

数学学科参考答案及评分说明

1

21. 解: (1) $\because BD \perp DC$, $\therefore \angle BDC = 90^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中, $\cot \angle CBD = \frac{BD}{DC} = 2$. 得 $BD = 2\sqrt{5}$.

$$\because AB^2 = 4, AD^2 = 16, BD^2 = 20, \therefore AB^2 + AD^2 = BD^2.$$

$\therefore \triangle ABD$ 为直角三角形, $\angle BAD = 90^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\tan \angle ADB = \frac{AB}{AD} = \frac{1}{2}$.

(2) 在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中, 由勾股定理得 $BC = 5$.

$\because \cot \angle CBD = 2, \tan \angle ADB = \frac{1}{2}, \therefore \angle ADB = \angle DBC. \therefore AD \parallel BC$.

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{OD}{BO}. \therefore \frac{4}{5} = \frac{2\sqrt{5} - BO}{BO}.$$

$$\text{解得 } BO = \frac{10\sqrt{5}}{9}.$$

22. 解: (1) $y = \frac{1}{3}x$.

(2) (答案不唯一) 画图略.

操作步骤如下:

① 画函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图像;

② 过点 B 作 $BE \perp x$ 轴交函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图像于点 E ;

③ 画函数 $y = \frac{1}{2}x$ 的图像;

④ 过点 E 作 $EQ \perp BE$, 交函数 $y = \frac{1}{2}x$ 的图像于点 Q .

所以点 Q 的坐标为 $\left(\frac{4}{b}, \frac{2}{b}\right)$.

23. 证明: (1) $\because DE \perp BC$, $\therefore \angle E = 90^\circ$.

$$\because BO \cdot BD = BC \cdot BE, \therefore \frac{BO}{BE} = \frac{BC}{BD}.$$

又 $\because \angle DBC$ 为公共角, $\therefore \triangle BOC \sim \triangle BED$.

$$\therefore \angle BOC = \angle E = 90^\circ.$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

(2) $\because AE \perp CD, \therefore \angle AFC = 90^\circ$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore \angle ACB = \angle ACD, \quad OC = \frac{1}{2}AC, \quad BO = \frac{1}{2}BD.$$

$$\because \triangle BOC \sim \triangle BED, \therefore \angle ACB = \angle BDE. \therefore \angle ACD = \angle BDE.$$

$$\text{又} \because \angle AFC = \angle BED = 90^\circ, \therefore \triangle ACF \sim \triangle BDE.$$

$$\therefore \frac{CF}{DE} = \frac{AC}{BD}. \therefore \frac{CF}{DE} = \frac{OC}{BO}.$$

24. 解: (1) ①由抛物线 $y = ax^2 + bx + 3 (a \neq 0)$ 与 x 轴交于 $B(3, 0)$,

$$\text{可得 } 3a + b + 1 = 0.$$

$$\text{由抛物线的对称轴是直线 } x = 1, \text{ 得 } -\frac{b}{2a} = 1.$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = -1, \\ b = 2. \end{cases}$$

所以, 此时抛物线的表达式是 $y = -x^2 + 2x + 3$.

②分别过点 P 作 y 轴、 x 轴的垂线, 垂足为点 M 、 N .

$$\text{设点 } P \text{ 的坐标为 } (m, -m^2 + 2m + 3).$$

$$\text{可得 } PM = m, \quad BN = -m^2 + 2m + 3, \quad PN = 3 - m, \quad CM = -m^2 + 2m.$$

$$\text{易证 } \triangle CMP \sim \triangle PNB, \text{ 得 } \frac{-m^2 + 2m}{3 - m} = \frac{m}{-m^2 + 2m + 3}.$$

$$\text{解得 } m = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (负值已舍)}.$$

$$\text{所以点 } P \text{ 的横坐标为 } \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

(2) 过点 G 作 y 轴的垂线, 垂足为 E , 过点 C 作 y 轴的垂线, 交直线 $x = m$ 于点 F .

由点 G 是 $\triangle AOC$ 的重心, 得 $CE = 2$. 设 $GE = t$, 则点 A 的坐标为 $(-3t, 0)$.

由 $\angle ECB = \angle FCB = 45^\circ$, 易证 $\triangle CGE \cong \triangle CPF$. 可得 $m = 2$, $PF = t$.

由 $P(2, 3 + t)$ 在抛物线 $y = ax^2 + (-1 - 3a)x + 3$ 上, 得 $t = -2 - 2a$.

$$\text{又由 } A(-3t, 0), \quad B(3, 0), \text{ 抛物线的对称轴是 } x = \frac{1 + 3a}{2a}, \text{ 得 } 3at = -1.$$

$$\text{解得 } a = \frac{-3 - \sqrt{15}}{6} \text{ (正值已舍)}.$$

25. 解: (1) ①、③

(2) 1°当点 D 、 E 都在 $\widehat{BC}$ 上时, 过点 A 作 $AH \perp DE$, 垂足为点 H .

由 AH 过圆心 A , $AH \perp DE$, 可得 $DH = \frac{1}{4}a$.

在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中, 由勾股定理得 $AH = \frac{\sqrt{15}}{4}a$.

$$\therefore \tan \angle ADE = \frac{AH}{DH} = \sqrt{15}.$$

2°当点 D 、 E 分别在 $\widehat{AB}$ 、 $\widehat{AC}$ 上时, 联结 CD 、 BE 交于点 G .

$$\because DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC, \therefore \frac{DG}{GC} = \frac{EG}{GB} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore DG = EG = \frac{1}{3}a, GB = GC = \frac{2}{3}a.$$

联结 AG 并延长, 分别交 DE 、 BC 于点 P 、 Q .

$$\because AB = AC, GB = GC, \therefore AQ \perp BC, BQ = \frac{1}{2}a.$$

$$\because DE \parallel BC, \therefore AP \perp DE. \because DG = EG, \therefore DP = \frac{1}{4}a.$$

$$\therefore GQ = \frac{\sqrt{7}}{6}a, PG = \frac{\sqrt{7}}{12}a. \text{ 可得 } AP = AQ - PG - GQ = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{7}}{4}a.$$

在 $\text{Rt}\triangle ADP$ 中, $\tan \angle ADE = \frac{AP}{DP} = 2\sqrt{3} - \sqrt{7}$.

(3) 分别取边 AB 、 AC 、 BC 的中点 P 、 Q 、 O .

点 F 的轨迹为以点 O 为圆心, $\frac{1}{2}a$ 为半径, 圆心角为 60° 的一段弧 $\widehat{PQ}$.

说理如下 (不作为评分要求):

联结 BN 、 CM , 记 BN 、 CM 的交点为 I .

由 $\widehat{AM} = \widehat{CN}$, $\therefore \angle ACM = \angle NBC$.

$$\therefore \angle BIM = \angle BCM + \angle NBC = \angle BCM + \angle ACM = \angle ACB = 60^\circ.$$

联结 BM , 记 BM 的中点为 S , 分别联结 SO 、 OF 、 SF .

可得 $\angle OSF = 60^\circ$, $SO = SF = \frac{1}{2}a$. 所以 $\triangle SOF$ 是等边三角形, 且 $OF = \frac{1}{2}a$.

$\therefore$ 当点 M 与点 A 重合时, 则点 N 与点 C 重合, 点 F 与 AC 中点 Q 重合,

当点 M 与点 B 重合时, 则点 N 与点 A 重合, 点 F 与 AB 中点 P 重合,

联结 OP 、 OQ , 可得 $OP = OQ = \frac{1}{2}a$, $\angle POQ = 60^\circ$.

$\therefore$ 点 F 的轨迹为以点 O 为圆心, $\frac{1}{2}a$ 为半径, 圆心角为 60° 的一段弧 $\widehat{PQ}$.

