

2025 年上海市杨浦区中考数学二模试卷

一、选择题（共 6 小题）

题号	1	2	3	4	5	6
答案	B	C	D	D	D	C

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1.（4 分）下列根式中，是最简二次根式的是（ ）

- A. $\sqrt{\frac{1}{6}}$ B. $\sqrt{6}$ C. $\sqrt{12}$ D. $\sqrt{20}$

【分析】最简二次根式的概念：（1）被开方数不含分母；（2）被开方数中不含能开得尽方的因数或因式；我们把满足上述两个条件的二次根式，叫做最简二次根式，据此进行判断即可．

【解答】解： $\sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ ，则 A 不符合题意，

$\sqrt{6}$ 是最简二次根式，则 B 符合题意，

$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ，则 C 不符合题意，

$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ ，则 D 不符合题意，

故选：B．

【点评】本题考查最简二次根式，熟练掌握其定义是解题的关键．

2.（4 分）下列计算中，正确的是（ ）

- A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ B. $a^2 + a^2 = 2a^4$
C. $(-a^3)^2 = a^6$ D. $6a^6 \div 2a^2 = 3a^3$

【分析】利用同底数幂乘法法则，合并同类项法则，幂的乘方法则，单项式除以单项式法则逐项判断即可．

【解答】解： $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，则 A 不符合题意，

$a^2 + a^2 = 2a^2$ ，则 B 不符合题意，

$(-a^3)^2 = a^6$ ，则 C 符合题意，

$6a^6 \div 2a^2 = 3a^4$ ，则 D 不符合题意，

故选：C．

【点评】本题考查整式的混合运算，熟练掌握相关运算法则是解题的关键．

3. (4分) 如果反比例函数 $y = \frac{2-m}{x}$ 的图象上有两点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 当 $x_1 < x_2 < 0$ 时, 有 $y_1 < y_2$, 那么 m 的取值范围是 ()

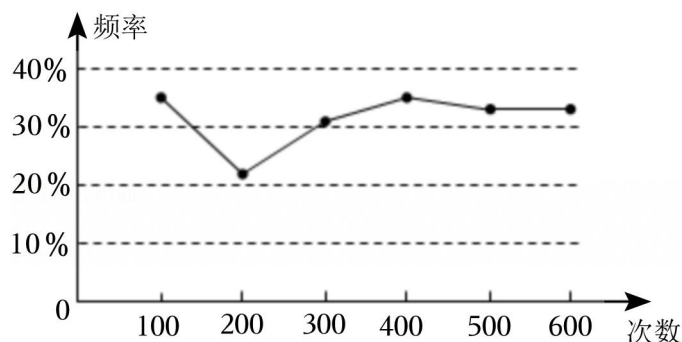
A. $m < 0$ B. $m > 0$ C. $m < 2$ D. $m > 2$

【分析】首先根据当 $x_1 < x_2 < 0$ 时, 有 $y_1 < y_2$ 则判断函数图象所在象限, 再根据所在象限判断 $1 - 3m$ 的取值范围.

【解答】解: $\because x_1 < x_2 < 0$ 时, $y_1 < y_2$,
 $\therefore$ 反比例函数图象在第二, 四象限,
 $\therefore 2 - m < 0$,
解得: $m > 2$.
故选: D.

【点评】本题主要考查反比例函数的性质, 关键是根据题意判断出图象所在象限.

4. (4分) 小王为了统计某一试验结果出现的频率, 利用计算机进行模拟试验, 并绘制出如图所示的统计图, 那么符合这一试验结果的可能是 ()



- A. 掷一枚质地均匀的骰子, 出现 1 点朝上的概率
B. 掷一枚质地均匀的骰子, 出现奇数点朝上的概率
C. 掷一枚质地均匀的骰子, 出现素数点朝上的概率
D. 掷一枚质地均匀的骰子, 出现合数点朝上的概率

【分析】根据统计图可知, 试验结果在 0.33 附近波动, 即其概率 $P \approx 0.33$, 计算四个选项的概率, 约为 0.33 者即为正确答案.

【解答】解: A. 掷一枚质地均匀的骰子, 出现 1 点朝上的概率为 $\frac{1}{6}$, 故此选项不符合题意;
B. 掷一枚质地均匀的骰子, 出现奇数点朝上的概率为 $\frac{1}{2}$, 故此选项不符合题意;
C. 掷一枚质地均匀的骰子, 出现素数点朝上的概率为 $\frac{1}{2}$, 故此选项不符合题意;

D. 掷一枚质地均匀的骰子，出现合数点朝上的概率为 $\frac{1}{3}$ ，故此选项符合题意.

故选: D.

【点评】此题考查了模拟实验,大量反复试验下频率稳定值即概率.解答本题的关键是熟练掌握概率的求法: 频率 = 所求情况数与总情况数之比.同时此题在解答中要用到概率公式.

5. (4分) 下列命题中正确的是 ()

- A. 对角线相等的四边形是菱形
- B. 对角线互相垂直的四边形是菱形
- C. 对角线相等的平行四边形是菱形
- D. 对角线互相垂直的平行四边形是菱形

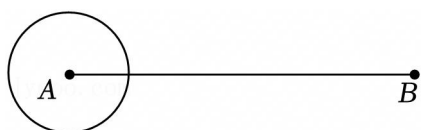
【分析】根据菱形对角线互相垂直平分的判定方法进行解答.

【解答】解: 对角线互相垂直平分的四边形是菱形; 对角线互相垂直的平行四边形是菱形;

故选: D.

【点评】此题主要考查的是菱形的判定方法: 对角线互相垂直的平行四边形是菱形; 对角线互相垂直平分的四边形是菱形.

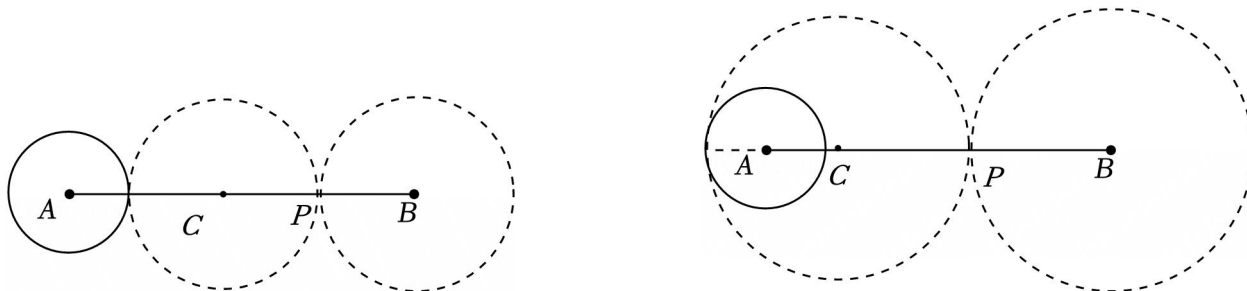
6. (4分) 如图, 已知线段 AB 的长为 10, 圆 A 的半径为 2, 点 P 是线段 AB 上一点, 以 B 为圆心、 BP 为半径作圆, 将圆 B 绕点 P 旋转 180° 得到圆 C , 点 C 是点 B 的对应点, 如果圆 A 与圆 C 相切, 那么符合条件的点 P 的个数是 ()

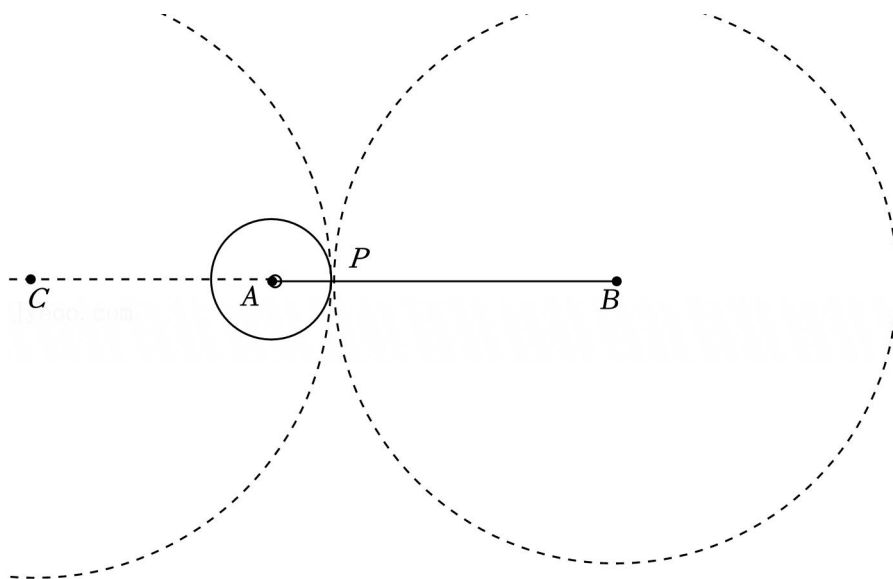


- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【分析】根据相切圆的性质作图求解.

【解答】解: 如下图:





故选：C.

【点评】本题考查了两圆的位置关系，掌握两圆相切的性质是解题的关键.

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. (4 分) $\sqrt{8a} = \underline{2\sqrt{2a}}$.

【分析】根据二次根式的化简解答即可.

【解答】解： $\sqrt{8a} = \sqrt{4} \times \sqrt{2a} = 2\sqrt{2a}$,

故答案为： $2\sqrt{2a}$.

【点评】此题考查二次根式的化简，关键是根据二次根式的化简解答.

8. (4 分) 因式分解： $9x^2 - 4 = \underline{(3x - 2)(3x + 2)}$.

【分析】直接利用平方差公式分解因式得出即可.

【解答】解： $9x^2 - 4 = (3x - 2)(3x + 2)$.

故答案为： $(3x - 2)(3x + 2)$.

【点评】此题主要考查了公式法分解因式，熟练应乘法公式是解题关键.

9. (4 分) 方程 $\sqrt{2x - 4} = 2$ 的解是 $\underline{x = 4}$.

【分析】将原方程两边同时平方得一元一次方程，解得 x 的值后进行检验即可.

【解答】解：原方程两边同时平方得： $2x - 4 = 4$,

解得： $x = 4$,

检验：当 $x = 4$ 时， $2x - 4 > 0$,

则 $x = 4$ 是原方程的解，

故答案为： $x = 4$ 。

【点评】 本题考查无理方程，熟练掌握解方程的方法是解题的关键。

10. (4分) 已知关于 x 的方程 $x^2 - ax - 2 = 0$ ，判断该方程的根的情况是 两个不相等实数根。

【分析】 根据 $b^2 - 4ac$ 的正负即可解决问题。

【解答】 解：由题知，

$$\Delta = (-a)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = a^2 + 8,$$

因为 $a^2 \geq 0$,

所以 $\Delta = a^2 + 8 > 0$,

则该方程有两个不相等的实数根。

故答案为：两个不相等实数根。

【点评】 本题考查根的判别式，熟知一元二次方程根的判别式是解题的关键。

11. (4分) 某新能源汽车销售公司 2022 年盈利 a 万元，如果该公司每年盈利增长的百分率都为 10%，那么该公司 2024 年盈利 $a(1+10\%)^2$ 万元。（用含 a 的代数式表示）

【分析】 根据增长率问题，用百分数乘法列出代数式，即可解题。

【解答】 解：由题意得，

公司 2024 年的盈利是 $a(1+10\%)^2$ (万元)，

故答案为： $a(1+10\%)^2$ 。

【点评】 本题考查列代数式，解答本题的关键是明确题意，列出相应的代数式。

12. (4分) 如果将直线 $y = -2x - 1$ 平移，使其经过点 $(0, 3)$ ，那么平移后所得直线的表达式是 $y = -2x + 3$ 。

【分析】 根据平移不改变 k 的值可设平移后直线的解析式为 $y = -2x + b$ ，然后将点 $(0, 3)$ 代入即可得出直线的函数解析式。

【解答】 解：设平移后直线的解析式为 $y = -2x + b$ 。

把 $(0, 3)$ 代入直线解析式得 $3 = b$,

解得 $b = 3$ 。

所以平移后直线的解析式为 $y = -2x + 3$ 。

故答案为： $y = -2x + 3$ 。

【点评】 本题考查了一次函数图象与几何变换，待定系数法求一次函数的解析式，掌握直线 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 平移时 k 的值不变是解题的关键。

13. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，点 G 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的重心，如果 $CG = 6$ ，那么斜边 AB 的长等于

18 .

【分析】 CD 为斜边上的中线，如图，根据重心的性质得到 $DG = \frac{1}{2}CG = 3$ ，则 $CD = 9$ ，然后根据直角三角形斜边上的中线性质的性质即可得到 AB 的长．

【解答】解：如图，

$\because$ 点 G 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的重心，

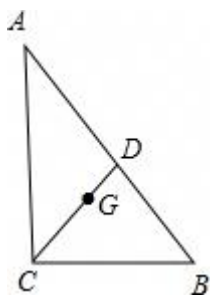
$\therefore CG : GD = 2 : 1$ ，

$\therefore DG = \frac{1}{2}CG = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ ，

$\therefore CD = 3 + 6 = 9$ ，

$\therefore AB = 2CD = 18$ ．

故答案为 18．



【点评】本题考查了三角形重心：三角形的重心是三角形三边中线的交点．重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2：1．也考查了直角三角形斜边上的中线性质的性质．

14. (4 分) 某中学为了了解全校 600 名学生平均每周周末在家体育锻炼时间的情况，随机调查了该校 50 名学生一月内平均每周周末在家体育锻炼时间的情况，结果如表：

时间（分）	40	45	50	55	60	65	70
人数	10	10	8	6	5	6	5

请估计该学校平均每周周末在家体育锻炼时间不少于 60 分钟的学生大约有 192 人．

【分析】借助表格查找时间不少于 60 分钟的学生的人数，除以样本容量，然后乘全校人数即可求解．

【解答】解：根据题意得：

$$600 \times \frac{16}{50} = 192 \text{ (人)},$$

估计该学校平均每周周末在家体育锻炼时间不少于 60 分钟的学生大约有 192 人．

故答案为：192．

【点评】本题考查了用样本估计总体，正确列出算式是解答本题的关键．

15. (4 分) 如果抛物线不经过第二象限，且它的对称轴在 y 轴右侧，那么这条抛物线的表达式可以是 $y = x^2 + 2x + 1$

$= -x^2 + 3x - 2$ (答案不唯一) (只需写出一个即可).

【分析】依据题意，抛物线开口向下，结合对称轴在 y 轴右侧，则 $-\frac{b}{2a} > 0$ ，从而可以判断得解.

【解答】解：由题意， $\because$ 抛物线不经过第二象限，且它的对称轴在 y 轴右侧，

$\therefore$ 抛物线开口向下，即 $a < 0$ ，且对称轴是直线 $x = -\frac{b}{2a} > 0$ ，与 y 轴交于负半轴.

$\therefore b > 0, c < 0$.

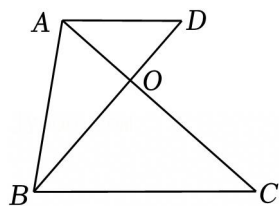
$\therefore$ 这条抛物线的表达式可以是 $y = -x^2 + 3x - 2$.

故答案为： $y = -x^2 + 3x - 2$ (答案不唯一).

【点评】本题主要考查了待定系数法求二次函数解析式、二次函数的性质，解题时要熟练掌握并能灵活运用二次函数的性质是关键.

16. (4分) 如图， $AD \parallel BC$ ， $BC = 2AD$ ， AC 与 BD 相交于点 O ，如果 $\vec{AB} = \vec{a}$ ， $\vec{AO} = \vec{b}$ ，那么用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$

表示向量 $\vec{AD}$ 是 $-\frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$.



【分析】根据题意得出 $\frac{AC}{AO} = \frac{3}{1}$ ，得出 $\vec{AC} = 3\vec{AO} = 3\vec{b}$ ，再根据平面向量三角形减法运算法则即可推出结果.

【解答】解： $\because AD \parallel BC$ ， $BC = 2AD$ ，

$$\therefore \frac{AC}{AO} = \frac{3}{1},$$

$$\therefore \vec{AC} = 3\vec{AO} = 3\vec{b},$$

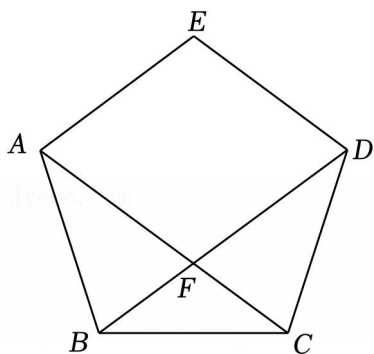
$$\therefore \vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = 3\vec{b} - \vec{a},$$

$$\therefore \vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}(3\vec{b} - \vec{a}) = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a},$$

故答案为： $\frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$.

【点评】本题考查了平面向量，熟记平面向量的三角形运算法则是解题的关键.

17. (4分) 如图，已知正五边形 $ABCDE$ 的边长是 4，联结 AC 、 BD 交于点 F ，那么 CF 的长是 $2\sqrt{5} - 2$.



【分析】根据正五边形的性质求出 $\angle ABC = \angle BCD = 108^\circ$ ，根据等腰三角形的性质得到 $\angle BAC = \angle BCA = 36^\circ$ ，证明 $AF = AB = 4$ ，再证明 $\triangle CBF \sim \triangle CAB$ ，根据相似三角形的性质列出比例式，计算即可．

【解答】解：∵ 五边形 $ABCDE$ 为正五边形，

$$\therefore \angle ABC = \angle BCD = \frac{(5-2) \times 180^\circ}{5} = 108^\circ, \quad AB = BC = CD,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BCA = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ,$$

同理可得： $\angle CBD = 36^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABF = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ, \quad \angle AFB = \angle FBC + \angle FCB = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle AFB,$$

$$\therefore AF = AB = 4,$$

$$\therefore \angle CBF = \angle CAB, \quad \angle BCF = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle CBF \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore \frac{CF}{CB} = \frac{CB}{CA}, \quad \text{即} \frac{CF}{4} = \frac{4}{CF+4},$$

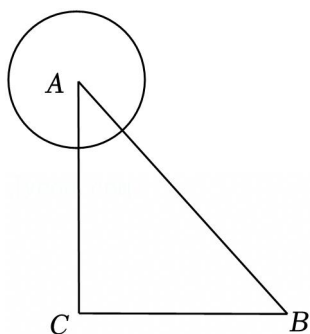
$$\therefore CF^2 + 4CF - 16 = 0,$$

$$\text{解得：} CF_1 = 2\sqrt{5} - 2, \quad CF_2 = -2\sqrt{5} - 2 \text{ (舍去)},$$

故答案为： $2\sqrt{5} - 2$ ．

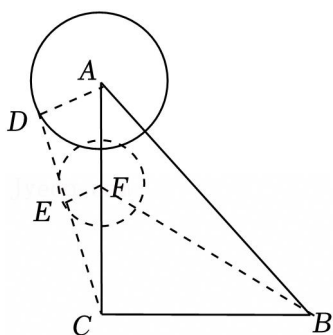
【点评】本题考查的是正多边形和圆，掌握正多边形的性质、相似三角形的判定是解题的关键．

18. (4分) 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $BC = 4$ ，以 A 为圆心、2 为半径作圆，点 D 是圆 A 上一点，联结 CD ，点 E 是 CD 的中点，联结 BE ，那么 BE 长度的取值范围是 $4 \leq BE \leq 6$ ．



【分析】取 AC 的中点 F ，根据三角形中位线定理得出 $EF = 1$ ，据此得出点 E 的轨迹，再结合勾股定理即可解决问题．

【解答】解：取 AC 的中点 F ，连接 EF ，



$\because$ 点 E 和点 F 分别为 DC 和 AC 的中点，

$\therefore EF$ 为 $\triangle ADC$ 的中位线，

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AD = 1,$$

则点 E 在以点 F 为圆心，1 为半径的圆上．

连接 BF ，

在 $\text{Rt}\triangle BCF$ 中，

$$BF = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\therefore 5 - 1 \leq BE \leq 5 + 1,$$

$$\text{即 } 4 \leq BE \leq 6.$$

故答案为： $4 \leq BE \leq 6$ ．

【点评】本题主要考查了点与圆的位置关系、三角形三边关系及三角形中位线定理，能根据题意得出点 E 的运动轨迹及熟知勾股定理是解题的关键．

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19.（10 分）先化简，再求值： $(a + 1 - \frac{2a-1}{a-1}) \div \frac{a^2-4a+4}{a-1}$ ，其中 $a = \sqrt{3}$ ．

【分析】将括号内的分式通分并计算，然后算除法并进行约分化简，最后将已知数值代入化简结果中计

算即可.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解: 原式} &= \left[\frac{(a+1)(a-1)}{a-1} - \frac{2a-1}{a-1} \right] \cdot \frac{a-1}{(a-2)^2} \\ &= \frac{a^2-1-2a+1}{a-1} \cdot \frac{a-1}{(a-2)^2} \\ &= \frac{a^2-2a}{a-1} \cdot \frac{a-1}{(a-2)^2} \\ &= \frac{a(a-2)}{a-1} \cdot \frac{a-1}{(a-2)^2} \\ &= \frac{a}{a-2}; \end{aligned}$$

当 $a = \sqrt{3}$ 时,

$$\text{原式} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)}{3-4} = -3 - 2\sqrt{3}.$$

【点评】本题考查分式的化简求值, 熟练掌握相关运算法则是解题的关键.

20. (10分) 解不等式组:
$$\begin{cases} 6-3x > 2(x-2) \\ \frac{2x-1}{2} - 3x \leq 4 \end{cases}.$$

【分析】先分别求出每一个不等式的解集, 再找出解集的公共部分即可.

$$\text{【解答】解: } \begin{cases} 6-3x > 2(x-2) \text{ ①} \\ \frac{2x-1}{2} - 3x \leq 4 \text{ ②} \end{cases},$$

解不等式①, 得 $x < 2$,

解不等式②, 得 $x \geq -\frac{9}{4}$,

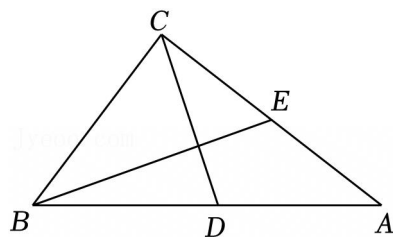
$\therefore$ 原不等式组的解集为 $-\frac{9}{4} \leq x < 2$.

【点评】本题考查了解一元一次不等式组, 熟练掌握一元一次不等式的解法是解题的关键.

21. (10分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 8$, $\tan A = \frac{3}{4}$, CD 是中线, 作 $BE \perp CD$, 交边 AC 于点 E .

(1) 求 CE 的长;

(2) 求 $\angle EBA$ 的正切值.



【分析】(1) 先求出 AB 和 BC 的长, 再利用 $\triangle BCE \sim \triangle ACB$ 即可解决问题.

(2) 令 BE 与 CD 的交点为 F ，利用勾股定理求出 CF 和 BF 的长，进一步得出 DF 的长，最后根据正切的定义即可解决问题。

【解答】解：(1) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

$$\tan A = \frac{BC}{AC},$$

$$\therefore \frac{BC}{8} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore BC = 6,$$

$$\text{则 } AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

$\because CD$ 是中线，

$$\therefore CD = DA,$$

$$\therefore \angle A = \angle ACD.$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \quad BE \perp CD,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle BCD = \angle BCD + \angle CBE,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle CBE,$$

$$\therefore \angle A = \angle CBE,$$

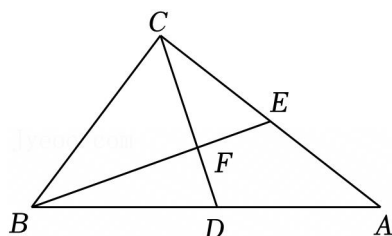
$$\therefore \triangle BCE \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{CE}{BC} = \frac{BC}{AC},$$

$$\text{则 } \frac{CE}{6} = \frac{6}{8},$$

$$\therefore CE = \frac{9}{2}.$$

(2) 令 CD 与 BE 的交点为 F ，



$$\because \tan \angle CBE = \tan A = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \text{令 } CF = 3x, \quad BF = 4x,$$

$$\text{则 } BC = 5x,$$

$$\therefore 5x = 6,$$

解得 $x = \frac{6}{5}$.

$$\therefore BF = \frac{24}{5}, CF = \frac{18}{5}.$$

$$\text{又} \because CD = \frac{1}{2}AB = 5,$$

$$\therefore DF = 5 - \frac{18}{5} = \frac{7}{5}.$$

在 $\text{Rt}\triangle BFD$ 中,

$$\tan \angle EBA = \frac{DF}{BF} = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{24}{5}} = \frac{7}{24}.$$

【点评】 本题主要考查了解直角三角形及直角三角形斜边上的中线, 熟知直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半及正切的定义是解题的关键.

22. (10分) 为了让游客更好的观赏花圃景观, 某植物园打算在不同形状的花圃内都建设一条半圆形的步道, 要求一: 步道的外围不超过各自花圃的范围; 要求二: 半圆形步道的圆心在花圃的某一条边上; 要求三: 半圆形步道的半径尽可能的大 (忽略步道的宽度).

根据以下不同形状的花圃分别按要求画出这个半圆形步道的圆心 (不用写作法, 保留痕迹), 并直接写出不同形状的花圃下半圆形步道的半径.

花圃一: 如图1, $\triangle ABC$ 是一个等腰三角形的花圃, 经测量 $AB = AC = 13m$, $BC = 24m$, 半圆形步道的圆心在边 BC 上;

花圃二: 如图2, 四边形 $DEFG$ 是一个梯形的花圃, $DG \parallel EF$, 经测量 $DG = 9m$, $EF = 27m$, $\angle E = 45^\circ$, $\tan F = 2$, 半圆形步道的圆心在边 EF 上. (结果保留根号)

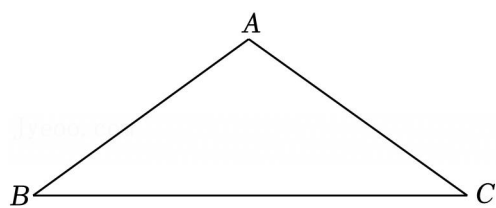


图1

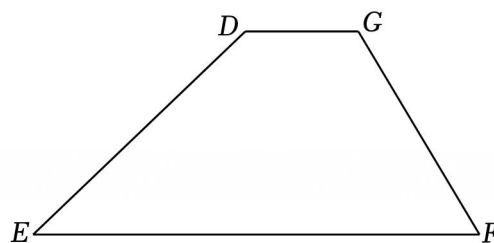


图2

【分析】 花圃一: 分别以点 B 和点 C 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}BC$ 为半径画弧, 两弧交于 F , 连接 AF 交 BC 于点 D 即为所求的圆心; 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E , 利用三线合一得到 $BD = \frac{1}{2}BC = 12cm$ 勾股定理求出 $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 5(cm)$, 然后利用等面积法求解即可;

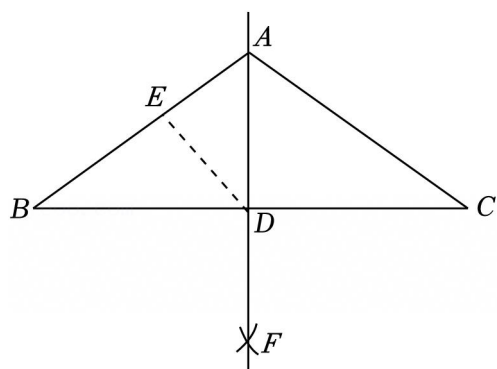
花圃二: 延长 ED , FG 交于点 H , 尺规作 $\angle EHF$ 的角平分线交 EF 于点 A 即为所求作的圆心; 过点 A 作 $AN \perp HF$ 于点 N , 过点 A 作 $AM \perp HE$ 于点 M , 设 $FN = x$, 则 $AM = AN = 2x$, $EA = 2\sqrt{2}x$,

$AF = \sqrt{AN^2 + NF^2} = \sqrt{5}x$, 根据 $EF = 27m$ 列方程求解即可.

【解答】解：花圃一：根据题意得，当半圆与 AB , AC 相切时，半圆的半径最大，

分别以点 B 和点 C 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}BC$ 为半径画弧，两弧交于 F ，连接 AF 交 BC 于点 D 即为所求的圆心，如图所示，点 D 即为所求作的圆心；

过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，故 DE 为半圆的半径，



$\because AB = AC = 13m$, $BC = 24m$ 由作图得， AD 垂直平分 BC ,

$$\therefore BD = \frac{1}{2}BC = 12cm, AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 5(cm),$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BD = \frac{1}{2}AB \cdot DE,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = \frac{1}{2} \times 13DE,$$

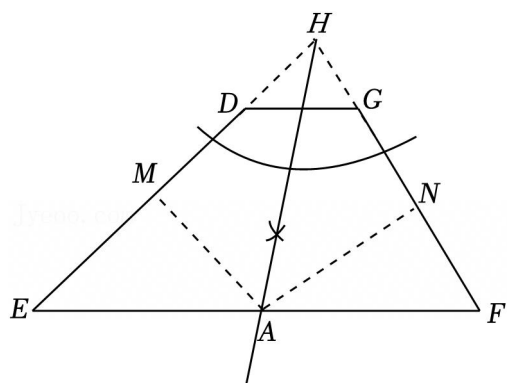
$$\therefore DE = \frac{60}{13}cm,$$

$\therefore$ 半圆形步道的半径为 $\frac{60}{13}cm$;

花圃二：根据题意得，当半圆与 DE , GF 相切时，半圆的半径最大，

延长 ED , FG 交于点 H ，尺规作 $\angle EHF$ 的角平分线交 EF 于点 A 即为所求作的圆心，如图所示，点 A 即为所求作的圆心，

过点 A 作 $AN \perp HF$ 于点 N ，过点 A 作 $AM \perp HE$ 于点 M ，



$\therefore AM = AN$, 且 AM, AN 为半圆的半径,

$\therefore \angle E = 45^\circ$,

$\therefore \triangle MEA$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \tan F = \frac{AN}{FN} = 2,$$

$\therefore$ 设 $FN = x$, 则 $AM = AN = 2x$,

$$\therefore EA = 2\sqrt{2}x, AF = \sqrt{AN^2 + NF^2} = \sqrt{5}x,$$

$$\therefore EF = EA + AF = 27m,$$

$$\therefore 2\sqrt{2}x + \sqrt{5}x = 27,$$

$$\text{解得 } x = 18\sqrt{2} - 9\sqrt{5},$$

$$\therefore AM = AN = 2x = 36\sqrt{2} - 18\sqrt{5},$$

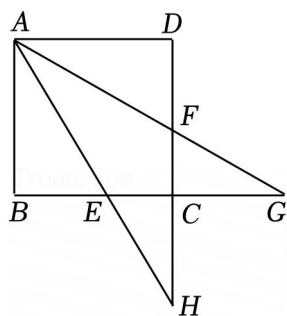
$\therefore$ 半圆的半径为 $(36\sqrt{2} - 18\sqrt{5})\text{cm}$.

【点评】 此题考查了切线的性质, 勾股定理, 角平分线的性质定理, 解直角三角形等知识, 解题的关键是掌握以上知识点.

23. (12分) 已知: 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别在边 BC, CD 上, 且 $\angle BAE = \angle DAF$, 延长 AE, AF 分别交 DC, BC 延长线于点 H, G .

(1) 求证: $DF \cdot CD = BE \cdot BC$;

(2) 联结 EF, HG , 如果 $EF \parallel HG$, 求证: 四边形 $ABCD$ 是正方形.



【分析】 (1) 由矩形的性质可得 $AD = BC, AB = CD, \angle B = \angle D = 90^\circ$, 再证明 $\triangle BAE \sim \triangle DAF$ 推出 $DF \cdot AB = CE \cdot AD$, 则 $DF \cdot CD = BE \cdot BC$;

(2) 先证明 $\angle CEH = \angle CFG$, 则可证明 $\triangle ECH \sim \triangle FCG$, 证明 $\triangle ECF \sim \triangle GCH$, 进而可证明 $CH = CG, CE = CF$, 再证明 $\triangle EAG \cong \triangle FAH$, 得到 $AE = AF$, 即可证明 $AB = AD$, 据此可证明结论.

【解答】 证明: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AD = BC, AB = CD, \angle B = \angle D = 90^\circ,$$

又 $\because \angle BAE = \angle DAF$,

$$\therefore \triangle BAE \sim \triangle DAF,$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BE}{DF},$$

$$\therefore DF \cdot AB = CE \cdot AD,$$

$$\text{即 } DF \cdot CD = BE \cdot BC;$$

(2) 如图,

$$\therefore \triangle BAE \sim \triangle DAF,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle AFD,$$

$$\therefore \angle CEH = \angle AEB, \quad \angle CFG = \angle AFD,$$

$$\therefore \angle CEH = \angle CFG,$$

$$\text{又 } \therefore \angle ECH = \angle FCG,$$

$$\therefore \triangle ECH \sim \triangle FCG,$$

$$\therefore \frac{EC}{FC} = \frac{CH}{CG},$$

$$\therefore EF \parallel GH,$$

$$\therefore \triangle ECF \sim \triangle GCH,$$

$$\therefore \frac{EC}{CG} = \frac{CF}{CH},$$

$$\therefore \frac{EC}{CF} = \frac{CG}{CH},$$

$$\therefore \frac{CH}{CG} = \frac{CG}{CH},$$

$$\therefore CH = CG,$$

$$\therefore CE = CF,$$

$$\therefore CG + CE = CH + CF,$$

$$\text{即 } EG = FH,$$

$$\text{又 } \therefore \angle EAG = \angle FAH, \quad \angle EGA = \angle FHA,$$

$$\therefore \triangle EAG \cong \triangle FAH \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AE = AF,$$

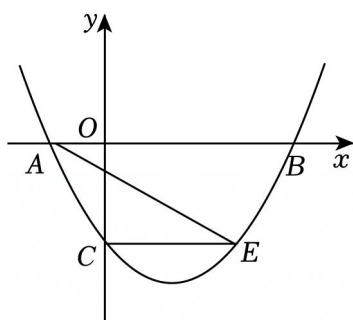
$$\therefore \triangle BAE \sim \triangle DAF,$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AF} = 1,$$

$$\therefore AB = AD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形.

(2) $\because CE \parallel x$, 则 $\angle AEC = \angle EOB$,



$\because AE$ 平分 $\angle BAC$, 则 $\angle CAE = \angle EBA$,

则 $\angle CAE = \angle AEC$, 则 $AC = CE$,

由抛物线的表达式知, 点 $C(0, -3a)$, 则点 $E(2, -3a)$, 而点 $A(-1, 0)$,

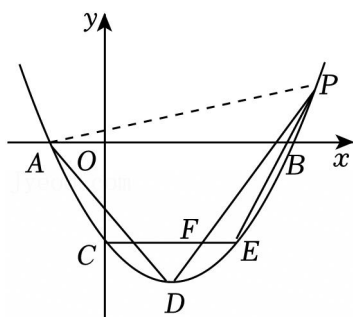
则 $1+9a^2=4$, 解得: $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$ (不合题意的值已舍去);

(3) 过定点, 理由:

连接 AP ,

$\because S_{\triangle AFD} = S_{\triangle PFE}$, 则 $S_{\triangle APD} = S_{\triangle APE}$,

则 $DE \parallel AP$,



由点 $D(1, -4a)$ 、 E 的坐标得, 直线 DE 的表达式为: $y = a(x-1) - 4a$,

则直线 AP 的表达式为: $y = a(x+1)$,

联立上式和抛物线的表达式得: $ax^2 - 2ax - 3a = a(x+1)$,

解得: $x=0$ (舍去) 或 4 , 即点 $P(4, 5a)$,

由点 P 、 D 的坐标得, 直线 PD 的表达式为: $y = 3a(x-1) - 4a = a(3x-7)$,

当 $x=\frac{7}{3}$ 时, $y=0$,

即直线 PD 过定点 $(\frac{7}{3}, 0)$.

【点评】 主要考查了二次函数的解析式的求法和与几何图形结合的综合能力的培养. 要会利用数形结合的思想把代数和几何图形结合起来, 利用点的坐标的意义表示线段的长度, 从而求出线段之间的关系.

25. (14分) 已知圆 O 的直径 AB 上有一点 C (不与 A 、 B 重合), $AB = 10$, 过点 C 作弦 $DE \perp AB$, 点 F 是弧 BD 的中点, 联结 EF , 交 AB 于点 G .

(1) 如图 1, 当点 G 与点 O 重合时, 求 AC 的长;

(2) 如图 2, 联结 OD , 当 $OD \perp EF$ 时, 求 $\frac{DE}{EF}$ 的值;

(3) 设 $AC = x$, $y = \frac{EG}{GF}$, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出自变量 x 的取值范围.

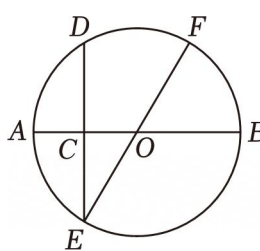


图1

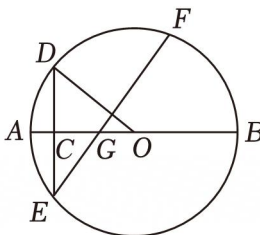
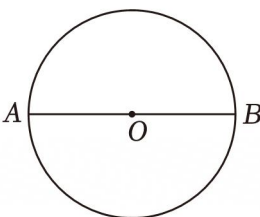


图2



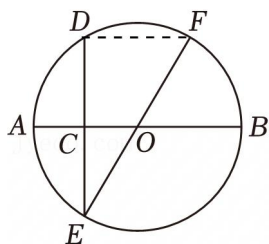
备用图

【分析】 (1) 连接 DF , 利用圆周角定理, 圆的有关性质求得 $\angle E = 30^\circ$, 利用含 30° 角的直角三角形的性质求得 OC , 则 $AC = OA - OC$;

(2) 连接 FD , 延长 ED 至点 H , 连接 FH , 使 $FH = FD$, 利用圆周角定理和垂径定理得到 $\angle DFE = \angle E = 36^\circ$, 设 $HF = m$, $HD = n$, 则 $DE = DF = HF = m$, $EF = EH = m + n$, 利用相似三角形的判定与性质得到 m, n 的关系式, 利用 n 的代数式分别表示出 DE, EF , 代入化简即可得出结论;

(3) 连接 BE, OF , 过点 F 作 $FM \perp AB$ 于点 M , 利用垂径定理的推论得到 CE , 利用勾股定理求得 BE , 利用相似三角形的判定与性质求得 FM , 再利用相似三角形的判定与性质解答即可.

【解答】 解: (1) 连接 DF , 如图,



$\because AB$ 是圆 O 的直径, 弦 $DE \perp AB$,

$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{AE},$$

$\because$ 点 F 是弧 BD 的中点,

$$\therefore \widehat{DF} = \widehat{BF},$$

$$\therefore \angle AOE = \angle BOF,$$

$$\therefore \widehat{AE} = \widehat{BF},$$

$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{DF} = \widehat{BF},$$

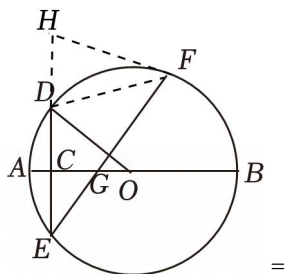
$$\therefore \angle DEF = 30^\circ,$$

$$\because DE \perp AB,$$

$$\therefore OC = \frac{1}{2}OE = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}AB = \frac{5}{2},$$

$$\therefore AC = OA - OC = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2};$$

(2) 连接 FD , 延长 ED 至点 H , 连接 FH , 使 $FH = FD$, 如图,



$\because AB$ 是圆 O 的直径, 弦 $DE \perp AB$,

$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{AE},$$

$\because$ 点 F 是弧 BD 的中点,

$$\therefore \widehat{DF} = \widehat{BF},$$

$$\because OD \perp EF,$$

$$\therefore \widehat{DE} = \widehat{DF},$$

$$\therefore \widehat{BF} = \widehat{DF} = 2\widehat{AD},$$

设 $\widehat{AD}$ 的度数为 x° , 则 $\widehat{DF}$, $\widehat{BF}$ 的度数分别为 $2x^\circ$,

$\because AB$ 是圆 O 的直径,

$$\therefore x + 2x + 2x = 180,$$

$$\therefore x = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle DFE = \angle E = 36^\circ,$$

$$\therefore DE = DF, \angle FDH = \angle E + \angle DFE = 72^\circ,$$

$$\because FH = FD,$$

$$\therefore \angle H = \angle FDH = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle DFH = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle HFE = \angle DFE + \angle HFD = 72^\circ = \angle H,$$

$$\therefore EF = EH.$$

$$\therefore \angle DFH = \angle E = 36^\circ, \quad \angle H = \angle H,$$

$$\therefore \triangle FHD \sim \triangle EHF,$$

$$\therefore \frac{HF}{HD} = \frac{EF}{HF},$$

设 $HF = m$, $HD = n$, 则 $DE = DF = HF = m$, $EF = EH = m + n$,

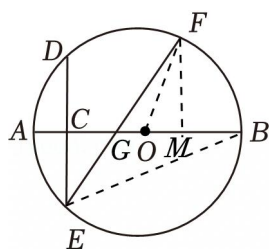
$$\therefore \frac{m}{n} = \frac{m+n}{m},$$

$$\therefore m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} n \quad (\text{负数不合题意, 舍去}),$$

$$\therefore DE = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} n, \quad EF = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} n,$$

$$\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} n}{\frac{3 + \sqrt{5}}{2} n} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2};$$

(3) 连接 BE , OF , 过点 F 作 $FM \perp AB$ 于点 M , 如图,



$$\therefore AB = 10, \quad AC = x,$$

$$\therefore BC = 10 - x.$$

$$\therefore AB \text{ 是圆 } O \text{ 的直径, } DE \perp AB,$$

$$\therefore EC^2 = AC \cdot BC = x(10 - x),$$

$$\therefore EC = \sqrt{x(10 - x)},$$

$$\therefore BE = \sqrt{CE^2 + BC^2} = \sqrt{x(10 - x) + (10 - x)^2} = \sqrt{100 - 10x} = \sqrt{10(10 - x)}.$$

$$\therefore \text{点 } F \text{ 是弧 } BD \text{ 的中点,}$$

$$\therefore \angle DEB = \angle FOB,$$

$$\therefore DE \perp AB, \quad FM \perp AB,$$

$$\therefore \angle ECB = \angle FMO = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ECB \sim \triangle OMF,$$

$$\frac{BC}{BE} = \frac{MF}{OF}.$$

$$\therefore \frac{10-x}{\sqrt{10(10-x)}} = \frac{MF}{5},$$

$$\therefore MF = \frac{5(10-x)}{\sqrt{10(10-x)}},$$

$$\because DE \perp AB, FM \perp AB,$$

$$\therefore DE \parallel FM,$$

$$\therefore \triangle CEG \sim \triangle MFG,$$

$$\therefore \frac{EG}{GF} = \frac{CE}{FM},$$

$$\therefore y = \frac{EG}{GF} = \frac{\sqrt{x(10-x)}}{\frac{5(10-x)}{\sqrt{10(10-x)}}} = \frac{\sqrt{10x}}{5}.$$

$\therefore y$ 关于 x 的函数解析式为 $y = \frac{\sqrt{10x}}{5}$, 自变量 x 的取值范围 $0 < x < 10$.

【点评】 本题主要考查了圆的有关性质，圆周角定理，垂径定理，直角三角形的性质，勾股定理，相似三角形的判定与性质，等腰三角形的判定与性质，添加适当的辅助线构造直角三角形和等腰三角形是解题的关键.