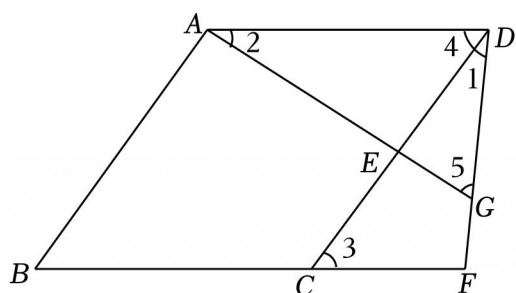
$$\therefore DE = CE,$$

$\therefore$ 点 E 是边 CD 的中点.

【分析】 (1) 先证明 $\triangle GED \sim \triangle GDA$, 再证明 $\triangle ADE \cong \triangle DCF$ (AAS), 最后根据一组邻边相等的平行四边形是菱形证明即可;

(2) 设 $EG = m$, $AE = 3m$, 由 $DG^2 = GE \cdot GA$, 求出 DG , 再由 $\triangle GED \sim \triangle GDA$ 证明即可.

【解答】 证明: (1) 如图,



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 3,$$

$$\therefore DG^2 = GE \cdot GA,$$

$$\therefore \frac{DG}{GE} = \frac{GA}{DG},$$

$$\therefore \angle 5 = \angle 5,$$

$$\therefore \triangle GED \sim \triangle GDA,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore CF = DE,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle DCF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AD = DC,$$

又 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ 四边形 $ABCD$ 是菱形;

$$(2) \because AE = 3EG,$$

$$\therefore \text{设 } EG = m, AE = 3m,$$

$$\therefore AG = EG + AE = 4m,$$

$$\because DG^2 = GE \cdot GA = m \times 4m,$$

$$\therefore DG = 2m \text{ (舍负)},$$

$$\because \triangle GED \sim \triangle GDA,$$

$$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{DG}{AG} = \frac{2m}{4m} = \frac{1}{2},$$

$$\because AD = CD,$$

$$\therefore \frac{DE}{CD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DE = CE,$$

∴ 点 E 是边 CD 的中点.

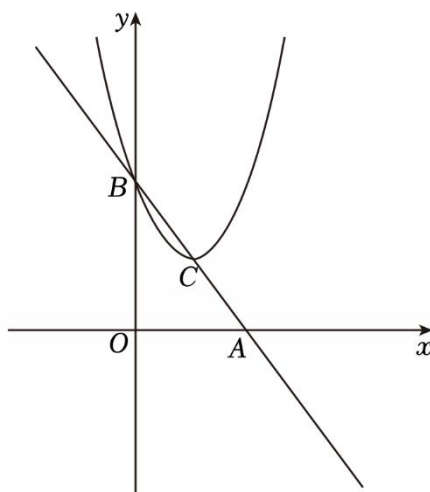
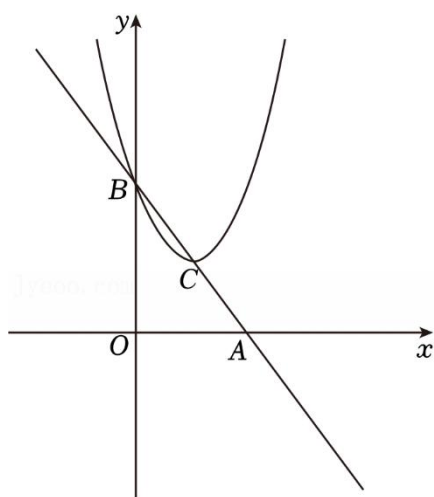
【点评】 本题考查相似三角形的判定与性质, 全等三角形的判定与性质, 菱形的判定, 平行四边形的性质, 掌握以上知识点是解题的关键.

24. (12分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 的图象分别与 x 轴, y 轴交于点 A 、 B , 点 C 是线段 AB 上一点, C 与 B 不重合. 以点 C 为顶点的二次函数 $f(x)$ 的图象经过点 B . 将该二次函数的图象平移后得到新抛物线 $g(x)$, 点 B 、 C 的对应点分别是 B' 、 C' , 且点 B' 的坐标为 $(\frac{3}{2}, 0)$, 点 C' 的纵坐标为 -2 .

(1) 求点 C 的坐标及二次函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若点 P 是新抛物线对称轴上一点, 且以 P 、 A 、 C 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似, 且相似比不等于 1, 求点 P 的坐标;

(3) 点 $D(4, y_1)$ 和 $E(x_2, y_2)$ 在新抛物线上, 且对于任意实数 x_2 , 当 $m < x_2 \leq m+1$ 时, $y_1 > y_2$, 求实数 m 的取值范围.



备用图

【答案】(1) $C(\frac{3}{2}, 2)$, $f(x) = \frac{8}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 4$;

(2) 点 P 的坐标为 $(3, \frac{25}{8})$;

(3) $2 \leq m < 3$.

【分析】(1) 先求出点 B 的坐标进而得出 OB 的长度；过点 C 作 $CH \perp y$ 轴于点 H ，由平移的性质可得，原抛物线中 B, C 两点的纵坐标的差与新抛物线中 B', C' 两点的纵坐标的差相等，据此可得点 C 的坐标，最后利用抛物线顶点式将点 B, C 代入即可求得抛物线表达式；

(2) 由原抛物线对称轴得到新抛物线的对称轴，在 $\triangle AB'C$ 中得到三边的长度，根据 $\triangle PAC$ 与 $\triangle AB'C$ 的相似比不为 1，可得出当 $PC \perp AC$ 符合题意，利用余弦的定义求得 PA 的长度，进而得出点 P 的坐标；

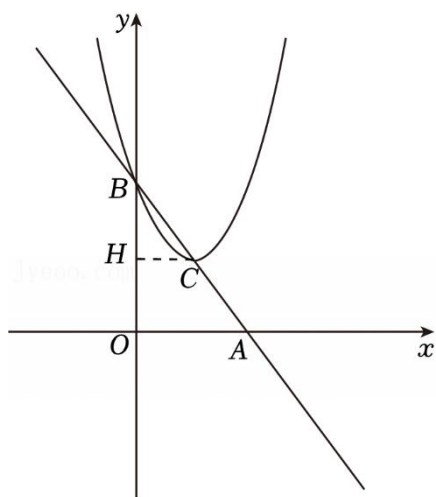
(3) 先求出平移后的新抛物线解析式，将点 D 代入求出其坐标，由 $m < x_2 \leq m+1$ 时， $y_1 > y_2$ 恒成立，可设 $y_F = y_D = -\frac{10}{9}$ ，求得点 F 的横坐标，进而得出 m 的取值范围.

【解答】解：(1) 令 $x=0$, $y = -\frac{4}{3} \times 0 + 4 = 4$,

$\therefore B(0, 4)$,

$\therefore OB = 4$,

过点 C 作 $CH \perp y$ 轴于点 H ,



$\because B'(\frac{3}{2}, 0)$, 点 C 的纵坐标为 -2 ,

$$\therefore y_B - y_C = 2,$$

$\therefore$ 将原二次函数的图象平移后得到新抛物线, 点 B' , C 分别是 B , C 的对应点,

$$\therefore y_B - y_C = y_{B'} - y_{C'} = 2, \text{ 即 } BH = 2,$$

$$\therefore y_B = 4,$$

$$\therefore y_C = 2,$$

将 $y_C = 2$ 代入 $y = -\frac{4}{3}x + 4$, 得 $x_C = \frac{3}{2}$,

$$\therefore C(\frac{3}{2}, 2),$$

$\therefore$ 点 C 为二次函数 $f(x)$ 的顶点,

$$\therefore \text{设二次函数的解析式为 } f(x) = a(x - \frac{3}{2})^2 + 2,$$

将 $B(0, 4)$ 代入得: $a(0 - \frac{3}{2})^2 + 2 = 4$,

$$\text{解得: } a = \frac{8}{9},$$

$$\therefore \text{二次函数 } f(x) = \frac{8}{9}(x - \frac{3}{2})^2 + 2 = \frac{8}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 4;$$

(2) 二次函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x = \frac{3}{2}$,

$\therefore x = \frac{3}{2}$ 向右移 $\frac{3}{2}$ 个单位长度得到二次函数 $g(x)$ 的对称轴,

$$\therefore \text{二次函数 } g(x) \text{ 的对称轴为 } x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3,$$

如图, 在 $\triangle AB'C$ 中, $x_B = x_C = \frac{3}{2}$,

是解题的关键.

25. (14分) 已知 $\triangle ABC$ 中, $AC=BC=5$, $AB=2\sqrt{5}$, 点 D 是射线 CB 上一点, 连接 AD , 圆 O 经过 A 、 B 、 D 三点.

(1) 如图1, 当点 D 在线段 BC 上时,

①记圆 O 交 AC 于点 F , 求证: $AF=BD$;

②设 $CD=m$, 用 m 表示圆 O 的半径;

(2) 如图2, 在线段 AD 的右侧, 以 AD 为底边作等腰 $\triangle EAD$, 且始终满足 $\angle EAD = \angle BAC$. 若以 C 为圆心, CE 为半径的圆 C 与圆 O 有公共点, 请直接写出线段 CD 的取值范围.

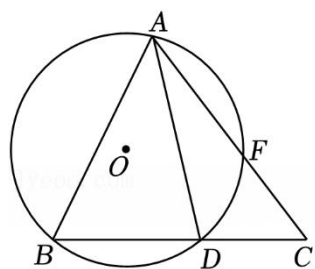


图1

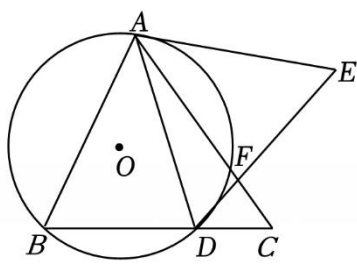
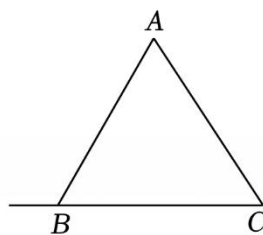
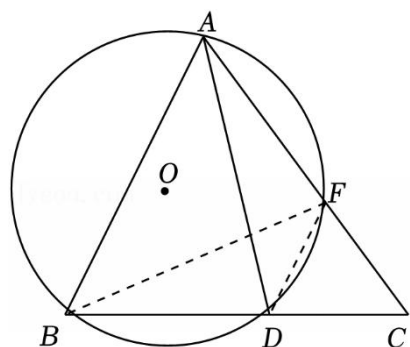


图2



备用图

【答案】(1) ①证明: 连接 BF , DF ,



在 $\triangle ABC$ 中, $AC=BC=5$,

$$\therefore \angle BAC = \angle ABC,$$

在圆 O 中, $\widehat{BF} = \widehat{DF}$,

根据圆周角定理可知, $\angle DBF = \angle DAF$,

$$\therefore \angle BAD = \angle ABF,$$

$$\therefore AF = BD;$$

$$\textcircled{2} \frac{\sqrt{5m^2 - 30m + 125}}{4};$$

(2) $0 \leq m \leq 3$.

【分析】(1) ①根据同弧所对的圆周角相等即可求解;

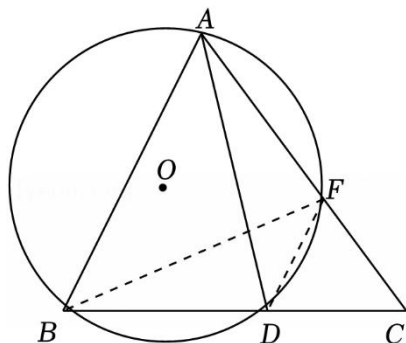
②由外接圆的圆心是中垂线的交点可知 O 在中垂线上，进而可知 $\tan \angle BCH = \frac{1}{2}$ ，根据正切值可得

$OG = \frac{5+m}{4}$ ，进而根据勾股定理即可求解；

(2) 证明 $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ ，可得点 E 的运动轨迹为直线 CE ，根据相似三角形的性质可知 $OC = \frac{\sqrt{5}(5+m)}{4}$ ；

$CE = \frac{\sqrt{5}(5-m)}{2}$ ，当 $OC \leq CE + OD$ ， CE 为半径的圆 C 与圆 O 有公共点，列不等式即可求解。

【解答】(1) ①证明：连接 BF ， DF ，



在 $\triangle ABC$ 中， $AC = BC = 5$ ，

$\therefore \angle BAC = \angle ABC$ ，

在圆 O 中， $\widehat{DF} = \widehat{DF}$ ，

根据圆周角定理可知， $\angle DBF = \angle DAF$ ，

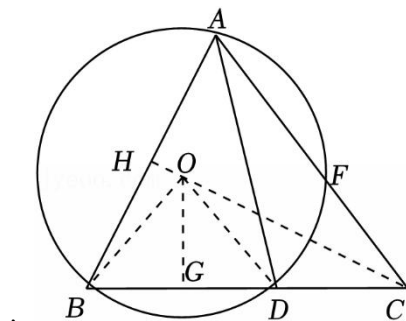
$\therefore \angle BAD = \angle ABF$ ，

$\therefore AF = BD$ ；

②解： $\because$ 圆 O 是 $\triangle ABD$ 的外接圆，

$\therefore O$ 是三边中垂线的交点，

如图，取 AB 的中点 H ，连接 CH ，取 BD 的中点 G ，连接 OG



$\therefore CH \perp AB$ ， $OG \perp BC$ ，

$\because AC = BC = 5$ ， $AB = 2\sqrt{5}$ ，

$\therefore BH = \frac{1}{2}AB = \sqrt{5}$ ，

$$\therefore CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore \tan \angle BCH = \frac{BH}{CH} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore CD = m,$$

$$\therefore BD = 5 - m,$$

$$\therefore GD = BG = \frac{5-m}{2},$$

$$\therefore CG = CD + GD = \frac{5+m}{2},$$

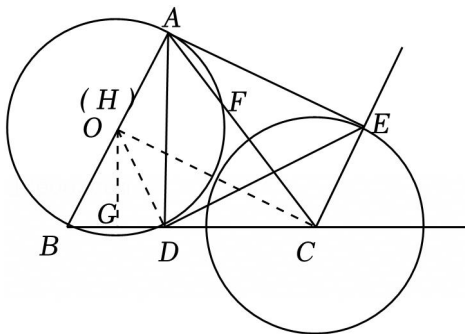
$$\therefore \tan \angle BCH = \frac{OG}{CG} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore OG = \frac{5+m}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5+m}{4},$$

$$\therefore OB = \sqrt{BG^2 + OG^2} = \sqrt{\left(\frac{5-m}{2}\right)^2 + \left(\frac{5+m}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5m^2 - 30m + 125}}{4},$$

则圆 O 的半径为: $\frac{\sqrt{5m^2 - 30m + 125}}{4}$;

(2) 解: 由题意可得,



当点 D 在 BC 线段上时,

$$\therefore \triangle ABC \text{ 中, } AC = BC = 5,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ABC,$$

$\therefore \triangle EAD$ 是以 AD 为底边的等腰三角形,

$$\therefore \angle EAD = \angle EDA,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle EDA,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE,$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACE,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE,$$

$\therefore$ 点 E 的运动轨迹为直线 CE ,

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

设 $CD = m$,

$$\therefore \text{由 (1) 可知 } OG = \frac{5+m}{4}, \quad BD = 5 - m,$$

$$\sin \angle BCH = \frac{BH}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{OG}{OC},$$

$$\therefore OC = \frac{\sqrt{5}(5+m)}{4}, \quad CE = \frac{\sqrt{5}(5-m)}{2},$$

$$\text{由 (1) 可知 } OB = OD = \frac{\sqrt{5m^2 - 30m + 125}}{4} = R,$$

当 $OC \leq CE + OD$, 以 CE 为半径的圆 C 与圆 O 有公共点,

$$\text{则 } \frac{\sqrt{5}(5+m)}{4} \leq \frac{\sqrt{5}(5-m)}{2} + \frac{\sqrt{5m^2 - 30m + 125}}{4},$$

解得: $0 \leq m \leq 3$.

【点评】 本题主要考查了圆的相关性质、勾股定理、解直角三角形、相似三角形等内容, 熟练掌握相关知识是解题的关键.