

2025 年上海市徐汇区中考二模数学试卷

(时间 100 分钟 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题; 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的】

1. 下列运算中, 计算正确的是 ()

- A. $a^2 + a^3 = a^5$ B. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ C. $(a^2)^3 = a^5$ D. $(ab)^2 = a^2b^2$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了合并同类项, 同底数幂乘法、幂的乘方、积的乘方, 掌握相关运算法则是解题关键. 根据合并同类项, 同底数幂乘法、幂的乘方、积的乘方逐项计算即可.

【详解】解: A、 a^2 和 a^3 不是同类项, 不能合并, 原计算错误, 不符合题意;

B、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$, 原计算错误, 不符合题意;

C、 $(a^2)^3 = a^6$, 原计算错误, 不符合题意;

D、 $(ab)^2 = a^2b^2$, 原计算正确, 符合题意;

故选: D.

2. 将抛物线 $y = 2x^2 - 1$ 向左平移 2 个单位, 再向上平移 2 个单位后所得抛物线的表达式是 ()

- A. $y = 2(x - 2)^2 + 1$ B. $y = 2(x - 2)^2 - 3$
C. $y = 2(x + 2)^2 + 1$ D. $y = 2(x + 2)^2 - 3$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数图象与几何变换. 根据“左加右减, 上加下减”的平移规律求解即可.

【详解】解: 把抛物线 $y = 2x^2 - 1$ 向左平移 2 个单位, 再向上平移 2 个单位得到抛物线 $y = 2(x + 2)^2 - 1 + 2$

即 $y = 2(x + 2)^2 + 1$ 的图象,

故选：C.

3. 已知正比例函数 $y = kx (k \neq 0)$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象交于 A, B 两点, 如果点 A 的坐标是 $(1, 1)$, 那么点 B 的坐标是 ()

- A. $(-1, -1)$ B. $(-1, 1)$ C. $(1, -1)$ D. $(1, 1)$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查一次函数与反比例函数的综合. 根据正比例函数与反比例函数图像的中心对称性, 可得 A, B 关于原点中心对称, 进而即可求解.

【详解】解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象与正比例函数 $y = kx (k \neq 0)$ 的图象相交于 A, B 两点,

$\therefore A, B$ 关于原点中心对称,

$\because$ 点 A 的坐标是 $(1, 1)$,

$\therefore$ 点 B 的坐标是 $(-1, -1)$.

故选：A.

4. 下列调查中, 最适宜采用普查方式的是 ()

- A. 对我国初中学生视力状况的调查
B. 对量子科学通信卫星上某种零部件的调查
C. 对一批节能灯管使用寿命的调查
D. 对“最强大脑”节目收视率的调查

【答案】B

【解析】

【详解】试题分析: A. 对我国初中学生视力状况的调查, 人数太多, 调查的工作量大, 适合抽样调查, 故此选项错误;

B. 对量子科学通信卫星上某种零部件的调查, 关系到量子科学通信卫星的运行安全, 必须全面调查, 故此选项正确;

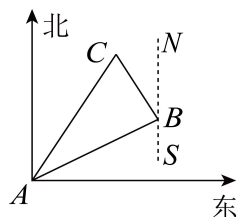
C. 对一批节能灯管使用寿命的调查具有破坏性, 适合抽样调查, 故此选项错误;

D. 对“最强大脑”节目收视率的调查, 人数较多, 不便测量, 应当采用抽样调查, 故本选项错误;

故选 B.

考点: 全面调查与抽样调查.

5. 一次游学活动中, 小杰从营地 A 出发, 沿北偏东 60° 方向走了 $500\sqrt{3}$ 米到达 B 处, 然后再沿北偏西 30° 方向走了 500 米到达目的地 C 处 (如图所示), 那么 A, C 两地的距离是 ()



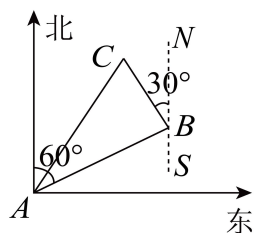
- A. $1000\sqrt{3}$ 米 B. 1500 米 C. $500\sqrt{6}$ 米 D. 1000 米

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形的应用 - 方向角问题, 平行线的性质, 平角的定义等知识. 作出辅助线求出 $\angle ABC$ 为 90° 是解题的关键. 过 B 点作直线 $NS \parallel AD$, 根据平行线的性质, 平角的定义, 勾股定理即可得到结论;

【详解】 解: 如图, 过 B 点作直线 $NS \parallel AD$,



$$\therefore \angle DAB = \angle ABS = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle NBC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle ABS - \angle NBC = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

$$\therefore AB = 500\sqrt{3}\text{m}, \quad BC = 500\text{m},$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 1000(\text{m}),$$

故选: D.

6. 某校组织学生步行到科技展览馆参观, 学校与展览馆相距 6 千米, 返回时由于步行速度比去时每小时少 1 千米, 结果时间比去时多用了半小时, 那么学生返回时步行速度是 ()

- A. 2 千米 / 小时 B. 3 千米 / 小时 C. 4 千米 / 小时 D. 5 千米 / 小时

【答案】 B

【解析】

【分析】本题考查了分式方程的应用. 设学生返回时步行的速度为 x 千米/小时, 则去时步行的速度为 $(x+1)$ 千米/小时, 根据时间=路程÷速度结合返回时比去时多用了半小时, 即可得出关于 x 的分式方程, 解之经检验后即可得出结论.

【详解】解: 设学生返回时步行的速度为 x 千米/小时, 则去时步行的速度为 $(x+1)$ 千米/小时,

依题意, 得: $\frac{6}{x} - \frac{6}{x+1} = \frac{1}{2}$,

整理, 得: $x^2 + x - 12 = 0$,

解得: $x_1 = 3$, $x_2 = -4$,

经检验, $x_1 = 3$, $x_2 = -4$ 是原方程的解, $x_1 = 3$ 符合题意, $x_2 = -4$ 不符合题意, 舍去.

答: 学生返回时步行的速度为 3 千米/小时.

故选: B.

二、填空题(本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 方程 $\sqrt{x+1} = 3$ 的解的是 $x =$ _____.

【答案】 $x = 8$

【解析】

【分析】把方程两边平方去根号后即可转化成整式方程, 解方程即可求出 x 的值, 然后进行检验.

【详解】两边平方得: $x+1=9$,

解得: $x=8$.

检验: $x=8$ 是方程的解.

故答案为 $x=8$.

【点睛】本题考查的知识点是平方根的定义, 解题的关键是熟练掌握平方根.

8. 函数 $y = -\frac{2}{x+3}$ 的定义域是 _____.

【答案】 $x \neq -3$

【解析】

【分析】本题主要考查函数的定义域及分式有意义的条件, 根据分式有意义的条件即可得出函数的定义域.

【详解】解: 由 $x+3 \neq 0$ 得 $x \neq -3$,

故答案为: $x \neq -3$.

9. 方程组 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$ 的解是 _____.

【答案】 $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-6 \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查解二元二次方程组，代入消元法. 将方程组先转化为 $\begin{cases} x+y=0 \\ x-2y=6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-y=0 \\ x-2y=6 \end{cases}$ ，再进行求解即可.

【详解】 解: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \text{①} \\ x - 2y = 6 \text{②} \end{cases}$,

由①得: $(x+y)(x-y)=0$,

$\therefore x+y=0$ 或 $x-y=0$,

$\therefore \begin{cases} x+y=0 \\ x-2y=6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-y=0 \\ x-2y=6 \end{cases}$,

$\therefore$ 方程组的解为: $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-6 \end{cases}$;

故答案为: $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-6 \end{cases}$.

10. 如果关于 x 的方程 $x^2 - x - m = 0$ 有两个实数根，那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \geq -\frac{1}{4}$ 或 $m \geq -0.25$

【解析】

【分析】 本题考查了二次方程根的判别式，解一元一次方程，熟练掌握以上知识点是解答本题的关键. 根据判别式的意义得到 $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-m) = 1 + 4m \geq 0$ ，然后解关于 m 的不等式即可.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - x - m = 0$ 有两个实数根,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-m) = 1 + 4m \geq 0$,

解得: $m \geq -\frac{1}{4}$,

故答案为: $m \geq -\frac{1}{4}$.

11. 若抛物线 $y = mx^2 - 4mx + 1$ 在直线 $x = 2$ 右侧部分是下降的，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < 0$

【解析】

【分析】本题考查了二次函数图像与系数的关系，掌握二次函数的性质是解题的关键。根据题目中的函数解析式和二次函数的性质确定 m 的取值范围即可。

【详解】解：∵ 抛物线 $y = mx^2 - 4mx + 1 = m(x-2)^2 + 1 - m^2$ ，对称轴为直线 $x = 2$ ，在直线 $x = 2$ 右侧部分是下降的，

∴ 该函数的开口向下，

∴ $m < 0$ ，

故答案为： $m < 0$ 。

12. 如果抛物线 $y = x^2 - 3x + 2$ 上的点 $A(-1, 6)$ 和 B 关于它的对称轴对称，那么点 B 的坐标是_____。

【答案】 $(4, 6)$

【解析】

【分析】本题考查了二次函数图象与几何变换，解题的关键是了解对称点的性质。

首先确定抛物线的对称轴，然后根据对称点的性质解题即可。

【详解】解：∵ $y = x^2 - 3x + 2$ 的对称轴为 $x = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$ ，

∴ 点 $A(-1, 6)$ 关于该抛物线的对称轴对称点 B 的坐标为 $(4, 6)$ 。

故答案为： $(4, 6)$ 。

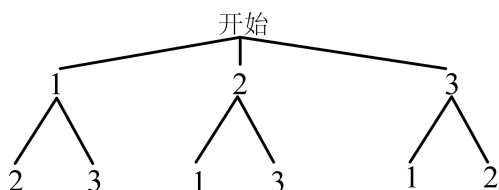
13. 三张外观相同的卡片分别标有数字1，2，3，从中随机一次抽出两张，这两张卡片上的数字恰好都小于3的概率是_____。

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与两张卡片上的数字恰好都是小于3的情况数，再利用概率公式即可求出答案。

【详解】画树状图得：



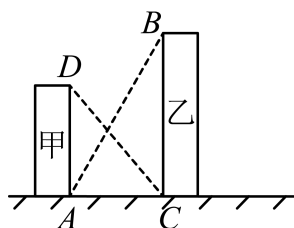
因为一共六种等可能的结果，而两张卡片上的数字恰好都是小于3的有两种情况，

所以两张卡片上的数字恰好都是小于 3 的概率为 $P = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{3}$.

故答案为: $\frac{1}{3}$

【点睛】 本题考查了利用树状图或者列表法求出概率，解题的关键是要注意是否有放回，用到的知识点是：概率=所求情况和总情况的比.

14. 如图，甲、乙两楼的楼间距 AC 为 10 米，小杰在甲楼楼底 A 处测得乙楼楼顶 B 的仰角为 60° ，在乙楼楼底 C 处测得甲楼楼顶 D 的仰角为 45° ，那么乙楼比甲楼高_____米 (结果保留根号).



【答案】 $(10\sqrt{3}-10)$ ## $(-10+10\sqrt{3})$

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形的应用. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中，利用三角函数的定义分别求得 BC 和 AD 的长，据此计算即可求解.

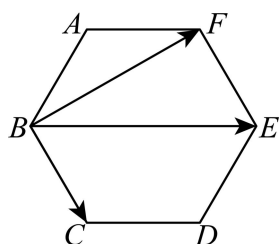
【详解】 解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $BC = AC \cdot \tan 60^\circ = 10\sqrt{3}$ 米.

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中， $AD = AC \cdot \tan 45^\circ = 10$ 米，

$\therefore BC - AD = (10\sqrt{3} - 10)$ 米.

故答案为: $(10\sqrt{3} - 10)$.

15. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 中， $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ， $BE = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{BF} =$ _____ (用含 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的式子表示).



【答案】 $\vec{b} - \vec{a}$ ## $-\vec{a} + \vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查平面向量，正六边形的性质等知识，解题的关键是熟练掌握三角形法则.

首先得出 $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ，然后根据三角形法则求解即可.

【详解】 $\because$ 正六边形 $ABCDEF$ 中,

$$\therefore BC = FE, \quad BC \parallel FE$$

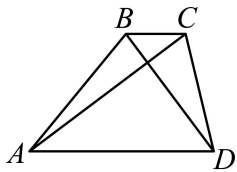
$$\therefore \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BC} = \vec{a}$$

$$\because BE = b$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{FE} = \vec{b} - \vec{a}.$$

故答案为: $\vec{b} - \vec{a}$.

16. 如图, 梯形 $ABCD$ 中, $BC \parallel AD$, $AC \perp BD$, $AC = 4$, $BD = 3$, 那么 $\sin \angle BDA$ 的值是_____.

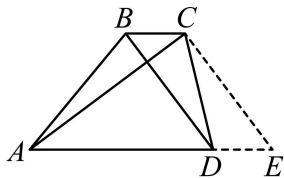


【答案】 $\frac{4}{5}$ ## 0.8

【解析】

【分析】 本题考查的是梯形性质、解直角三角形、平行四边形的判定和性质. 过点 C 作 $CE \parallel BD$, 交 AD 的延长线于 E , 根据平行四边形的性质求出 CE , 根据勾股定理求出 AE , 再根据正弦的定义计算即可.

【详解】 解: 如图, 过点 C 作 $CE \parallel BD$, 交 AD 的延长线于 E ,



则 $\angle BDA = \angle CEA$,

$$\because AC \perp BD, \quad CE \parallel BD,$$

$$\therefore AC \perp CE,$$

$$\therefore \angle ACE = 90^\circ,$$

$$\because BC \parallel AD, \quad CE \parallel BD,$$

$\therefore$ 四边形 $BDEC$ 为平行四边形,

$$\therefore CE = BD = 3,$$

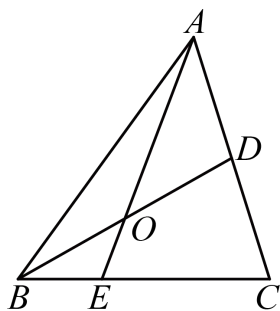
由勾股定理得: $AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$,

$$\therefore \sin \angle CEA = \frac{AC}{AE} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \sin \angle BDA = \frac{4}{5},$$

故答案为: $\frac{4}{5}$.

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是边 AC 的中点, 点 E 在边 BC 上, $CE = 2BE$, AE 和 BD 交于点 O , 那么 $\triangle BOE$ 和四边形 $OECD$ 的面积比是_____.

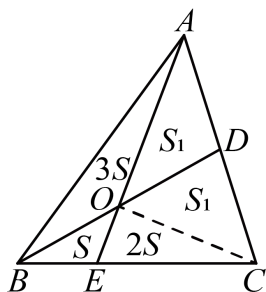


【答案】 1:5

【解析】

【分析】 本题考查三角形的面积. 连接 OC , 设 $S_{\triangle BOE} = S$, $S_{\triangle COD} = S_1$, 根据“同高的两个三角形, 其面积比等于底边长之比”将各三角形的面积用含 S 的代数式表示出来, 从而求出 $\triangle BOE$ 和四边形 $OECD$ 的面积比即可.

【详解】 解: 如图, 连接 OC .



$$\text{设 } S_{\triangle BOE} = S, \quad S_{\triangle COD} = S_1,$$

$$\because CE = 2BE, \text{ 点 } D \text{ 是边 } AC \text{ 的中点,}$$

$$\therefore S_{\triangle COE} = 2S, \quad S_{\triangle AOD} = S_1,$$

$$\because S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BCD},$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} + S_1 = 3S + S_1,$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = 3S,$$

$$\because S_{\triangle ABE} : S_{\triangle ACE} = 1:2, \text{ 即 } (3S + S) : (2S_1 + 2S) = 1:2,$$

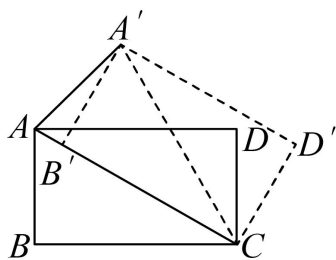
$$\therefore S_1 = 3S,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}OECD} = 2S + S_1 = 2S + 3S = 5S,$$

$$\therefore S_{\triangle BOE} : S_{\text{四边形}OECD} = S : 5S = 1 : 5.$$

故答案为: 1:5.

18. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $BC = 2$, 将矩形 $ABCD$ 绕着点 C 顺时针旋转得矩形 $A'B'CD'$, $B'C$ 恰好落在对角线 AC 上, 连接 $A'A$, 如果 $A'C$ 与边 AD 相交, 且 $\angle A'CB = \angle A'AC$, 那么 AC 的长是_____.

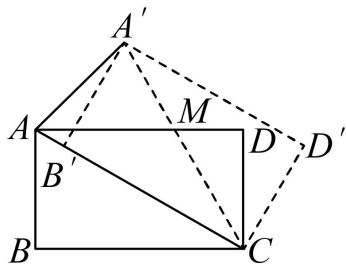


【答案】 $2\sqrt{5} - 2$ 或 $-2 + 2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了旋转的性质, 矩形的性质, 全等三角形的判定和性质, 勾股定理, 公式法解一元二次方程. 先证明 $\triangle CMD \cong \triangle A'AB'$, 推出 $AB' = DM$, 设 $AB' = DM = x$, 由勾股定理得 $AB^2 = (2+x)^2 - 2^2$, $CD^2 = (2-x)^2 - x^2$, 根据 $AB = CD$, 列式计算即可求解.

【详解】 解: 设 $\angle ACB = \alpha$, 记 $A'C$ 和 AD 相交于点 M ,



$\therefore$ 矩形 $ABCD$,

$$\therefore AD = BC = 2, \quad AB = CD, \quad AD \parallel CB,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ACB = \alpha,$$

由旋转的性质得 $\angle A'CB' = \angle ACB = \alpha$, $A'B' = CD$,

$$\therefore \angle MAC = \angle MCA = \alpha,$$

$$\therefore AM = CM, \quad \angle CMD = 2\alpha,$$

$$\because \angle A'CB = \angle A'AC,$$

$$\therefore \angle A'CB = \angle A'AC = 2\alpha,$$

$$\therefore \angle CMD = \angle A'AB' = 2\alpha,$$

$$\because \angle CDM = \angle A'B'A = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CMD \cong \triangle A'AB',$$

$$\therefore AB' = DM,$$

$$\text{设 } AB' = DM = x,$$

$$\therefore AM = CM = 2 - x, \quad AC = AB' + B'C = 2 + x,$$

$$\text{由勾股定理得 } AB^2 = AC^2 - BC^2 = (2+x)^2 - 2^2, \quad CD^2 = CM^2 - DM^2 = (2-x)^2 - x^2,$$

$$\therefore AB = CD,$$

$$\therefore (2+x)^2 - 2^2 = (2-x)^2 - x^2,$$

$$\text{解得 } b = -4 \pm 2\sqrt{5},$$

$$\therefore AC = 2 - 4 + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 2.$$

$$\text{故答案为: } 2\sqrt{5} - 2.$$

三、(本大题共 7 题, 第 19-22 题每题 10 分;第 23、24 题每题 12 分;第 25 题 14 分;满分 78 分)

19. 先化简, 再求值: $\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \div \frac{x+1}{x^2-2x+1}$, 其中 $x = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

【答案】 $x-1, \sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了分式的化简求值, 分母有理化. 原式括号中两项通分并利用同分母分式的减法法则计算, 同时利用除法法则变形, 约分得到最简结果, 把 x 的值代入计算即可求出值.

【详解】 解: $\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \div \frac{x+1}{x^2-2x+1}$

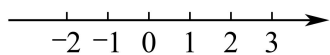
$$= \left(\frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1}\right) \div \frac{x+1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)^2}{x+1}$$

$$= x-1,$$

当 $x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1$ 时, 原式 $= \sqrt{2}+1-1 = \sqrt{2}$.

20. 解不等式组: $\begin{cases} 2(x-3)+x \leq 3, \\ \frac{x+5}{3} < \frac{x}{2}+2, \end{cases}$ 并在数轴上把解集表示出来.



【答案】 $-2 < x \leq 3$, 解集在数轴上表示见解析

【解析】

【分析】 分别求出每个不等式的解集, 再求两个解集的公共部分, 然后把解集在数轴上表示出来即可.

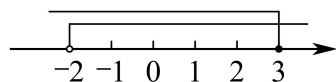
【详解】 解: $\begin{cases} 2(x-3)+x \leq 3 \text{ ①} \\ \frac{x+5}{3} < \frac{x}{2}+2 \text{ ②} \end{cases}$

解不等式①得: $x \leq 3$

解不等式②得: $x > -2$

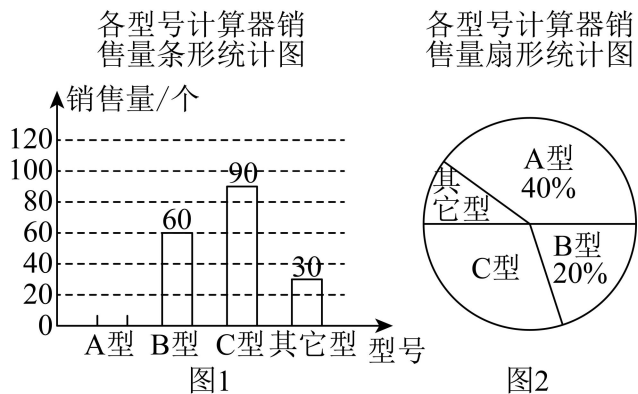
故不等式组的解集为: $-2 < x \leq 3$

解集在数轴上表示出来如下:



【点睛】 本题考查了解一元一次不等式组及在数轴上表示不等式组的解集, 关键正确求出每个不等式的解集.

21. 某文具商店为了了解3月份计算器的销售情况, 对3月份各种型号计算器的销售情况进行调查, 并将调查的结果绘制成如图1、图2所示的两幅不完整的统计图.



(1) 根据图中提供的信息, 求3月份各种型号计算器的销售总量;

(2) 求3月份A型计算器的销售量, 并将条形统计图补充完整;

(3) 该店 4 月份准备只购进 A、B、C 三种型号的计算器，总数量和 3 月份各型号计算器销售的总量相同，结果恰好用完进货款 8200 元，设购进 A 型计算器 x 个、B 型计算器 y 个，求 y 关于 x 的函数关系式. 其中，三种型号的计算器的进价如下表：

	A 型	B 型	C 型
进价（单位：元 / 个）	50	30	20

【答案】(1) 3 月份各种型号计算器的销售总量为 300 个

(2) A 型计算器销售量为 120 个，图形见解析

(3) y 关于 x 的函数关系式为 $y = 220 - 3x$

【解析】

【分析】 本题考查了统计图和一次函数，解决本题的关键是利用一次函数的性质解决实际问题.

(1) 根据条形统计图 B 型的销售量和扇形统计图 B 型计算器所占百分比求出 3 月份各种型号计算器的销售总量；

(2) 根据 A 型计算器所占的百分比计算 A 型计算器的数量，即可补充条形图；

(3) 根据设购进 A 型计算器 x 只，B 型计算器 y 只，则 C 型计算器为 $(300 - x - y)$ 只，根据其数量和与 3 月份计算器销量的总数量相同，结果恰好用完进化款共 8200 元，得到 $50x + 30y + 20(300 - x - y) = 8200$ ，整理即可.

【小问 1 详解】

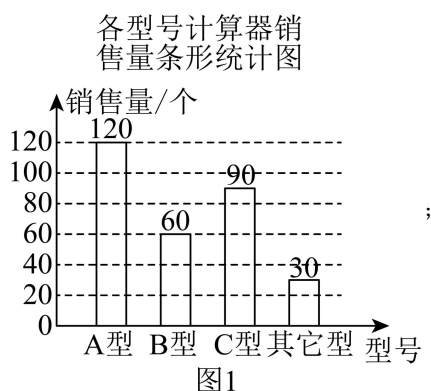
解： $60 \div 20\% = 300$ (个)，

$\therefore$ 3 月份各种型号计算器的销售总量为 300 个；

【小问 2 详解】

解： A 型计算器销售量为： $300 \times 40\% = 120$ (个)，

条形统计图如图：



【小问3详解】

解：∵ 设购进 A 型计算器 x 只，B 型计算器 y 只，

∴ C 型计算器为 $(300 - x - y)$ 只，

根据其数量和与 3 份计算器销量的总数量相同，结果恰好用完进化款共 8200 元，

$$\therefore 50x + 30y + 20(300 - x - y) = 8200,$$

整理得： $y = 220 - 3x$ ，

∴ y 关于 x 的函数关系式为 $y = 220 - 3x$ 。

22. “数学探究小组”研究如下问题：如图 1，点 M 是矩形 $ABCD$ 内一点，求作一个四边形，使得四边形的四边分别等于 AM 、 BM 、 CM 、 DM ，并且两条对角线互相垂直。

小组成员小杰提出了如下的作法：1. 过点 M 作 $MN \parallel AB$ 并截取 $MN = AB$ ；2. 分别连接 BN 、 CN 。那么四边形 $MBNC$ 就是所求作的四边形。

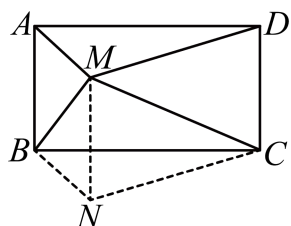


图1

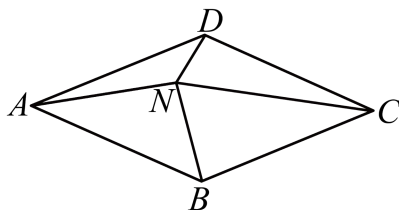


图2

(1) 请判断小杰的作法是否正确，并说明理由；

(2) 如图 2，点 N 是菱形 $ABCD$ 内一点，请根据上述信息提出一个类似问题，并予以解决（只需写出作法或画出图形、结论，不必说明理由）。

【答案】(1) 小杰的作法正确，理由见解析；

(2) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查了矩形和菱形的性质，平行四边形的判定和性质，三角形外角的性质，掌握特殊四边形

的判定和性质是解题关键.

(1) 根据矩形的性质证明四边形 $ABNM$ 和四边形 $CDMN$ 都是平行四边形, 即可得到答案;

(2) 先根据 (1) 提出类似问题, 再过点 N 作 $EF \parallel AB$ 分别交 AD 、 BC 于点 E 、 F , 并截取 $NG = AB$;

2. 分别连接 BG 、 CG . 利用平行四边形的判定和性质, 即可证明四边形 $NBGC$ 就是所求作的四边形.

【小问 1 详解】

解: 小杰的作法正确, 理由如下:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AB \parallel CD$, $AB = CD$, $\angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore AB \perp BC$,

$\because MN \parallel AB$, $MN = AB$,

$\therefore AB \parallel CD \parallel MN$, $AB = MN = CD$, $MN \perp BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABNM$ 和四边形 $CDMN$ 都是平行四边形,

$\therefore AM = BN$, $DM = CN$,

$\therefore$ 四边形 $MBNC$ 就是所求作的四边形.

【小问 2 详解】

解: 如图 2, 点 N 是菱形 $ABCD$ 内一点, 求作一个四边形, 使得四边形的四边分别等于 AN 、 BN 、 CN 、 DN , 并且两条对角线的夹角度数等于菱形的一个内角度数.

作法: 1. 过点 N 作 $EF \parallel AB$ 分别交 AD 、 BC 于点 E 、 F , 并截取 $NG = AB$; 2. 分别连接 BG 、 CG . 那么四边形 $NBGC$ 就是所求作的四边形.

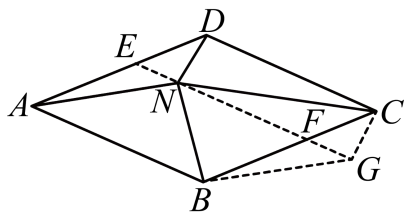


图2

理由如下: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AB \parallel CD$, $AB = CD$,

$\therefore \angle DAB + \angle ABC = \angle DAN + \angle NAB + \angle ABC = 180^\circ$,

$\because EF \parallel AB$, $NG = AB$,

$\therefore AB \parallel EF \parallel MN$, $AB = NG = CD$,

$\therefore$ 四边形 $ABGN$ 和四边形 $CDNG$ 都是平行四边形,

$\therefore AN = BG$, $DN = CG$, $AN \parallel BG$, $\angle BAN = \angle BGN$,

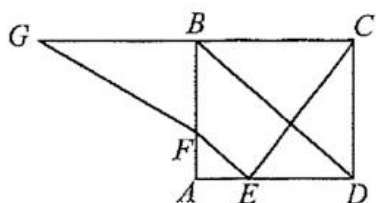
$$\therefore \angle NAB + \angle ABG = \angle NAB + \angle ABC + \angle CBG = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DAN = \angle CBG,$$

$$\therefore \angle NFB = \angle CBG + \angle BGN = \angle DAN + \angle BAN = \angle DAB,$$

$\therefore$ 四边形 $NBGC$ 就是所求作的四边形.

23. 如图, BD 是正方形 $ABCD$ 的对角线, 点 E 、 F 分别在边 AD 、 AB 上, $EF \parallel BD$, 延长 CB 到 G , 且 $BG = BC$, 连接 GF 、 CE .



(1) 求证: $GF = CE$;

(2) 延长 GF 交 CE 于点 H , 连接 BH , 求证: $2BH^2 = GH \cdot GF$.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 先由正方形的性质结合平行线分线段成比例得到 $BF = DE$, 然后证明 $\triangle FBG \cong \triangle EDC$ (SAS) 即可;

(2) 由 $\triangle FBG \cong \triangle EDC$, 得到 $\angle 1 = \angle 2$, 证明 $\angle GHC = 90^\circ$, 由直角三角形斜边上中线的性质得到 $BH = BG = \frac{1}{2}GC$, 证明 $\triangle GBF \sim \triangle GHC$, 则 $\frac{GB}{GH} = \frac{GF}{GC}$, 那么 $\frac{BH}{GH} = \frac{GF}{2BH}$, 再交叉相乘即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = AD = BC = CD, \angle ABC = \angle ADC = \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\because EF \parallel BD,$$

$$\therefore \frac{BF}{BA} = \frac{DE}{AD},$$

$$\therefore BF = DE,$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FBG = 180^\circ - \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FBG = \angle EDC,$$

$$\because BG = BC, BC = CD,$$

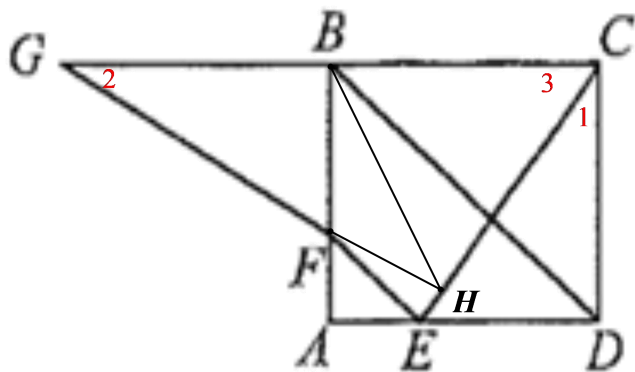
$$\therefore BG = CD,$$

$$\therefore \triangle FBG \cong \triangle EDC \text{ (SAS)},$$

$$\therefore GF = CE;$$

【小问 2 详解】

证明：如图：



$$\because \triangle FBG \cong \triangle EDC,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\because \angle BCD = 90^\circ$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GHC = 90^\circ,$$

$$\because BG = BC,$$

$$\therefore BH = BG = \frac{1}{2}GC,$$

$$\because \angle FBG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FBG = \angle CHG = 90^\circ$$

$$\because \angle 2 = \angle 2,$$

$$\therefore \triangle GBF \sim \triangle GHC,$$

$$\therefore \frac{GB}{GH} = \frac{GF}{GC},$$

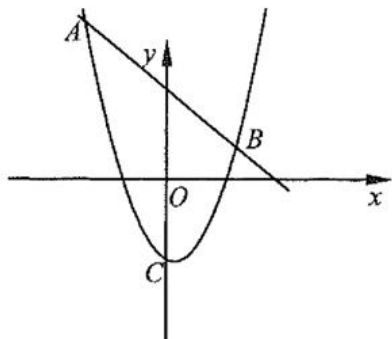
$$\therefore \frac{BH}{GH} = \frac{GF}{2BH},$$

$$\therefore 2BH^2 = GH \cdot GF.$$

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定与性质，正方形的性质，全等三角形的判定与性质，直角三角形的

性质等知识点，找出相似三角形是解题的关键.

24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx - 2$ 与 y 轴交于点 C ，与直线 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ 交于点 $A(-2, n)$ 和 $B(m, 1)$.



- (1) 求抛物线的表达式；
- (2) 已知点 D 在 y 轴上，当以点 A 、 B 、 O 、 D 为顶点的四边形是矩形时，求点 D 到直线 AC 的距离；
- (3) 设直线 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ 与 x 轴交于点 E ，已知点 P 、 Q 在直线 CE 上且在直线 AB 的下方（点 P 在点 Q 的右侧），如果 $PQ = \sqrt{34}$ ， $BQ = AP$ ，求点 P 、 Q 的坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{9}{8}x^2 - \frac{3}{4}x - 2$;

(2) 点 D 到 AC 的距离为 $\frac{7\sqrt{10}}{10}$;

(3) $P\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $Q\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$.

【解析】

【分析】 (1) 先求出 A 和 B 坐标，再代入抛物线求解即可；

(2) 利用矩形对角线相等求出 $OD = AB = 5$ ，所以 $D(0, 5)$ ，再求出 C 点坐标，进而利用 $\triangle ACD$ 的面积建立方程求解即可；

(3) 先求出直线 CE 的解析式，再设出 P 和 Q 坐标，利用两点距离公式表示出 PQ 、 BQ 、 AP ，建立方程求解即可.

【小问 1 详解】

解：将 $A(-2, n)$ 代入 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ 得， $n = 4$ ，

将 $B(m, 1)$ 代入 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ 得， $m = 2$ ，

$$\therefore A(-2,4), B(2,1),$$

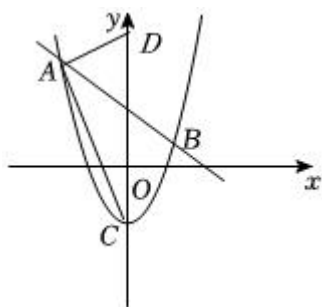
将 A 、 B 代入抛物线 $y = ax^2 + bx - 2$ 得,

$$\begin{cases} 4a - 2b - 2 = 4 \\ 4a + 2b - 2 = 1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = \frac{9}{8} \\ b = -\frac{3}{4} \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线表达式为 } y = \frac{9}{8}x^2 - \frac{3}{4}x - 2;$$

【小问 2 详解】

解: 如图,



$$\therefore A(-2,4), B(2,1),$$

$$\therefore AB \text{ 中点坐标为 } \left(0, \frac{3}{2}\right),$$

AB 被 y 轴平分,

$\therefore AB$ 为对角线,

$$\therefore OD = AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (4-1)^2} = 5,$$

$$\therefore D(0,5),$$

由 $y = \frac{9}{8}x^2 - \frac{3}{4}x - 2$ 可知, 当 $x = 0$ 时, $y = -2$,

$$\therefore C(0,-2),$$

$$\therefore AC = \sqrt{(-2-0)^2 + (4+2)^2} = 2\sqrt{10}, \quad CD = 7,$$

设点 D 到 AC 的距离为 h ,

$$\text{则 } S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}CD \cdot |x_A| = \frac{1}{2}AC \cdot h,$$

$$\therefore h = \frac{CD \cdot |x_A|}{AC} = \frac{7 \times 2}{2\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{10},$$

即点 D 到 AC 的距离为 $\frac{7\sqrt{10}}{10}$;

【小问 3 详解】

解: $\because$ 直线 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ 与 x 轴交于点 E ,

$$\therefore \text{当 } y = 0 \text{ 时, } x = \frac{10}{3}, \text{ 即 } E\left(\frac{10}{3}, 0\right),$$

设直线 CE 的表达式为 $y = kx + b'$,

$$\therefore \begin{cases} \frac{10}{3}k + b' = 0 \\ b' = -2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = \frac{3}{5} \\ b' = -2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } CE \text{ 的表达式为 } y = \frac{3}{5}x - 2,$$

设 $P\left(m, \frac{3}{5}m - 2\right)$, $Q\left(n, \frac{3}{5}n - 2\right)$, 且 $m > n$,

$$\therefore PQ = \sqrt{34},$$

$$\therefore PQ^2 = (m - n)^2 + \left(\frac{3}{5}m - 2 - \frac{3}{5}n + 2\right)^2 = 34,$$

$$\text{整理得 } \frac{34}{25}(m - n)^2 = 34,$$

$$\therefore (m - n)^2 = 25,$$

$$\therefore m > n,$$

$$\therefore m - n = 5,$$

$$\text{即 } m = 5 + n,$$

$$\therefore BQ = AP,$$

$$\therefore BQ^2 = AP^2, \text{ 即 } (n - 2)^2 + \left(\frac{3}{5}n - 2 - 1\right)^2 = (m + 2)^2 + \left(\frac{3}{5}m - 6\right)^2,$$

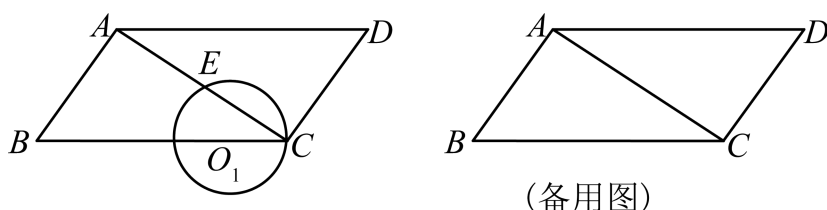
$$\text{将 } m = 5 + n \text{ 代入上式得 } n = -\frac{5}{2},$$

$$\therefore m = \frac{5}{2},$$

$$\therefore P\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right), Q\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right).$$

【点睛】 本题主要考查了求二次函数解析式、二次函数与坐标轴交点问题、矩形的性质、两点距离公式、一次函数点的坐标特征等内容，熟练掌握相关知识是解题的关键.

25. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AC \perp AB$, $AB = 6$, $BC = 10$, 点 O_1 是边 BC 上的动点, 以点 O_1 为圆心, O_1C 为半径的圆交边 AC 于点 E . 设 $O_1C = r$.



(1) 当点 E 是边 AC 的中点时, 求 r 的值;

(2) 已知点 O_2 是线段 AE 的中点 (规定: 当点 E 与点 A 重合时, 点 O_2 也与点 A 重合), 以点 O_2 为圆心、 O_1O_2 为半径作 $\odot O_2$

①当 $\odot O_2$ 与边 AD 有公共点时, 求 r 的取值范围;

②如果 $\odot O_2$ 经过边 AD 的中点, 求此时 $\odot O_2$ 与 $\odot O_1$ 的公共弦长.

【答案】 (1) $r = \frac{5}{2}$

(2) ① $0 < r \leq 5$; ② $5\sqrt{3}$

【解析】

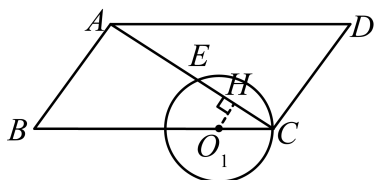
【分析】 (1) 过 O_1 作 $O_1H \perp AC$ 于点 H , 由垂径定理可得 $CH = EH = \frac{1}{4}AC = 2$, 再利用三角函数求解即可;

(2) ①当点 E 与 A 重合时可知 $r = 5$, 过 O_2 作 $O_2M \perp AD$ 于点 M , 求出 $O_2M = \frac{3}{5}O_2A$, 可知在点 O_1 运动过程中, $\odot O_2$ 与边 AD 始终有公共点, 进而即可得出 r 的范围;

②利用 $O_2F = O_1O_2$ 建立方程求解, 得到 $r = 5$, 即此时 O_2 与 A 重合, 进而即可得解.

【小问 1 详解】

如图, 过 O_1 作 $O_1H \perp AC$ 于点 H , 则 $EH = CH$,



$\because AC \perp AB, AB = 6, BC = 10,$

$\therefore AC = 8,$

$\because E$ 为 AC 中点,

$\therefore CE = \frac{1}{2}AC = 4,$

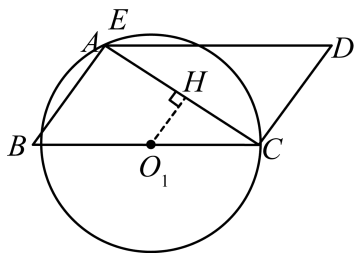
$\therefore CH = \frac{1}{2}CE = 2,$

$\therefore \cos \angle ACB = \frac{CH}{O_1C} = \frac{AC}{BC},$ 即 $\frac{2}{r} = \frac{8}{10},$

解得 $r = \frac{5}{2};$

【小问 2 详解】

①当点 E 与点 A 重合时,



此时 O_2 与 A 重合, $CH = EH = \frac{1}{2}AC,$

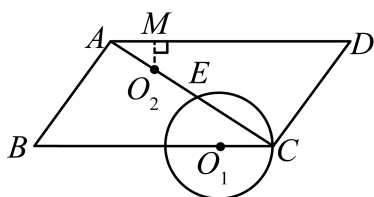
$\therefore \angle O_1CH = \angle BCA, \angle CHO_1 = \angle CAB = 90^\circ,$

$\therefore \triangle O_1CH \sim \triangle BCA,$

$\therefore \frac{O_1C}{BC} = \frac{CH}{AC} = \frac{1}{2},$

$\therefore O_1C = 5,$ 即此时 $r = 5,$

过 O_2 作 $O_2M \perp AD$ 于点 $M,$



$$\therefore \sin \angle MAO_2 = \sin \angle ACB,$$

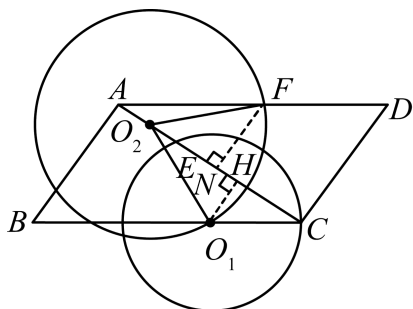
$$\therefore \frac{O_2M}{O_2A} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore O_2M = \frac{3}{5}O_2A,$$

$\therefore$ 在点 O_1 运动过程中, $\odot O_2$ 与边 AD 始终有公共点,

$$\therefore 0 < r \leq 5;$$

②如图, 记 AD 中点为 F , 过 F 作 $FN \perp AC$, 过 O_1 作 $O_1H \perp AC$ 于点 H ,



$$\therefore \angle ANF = \angle ACD = 90^\circ, \angle NAF = \angle CAD,$$

$$\therefore \triangle NAF \sim \triangle CAD,$$

$$\therefore \frac{FN}{CD} = \frac{AN}{AC} = \frac{AF}{AD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore FN = \frac{1}{2}CD = 3, \quad AN = \frac{1}{2}AC = 4,$$

$$\therefore \cos \angle ACB = \frac{AC}{BC} = \frac{CH}{O_1C},$$

$$\therefore \frac{8}{10} = \frac{CH}{r},$$

$$\therefore CH = \frac{4}{5}r, \quad O_1H = \frac{3}{5}r,$$

$$\therefore O_2A = \frac{1}{2}(AC - CE) = 4 - \frac{4}{5}r,$$

$$\therefore O_2N = AN - O_2A = 4 - \left(4 - \frac{4}{5}r\right) = \frac{4}{5}r,$$

$$\text{在 Rt}\triangle O_2FN \text{ 中, } O_2F^2 = 9 + \left(\frac{4}{5}r\right)^2,$$

$$\therefore \sin \angle ACB = \frac{O_1H}{O_1C} = \frac{AB}{BC}, \quad \text{即 } \frac{O_1H}{r} = \frac{6}{10},$$

$$\text{解得 } O_1H = \frac{3}{5}r;$$

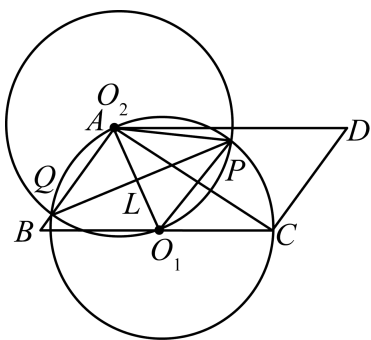
$$\therefore O_2H = \frac{1}{2}AC = 4,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle O_1O_2H \text{ 中, } O_1O_2^2 = 16 + \left(\frac{3}{5}r\right)^2,$$

$$\therefore 9 + \left(\frac{4}{5}r\right)^2 = 16 + \left(\frac{3}{5}r\right)^2,$$

解得 $r = 5$ (负值舍去),

$\therefore$ 此时 E 和 A 重合, 即 O_2 与 A 重合, 如图所示, PQ 为公共弦,



$$\therefore O_1O_2 = O_1P = O_2P,$$

$\therefore \triangle O_1O_2P$ 是等边三角形,

$$\therefore PL = \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore PQ = 5\sqrt{3}$, 即 $\odot O_2$ 与 $\odot O_1$ 的公共弦长为 $5\sqrt{3}$.

【点睛】 本题主要考查了勾股定理、解直角三角形、垂径定理、相似三角形的判定与性质、等边三角形的判定与性质、圆的性质等内容, 熟练掌握相关知识是解题的关键.