

2024 学年第二学期九年级数学练习

(完卷时间 100 分钟, 满分 150 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【每小题只有一个正确选项, 在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂】

1. 2025 的相反数是 ()

- A. 2025 B. -2025 C. $\frac{1}{2025}$ D. $-\frac{1}{2025}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了求一个数的相反数, 只有符号不同的两个数互为相反数, 据此可得答案.

【详解】解: 2025 的相反数是 -2025,

故选: B.

2. 下列式子中, 不属于二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{a^2+1}$ C. $\sqrt{3-\pi}$ D. $\sqrt{\frac{5}{6}}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的定义, 根据二次根式的被开方数为非负数, 逐一分析即可.

【详解】解: A、 $\sqrt{3}$ 是二次根式, 故本选项不符合题意;

B、因 $a^2+1>0$, 则 $\sqrt{a^2+1}$ 是二次根式, 故本选项不符合题意;

C、 $3-\pi<0$, 由于被开方数是负数, 所以在实数范围内没有意义, 不属于二次根式, 故本选项符合题意;

D、由于被开方数是正数, $\sqrt{\frac{5}{6}}$ 是二次根式, 故本选项不符合题意.

故选: C.

3. 将抛物线 $y=-3x^2+2$ 向左平移 1 个单位, 再向下平移 3 个单位后所得到的抛物线为()

- A. $y=-3(x-1)^2-3$ B. $y=-3(x-1)^2-1$
C. $y=-3(x+1)^2-3$ D. $y=-3(x+1)^2-1$

【答案】D

【解析】

【分析】此题主要考查了二次函数图象的平移，根据“左加右减、上加下减”的原则进行解答即可.

【详解】解：将抛物线 $y = -3x^2 + 2$ 向左平移 1 个单位所得直线解析式为： $y = -3(x+1)^2 + 2$ ；

再向下平移 3 个单位为： $y = -3(x+1)^2 + 2 - 3$ ，即 $y = -3(x+1)^2 - 1$.

故选：D.

4. 如图是某中学现代舞蹈社团 20 名成员的年龄分布统计表，数据不小心被撕掉一块，仍能够分析得出关于这 20 名成员年龄的统计量的是（ ）

年龄/岁	15	16	17	18
频数/名	5	6		

A. 中位数

B. 方差

C. 平均数

D. 众数

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了平均数、方差、中位数、众数. 熟练掌握平均数、方差、中位数、众数的概念是解题的关键. 平均数、方差受频数的影响，众数是出现次数最多的数，由于缺少 17 和 18 岁数据，这些统计量都不能分析得出. 而中位数是将一组数据由小到大排列，当数据个数为偶数时，中位数是位于中间的两个数的平均数，共 20 名成员，中位数是第 10、11 位数的平均数，由此得解.

【详解】解：A：由于该组数据有 20 个，中位数为第 10 个和 11 个数据的平均数： $\frac{16+16}{2} = 16$ ，故 A 符合题意；

B：方差是各个数据与平均数之差的平方的和的平均数，用于衡量数据的波动. 由于缺少 17 岁和 18 岁的数据，所以方差不能求出，故 B 不符合题意；

C：平均数等于一组数据所有数据之和再除以数据个数，用于反映现象总体的一般水平，或分布的集中趋势. 由于缺少 17 岁和 18 岁的数据，所以平均数不能求出，故 C 不符合题意；

D：由于众数是出现次数最多的数，17 岁和 18 岁的人数不确定，所以众数不能确定，故 D 不符合题意；

故选：A.

5. 正方形具有而一般矩形不一定具有的性质是（ ）

A. 两组对边分别相等

B. 两条对角线互相平分

C. 两条对角线互相垂直

D. 两条对角线相等

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查正方形的性质，正方形具有平行四边形的性质，又具有自己的特性，要注意运用正方形具备而矩形不具备的性质. 如，正方形的对角线相等，邻边相等. 根据正方形和矩形的性质容易得出结论.

【详解】解：A、两组对边分别相等，矩形和正方形都具有，故不合题意；
B、两条对角线互相平分，矩形和正方形都具有，故不合题意；
C、两条对角线互相垂直，正方形具有而一般矩形不一定具有的性质，故合题意；
D、两条对角线相等，矩形和正方形都具有，故不合题意；
故选：C.

6. 如果一个正多边形的外角为锐角，且它的余弦值是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，那么它是（ ）

- A. 等边三角形 B. 正六边形 C. 正八边形 D. 正十二边形

【答案】D

【解析】

【分析】先根据一个外角的余弦值是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，求出一个外角的度数，再利用任意凸多边形的外角和均为 360° ，正多边形的每个外角相等即可求出答案.

【详解】 $\because$ 一个外角为锐角，且其余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore$ 这个一个外角 $= 30^\circ$ ，

$\therefore 360 \div 30 = 12$.

故它是正十二边形.

故选：D.

【点睛】此题主要考查了多边形的外角和及特殊角的三角函数值，利用任意凸多边形的外角和均为 360° ，正多边形的每个外角相等即可求出答案.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案】

7. 计算： $(-3a)^2 =$ _____.

【答案】 $9a^2$

【解析】

【分析】本题考查了积的乘方，根据积的乘方法则计算即可.

【详解】解： $(-3a)^2 = (-3)^2 \cdot a^2 = 9a^2$.

故答案为： $9a^2$

8. 分解因式: $x^2-16=$ _____.

【答案】 $(x-4)(x+4)$

【解析】

【分析】 利用平方差公式进行分解即可

【详解】 解: $x^2-16=(x-4)(x+4)$

故答案为 $(x-4)(x+4)$

9. 已知 $f(x)=2x+1$, 则 $f(\frac{3}{2})=$ _____.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查求函数值, 掌握函数值的计算是解题的关键.

【详解】 解: $\because f(x)=2x+1$

$$\therefore f\left(\frac{3}{2}\right)=2\times\frac{3}{2}+1=4$$

故答案为: 4.

10. 若关于 x 的方程 $x^2-x-m=0$ 有两个不相等的实数根, 则实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > -\frac{1}{4}$ ## $m > -0.25$

【解析】

【分析】 本题考查了根的判别式, 牢记“当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根”是解题的关键. 由方程有两个不等的实数根结合根的判别式, 即可得出关于 m 的一元一次不等式, 解之即可得出结论.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-x-m=0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-m) = 1 + 4m > 0,$$

$$\therefore m > -\frac{1}{4}.$$

故答案为: $m > -\frac{1}{4}$.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $A(m,3)$ 和点 $B(2,n)$ 都在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k \neq 0)$ 的图象上, 则

$$\frac{n}{m} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{3}{2}$ ## 1.5

【解析】

【分析】 本题考查了待定系数法求函数的解析式，代入点求得含参数的函数解析式是解题的关键.

把点点 $A(m,3)$ 和点 $B(2,n)$ 代入 $y=\frac{k}{x}$ ，得出 $m=\frac{k}{3}, n=\frac{k}{2}$ ，即可求解.

【详解】 解：把点 $A(m,3)$ 和点 $B(2,n)$ 代入 $y=\frac{k}{x}$ 得，

$$m=\frac{k}{3}, n=\frac{k}{2},$$

$$\therefore \frac{n}{m} = \frac{\frac{k}{2}}{\frac{k}{3}} = \frac{3}{2},$$

故答案为： $\frac{3}{2}$.

12. 从一副 52 张没有大小王的扑克牌中任意抽取一张牌，那么抽到 K 的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{13}$

【解析】

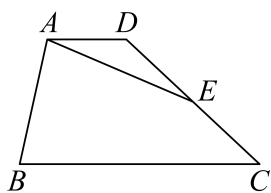
【分析】 本题考查了概率公式，熟练掌握概率公式是解题的关键.一副 52 张（没有大小王）的扑克牌中 A 有 4 张，利用概率计算公式能求出抽到的这张牌是 A 的概率.

【详解】 解：一副 52 张(没有大小王)的扑克牌中任意抽取一张，基本事件总数 $n=52$ ，
一副 52 张(没有大小王)的扑克牌中有 4 四张 A，抽到的这张牌是 A 的基本事件个数 $m=4$ ，

$$\therefore \text{抽到的这张牌是 } A \text{ 的概率 } p = \frac{m}{n} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

故答案为 $\frac{1}{13}$

13. 如图, 已知在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 且 $BC = 3AD$, 点 E 是边 DC 的中点. 设 $AB = a$, $AD = b$, 那么 $\overrightarrow{AE} =$ _____ (用 a 、 b 的式子表示).

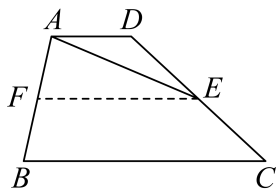


【答案】 $\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查了梯形中位线的性质，平面向量的线性计算，熟练掌握三角形法则是解题的关键. 取 AB 中点，连接 EF ，则 $EF = 2AD$ ，然后根据三角形法则即可求解.

【详解】 解：如图，取 AB 中点，连接 EF



∵ 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 且 $BC = 3AD$, 点 E 是边 DC 的中点

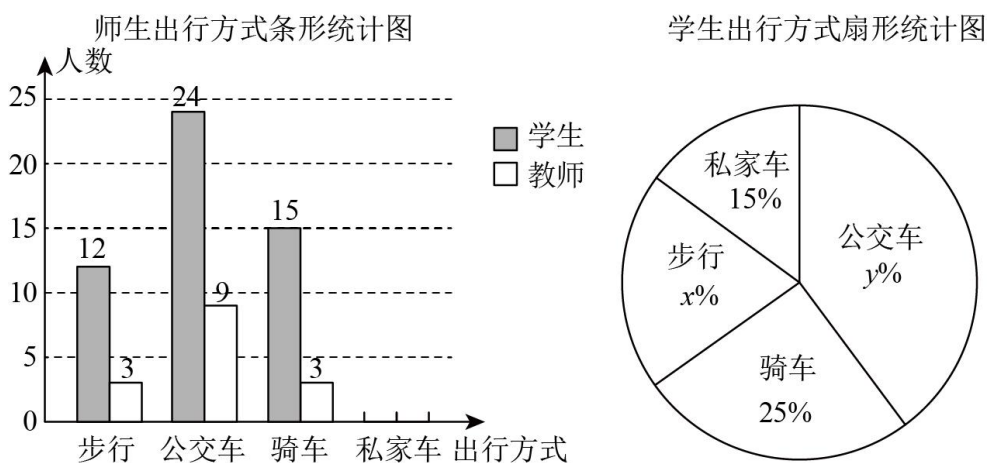
$$\therefore EF = \frac{1}{2}(AD + BC) = 2AD$$

∵ $AB = a$, $AD = b$,

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$$

故答案为: $\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$.

14. 9月22日是世界无车日, 某校开展了以“倡导绿色出行”为主题的调查, 随机抽查了部分师生的出行方式, 将收集的数据绘制成下列不完整的两种统计图. 已知随机抽查的教师人数为学生人数的一半, 根据图中信息, 可知乘私家车出行的教师人数是_____.



【答案】15

【解析】

【分析】本题考查了条形统计图、扇形统计图的知识, 解题的关键是从统计图中整理出进一步解题的信息. 由学生骑自行车的人数除以占的百分比求出抽查学生的总人数, 进而求出教师的总人数, 再由教师的总人数减去步行人数, 再减去乘公交车人数, 再减去骑车人数得到乘私家车出行的教师人数.

【详解】解: 由题意得, 抽查的学生人数是 $15 \div 25\% = 60$,

∵ 随机抽查的教师人数为学生人数的一半

∴ 教师人数为 30,

∴ 乘私家车出行的教师人数为 $30 - (3 + 9 + 3) = 15$.

故答案为: 15.

15. 数学知识广泛应用于化学领域，是研究化学的重要工具．比如在学习化学式时，甲烷化学式为 CH_4 ，乙烷化学式为 C_2H_6 ，丙烷化学式为 C_3H_8 ，按此规律，当碳原子的数目为 n (n 为正整数) 时，氢原子的数目是_____.

【答案】 $(2n+2)$

【解析】

【分析】 本题主要考查了数字类的规律探索，观察发现出规律成为解题的关键.

经观察可以发现：烷烃中氢原子数是碳原子的 2 倍加上 2，据此规律即可解答.

【详解】 解：碳原子个数为 1 时，氢原子数为 $1 \times 2 + 2 = 4$ 个，

碳原子个数为 2 时，氢原子数为 $2 \times 2 + 2 = 6$ 个，

碳原子个数为 3 时，氢原子数为 $3 \times 2 + 2 = 8$ 个，

……，

以此类推，可知，碳原子个数为 n 时，氢原子数为 $(2n+2)$ 个.

故答案为： $(2n+2)$.

16. 如果过多边形的一个顶点共有 3 条对角线，那么这个多边形的内角和是_____度.

【答案】 720

【解析】

【分析】 根据过多边形的一个顶点共有 3 条对角线，则这个多边形的边数是 6， n 边形的内角和可以表示成 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ，代入公式就可以求出内角和.

【详解】 解： $\because$ 过多边形的一个顶点共有 3 条对角线，

$\therefore$ 该多边形边数为 6，

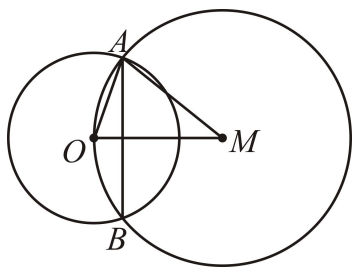
$\therefore (6-2) \cdot 180^\circ = 720^\circ$ ，

$\therefore$ 这个多边形的内角和为 720° ，

故答案为： 720.

【点睛】 本题考查了多边形的内角和公式，多边形的对角线，解题的关键是掌握多边形对角线规律.

17. 如图，已知 $\odot O$ 与 $\odot M$ 相交于 A 、 B 两点， $\odot O$ 的半径长为 2， $\odot M$ 的半径长为 3，如果 $\odot O$ 的圆心在 $\odot M$ 上，那么公共弦 AB 的长为_____.



【答案】 $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

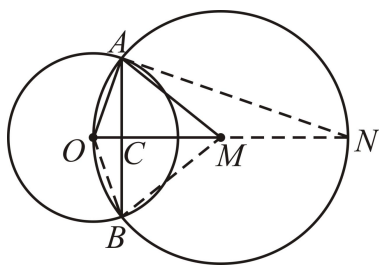
【解析】

【分析】此题考查了垂径定理、勾股定理、圆周角定理等知识，熟练掌握垂径定理和圆周角定理是关键．延长 OM 交 $\odot M$ 于点 N ，连接 AN, BM, OB ，则 ON 为 $\odot M$ 的直径，求出 $AN = 4\sqrt{2}$ ，证明

$AC = BC = \frac{1}{2}AB$ ，在 $\text{Rt}\triangle AON$ 中， $S_{\triangle AON} = \frac{1}{2}AC \cdot ON = \frac{1}{2}AO \cdot AN$ ，得到 $AC = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ ，即可得到

$$AB = 2AC = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

【详解】解：延长 OM 交 $\odot M$ 于点 N ，连接 AN, BM, OB ，则 ON 为 $\odot M$ 的直径，



$$\therefore \angle OAN = 90^\circ, \quad ON = 6,$$

$$\therefore AN = \sqrt{ON^2 - OA^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore OA = OB, \quad AM = BM$$

$$\therefore OM \text{ 垂直平分 } AB,$$

$$\therefore AC = BC = \frac{1}{2}AB,$$

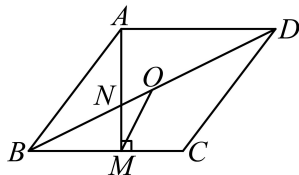
$$\text{在 } \text{Rt}\triangle AON \text{ 中, } S_{\triangle AON} = \frac{1}{2}AC \cdot ON = \frac{1}{2}AO \cdot AN$$

$$\therefore AC = \frac{AO \cdot AN}{ON} = \frac{2 \times 4\sqrt{2}}{6} = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore AB = 2AC = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

故答案为: $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

18. 如图, 菱形 $ABCD$ 中, 点 O 是 BD 的中点, $AM \perp BC$, 垂足为 M , AM 交 BD 于点 N , $OM = 2$, $BD = 8$, 则 MC 的长为_____.

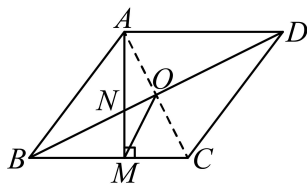


【答案】 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形, 菱形的性质、直角三角形斜边中线等于斜边一半, 连接 AC , 先由菱形性质可得对角线 AC 与 BD 交于点 O , 由直角三角形斜边中线等于斜边一半可得 $OA = OC = OM = 2$, $AC = 4$, 进而由菱形对角线求出边长, 由 $\sin \angle MAC = \sin \angle OBC = \frac{OC}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 解三角形即可求出 $MC = AC \cdot \sin \angle MAC = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, 正确进行计算是解题关键.

【详解】 解: 如图, 连接 AC ,



$\because$ 点 O 是 BD 的中点,

$\therefore A$ 、 O 、 C 三点在一直线上,

$\therefore OA = OC$,

$\because OM = 2$, $AM \perp BC$,

$\therefore OA = OC = OM = 2$, $AC = 4$,

$\because BD = 8$,

$\therefore OB = OD = \frac{1}{2}BD = 4$,

$\therefore BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$, $\tan \angle OBC = \frac{OC}{OB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,

$\because \angle ACM + \angle MAC = 90^\circ$, $\angle ACM + \angle OBC = 90^\circ$,

$$\therefore \angle MAC = \angle OBC,$$

$$\therefore \sin \angle MAC = \sin \angle OBC = \frac{OC}{BC} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore MC = AC \cdot \sin \angle MAC = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

故答案为: $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $(1-\sqrt{3})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-1} - 9^{\frac{1}{2}} + |1-\sqrt{3}|.$

【答案】 0

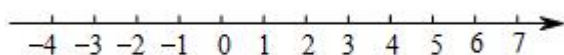
【解析】

【分析】 根据完全平方公式计算出 $(1-\sqrt{3})^2$, 根据负整数指数幂的意义计算出 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-1}$, 根据分数指数幂与根式的关系计算出 $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9}$, 根据绝对值的意义计算出 $|1-\sqrt{3}|$, 即可完成.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 } & (1-\sqrt{3})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-1} - 9^{\frac{1}{2}} + |1-\sqrt{3}| \\ &= 1 - 2\sqrt{3} + 3 + \sqrt{3} - 3 + \sqrt{3} - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了实数的混合运算, 二次根式的混合运算, 关键要清楚负整数指数幂的含义、绝对值的含义、分数指数幂与根式的关系.

20. 解不等式组: $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 3 < 2x \\ \frac{2x-1}{3} \leq \frac{x+1}{2} \end{cases}$, 并把解集在数轴上表示出来.



【答案】 $-2 < x \leq 5$, 图见解析

【解析】

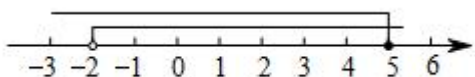
【分析】 分别求出每一个不等式的解集, 根据口诀: 同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小无解了即可确定不等式组的解集.

【详解】解：解不等式 $\frac{1}{2}x - 3 < 2x$ ，得： $x > -2$ ，

解不等式 $\frac{2x-1}{3} \leq \frac{x+1}{2}$ ，得： $x \leq 5$ ，

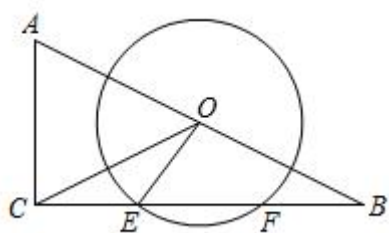
则不等式组的解集为 $-2 < x \leq 5$ ，

将不等式组的解集表示在数轴上如下：



【点睛】此题主要考查不等式组的求解，解题的关键是熟知不等式的性质.

21. 已知：如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=8$ ， $BC=16$ ，点 O 为斜边 AB 的中点，以 O 为圆心，5 为半径的圆与 BC 相交于 E 、 F 两点，连结 OE 、 OC 。



(1) 求 EF 的长；

(2) 求 $\angle COE$ 的正弦值.

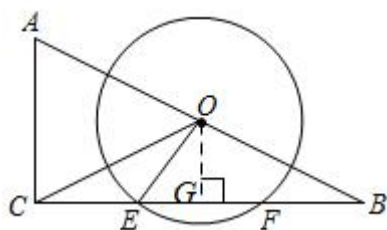
【答案】(1) EF 的长为 6；(2) $\angle COE$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

【解析】

【分析】(1) 过点 O 作 $OG \perp EF$ 于点 G ，根据垂径定理得到 $EG=FG$ ，利用三角形中位线得到 $OG=4$ ，然后根据勾股定理计算 EG ，从而得到 EF 的长；

(2) 利用 $CE=OE=5$ 得到 $\angle COE=\angle OCE$ ，再利用勾股定理计算 $OC=4\sqrt{5}$ ，然后利用正弦的定义求出 $\sin \angle OCE$ ，从而得到 $\angle COE$ 的正弦值；

【详解】解：(1) 过点 O 作 $OG \perp EF$ 于点 G ，



$\therefore EG=FG$ ， $OG \parallel AC$ ，

又 O 为 AB 的中点,

$\therefore$ G 为 BC 的中点, 即 OG 为 $\triangle ABC$ 的中位线,

$$\therefore OG = \frac{1}{2} AC = 4,$$

在 $Rt\triangle OEG$ 中, 由勾股定理得,

$$EG = \sqrt{OE^2 - OG^2} = 3,$$

$$\therefore EF = 2EG = 6;$$

$$(2) \text{ 在 } Rt\triangle ABC \text{ 中, 由勾股定理得, } AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 8\sqrt{5},$$

又 O 为 AB 的中点,

$$\therefore CO = BO = 4\sqrt{5},$$

又 $OG \perp BC$,

$$\therefore CG = BG = \frac{1}{2} BC = 8,$$

$$\therefore CE = CG - EG = 8 - 3 = 5,$$

$$\therefore CE = EO,$$

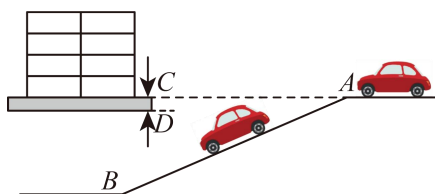
$$\therefore \angle COE = \angle OCE,$$

$$\therefore \sin \angle OCE = \frac{OG}{OC} = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\therefore \angle COE \text{ 的正弦值为 } \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

【点睛】 本题考查了圆周角定理: 在同圆或等圆中, 同弧或等弧所对的圆周角相等, 都等于这条弧所对的圆心角的一半, 也考查了垂径定理和解直角三角形;

22. 如图是某地下停车库入口的设计示意图, 已知坡道 AB 的坡比 $i = 1: 2.4$, AC 的长为 7.2 米, CD 的长为 0.4 米. 按规定, 车库坡道口上方需张贴限高标志, 根据图中所给数据, 确定该车库入口的限高数值 (即点 D 到 AB 的距离).



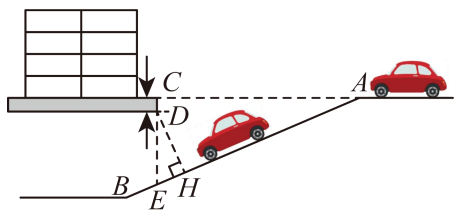
【答案】 该车库入口的限高数值为 2.4 米.

【解析】

【分析】 由题意延长 CD 交 AB 于 E, 并根据坡度和坡角可得 $CE = 3$, $DE = 2.6$, 过点 D 作 $DH \perp AB$ 于 H, 根

据锐角三角函数即可求出 DH 的长.

【详解】解：如图，延长 CD 交 AB 于 E，



$$\therefore i = 1: 2.4,$$

$$\therefore \tan \angle CAB = \frac{1}{2.4} = \frac{5}{12},$$

$$\therefore \frac{CE}{AC} = \frac{5}{12},$$

$$\therefore AC = 7.2,$$

$$\therefore CE = 3,$$

$$\therefore CD = 0.4,$$

$$\therefore DE = 2.6,$$

过点 D 作 $DH \perp AB$ 于 H,

$$\therefore \angle EDH = \angle CAB,$$

$$\therefore \tan \angle CAB = \frac{5}{12},$$

$$\therefore \cos \angle EDH = \cos \angle CAB = \frac{12}{13},$$

$$DH = DE \times \cos \angle EDH = 2.6 \times \frac{12}{13} = 2.4.$$

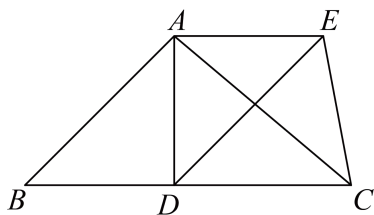
答：该车库入口的限高数值为 2.4 米.

【点睛】本题考查解直角三角形的应用-坡度坡角问题，解决本题的关键是掌握坡度坡角定义.

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D 在边 BC 上，联结 AD，以 AD 为一边作 $\triangle ADE$ ，满足 $AD = AE$ ， $\angle DAE = \angle BAC$ ，联结 EC.

(1) 求证：CA 平分 $\angle DCE$;

(2) 如果 $AB^2 = BD \cdot BC$ ，求证：四边形 ABDE 是平行四边形.



【答案】(1) 见解析；(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据等腰三角形的性质得到 $\angle B = \angle ACB$, 证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$, 根据全等三角形的性质得到 $\angle B = \angle ACE$, 根据角平分线的定义证明结论;

(2) 根据相似三角形的判定定理得到 $\triangle ABD \sim \triangle CBA$, 得到 $\angle BAD = \angle ACB$, 分别证明 $AE \parallel BD$, $AB \parallel DE$, 根据平行四边形的判定定理证明.

【详解】(1) 证明: $\because AB = AC$,

$$\therefore \angle B = \angle ACB,$$

$$\because \angle DAE = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle BAC - \angle DAC = \angle DAE - \angle DAC, \text{ 即 } \angle BAD = \angle CAE,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE, \\ AD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle B = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ACE,$$

$$\therefore CA \text{ 平分 } \angle DCE;$$

$$(2) \text{ 证明: } \because AB^2 = BD \cdot BC,$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB},$$

$$\text{又 } \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle ACB,$$

$$\because \triangle ABD \cong \triangle ACE,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle ACB,$$

$$\therefore AE \parallel BD,$$

$$\because AB = AC, AD = AE, \angle DAE = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ADE,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle ADE,$$

$$\therefore AB \parallel DE,$$

$$\therefore AE \parallel BD, AB \parallel DE,$$

∴ 四边形 ABDE 是平行四边形.

【点睛】 本题考查的是相似三角形的判定和性质、全等三角形的判定和性质、平行四边形的判定, 掌握等腰三角形的性质、相似三角形的判定定理和性质定理是解题的关键.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = -x^2 + mx + n$ 经过点 $A(5, 0)$, 顶点为点 B , 对称轴为直线 $x = 3$, 且对称轴与 x 轴交于点 C . 直线 $y = kx + b$, 经过点 A , 与线段 BC 交于点 E .

(1) 求抛物线 $y = -x^2 + mx + n$ 的表达式;

(2) 联结 BO 、 EO . 当 $\triangle BOE$ 的面积为 3 时, 求直线 $y = kx + b$ 的表达式;

(3) 在 (2) 的条件下, 设点 D 为 y 轴上的一点, 联结 BD 、 AD , 当 $BD = EO$ 时, 求 $\angle DAO$ 的余切值.

【答案】 (1) $y = -x^2 + 6x - 5$; (2) $y = -x + 5$; (3) $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{5}{6}$

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法和抛物线对称轴公式即可求解;

(2) 先求出顶点 B 坐标, 根据 $\triangle BOE$ 的面积为 3 求出 BE , 进而求出点 E 坐标, 利用待定系数法即可求解;

(3) 分 $BD \parallel OE$ 和 BD 与 OE 不平行两种情况, 分别求出 D 坐标, 利用余切定义即可求解.

【详解】 解: (1) $\because$ 抛物线 $y = -x^2 + mx + n$ 经过点 $A(5, 0)$, 对称轴为直线 $x = 3$,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{m}{-2} = 3 \\ -25 + 5m + n = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} m = 6 \\ n = -5 \end{cases}$$

∴ 抛物线表达式为 $y = -x^2 + 6x - 5$;

(2) 把 $x = 3$ 代入 $y = -x^2 + 6x - 5$ 得 $y = 4$,

∴ 抛物线顶点 B 坐标为 $(3, 4)$,

由 $\triangle BOE$ 的面积为 3 得 $\frac{1}{2} BE \times 3 = 3$,

∴ $BE = 2$,

∴ 点 E 在线段 BC 上,

∴ 点 E 坐标为 $E(3, 2)$,

把点 $E(3,2)$ 和点 $A(5,0)$ 代入 $y=kx+b$ 得 $\begin{cases} 5k+b=0 \\ 3k+b=2 \end{cases}$,

$$\therefore \begin{cases} k=-1 \\ b=5 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线表达式为 $y=-x+5$;

(3) 如图, ①若 $BD \parallel OE$, 如图 D_1 ,

则四边形 $OEBD_1$ 为平行四边形:

则点 D_1 坐标为 $(0,2)$,

联结 D_1A ,

$$\therefore \cot \angle D_1AO = \frac{AO}{D_1O} = \frac{5}{2};$$

②若 BD 与 OE 不平行, 如图 D_2 ,

则四边形 $OEBD_2$ 为等腰梯形:

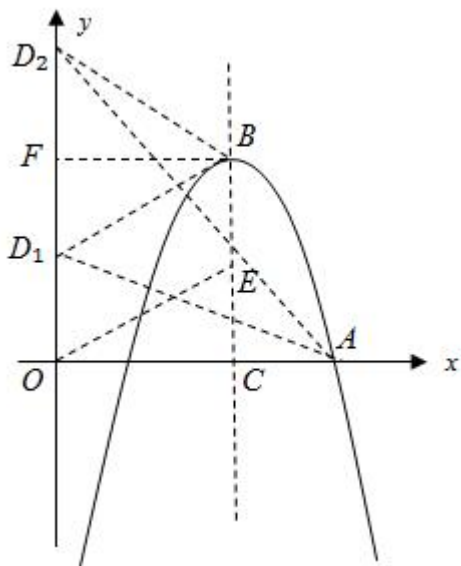
作 $BF \perp y$ 轴于 F , 则 $D_1F = D_2F = 2$,

$\therefore$ 点 D_2 坐标为 $(0,6)$,

联结 D_2A ,

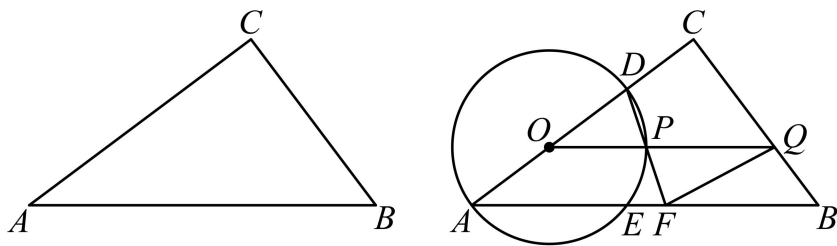
$$\therefore \cot \angle D_2AO = \frac{AO}{D_2O} = \frac{5}{6},$$

综上所述, 此时 $\angle DAO$ 的余切值为 $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{5}{6}$.



【点睛】本题为二次函数综合题，考查了二次函数性质，求一次函数解析式，余切定义等知识，熟练掌握各知识点是解题关键，解第（3）步时要注意分类讨论思想应用.

25. 如图，已知：Rt $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， $\sin \angle BAC = \frac{3}{5}$ ， O 是边 AC 上一点，以点 O 为圆心 OA 为半径的圆 O 与边 AC 的另一个交点是点 D ，与边 AB 的另一个交点是点 E ，过点 O 作 AB 的平行线与圆 O 相交于点 P ，与 BC 相交于点 Q ， DP 的延长线交 AB 于点 F ，联结 FQ 。



- (1) 求证： $\widehat{DP} = \widehat{EP}$ ；
- (2) 设 $OA = x$ ， $\triangle FPQ$ 的面积为 y ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出定义域；
- (3) 如果 $\triangle FPQ$ 是以 FQ 为腰的等腰三角形，求 AO 的长。

【答案】(1) 见解析；

(2) $y = -\frac{27}{40}x^2 + 3x$ ($0 < x \leq 4$)；

(3) AO 的长为 $\frac{40}{13}$ ， $\frac{200}{53}$ 。

【解析】

【分析】本题考查了弧与圆周角的关系，相似三角形的性质与判定，解直角三角形，函数关系式等，正确的左侧辅助线是解题的关键；

- (1) 根据平行线的性质可得 $\angle DOP = \angle A$ ， $\angle POE = \angle OEA$ ，根据等边对等角可得 $\angle A = \angle OEA$ ，等量

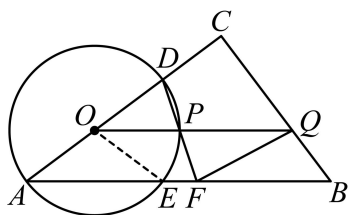
代换可得 $\angle DOP = \angle POE$ ，即可得证；

(2) 作 $OM \perp AB$ ， $FN \perp PQ$ ，垂足分别为 M 、 N ，解 $\text{Rt}\triangle ABC$ 得出 $BC = 6$ ， $AC = 8$ ，在 $\triangle AMO$ 中，得出 $FN = \frac{3}{5}x$ ，证明 $\triangle COQ \sim \triangle CAB$ ，进而得出 $OQ = 10 - \frac{5}{4}x$ ，又 $PQ = OQ - OP$ ，根据三角形的面积公式，即可得 y 关于 x 的函数关系式；

(3) ① $FQ = PQ$ ， $FQ = FP$ 两种情况，分别讨论求解.

【小问 1 详解】

证明：联结 OE ，



$\because OP \parallel AB$,

$\therefore \angle DOP = \angle A$, $\angle POE = \angle OEA$,

$\because OA = OE$,

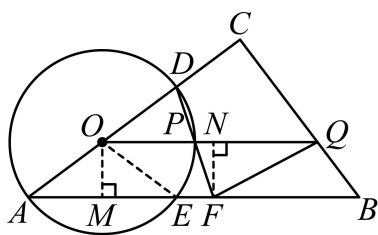
$\therefore \angle A = \angle OEA$,

$\therefore \angle DOP = \angle POE$,

$\therefore \widehat{DP} = \widehat{EP}$.

【小问 2 详解】

作 $OM \perp AB$ ， $FN \perp PQ$ ，垂足分别为 M 、 N ，



$\because OQ \parallel AB$, $OM \perp AB$, $FN \perp PQ$,

$\therefore OM = FN$,

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 10$, $\sin \angle BAC = \frac{3}{5}$,

$\therefore BC = 6$, $AC = 8$,

在 $\triangle AMO$ 中, $\angle AMO = 90^\circ$,

$$\therefore OM = OA \cdot \sin \angle BAC = \frac{3}{5}x,$$

$$\therefore FN = \frac{3}{5}x,$$

$$\because OQ \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle COQ \sim \triangle CAB$$

$$\therefore \frac{OQ}{AB} = \frac{CO}{CA},$$

$$\therefore \frac{OQ}{10} = \frac{8-x}{8},$$

$$\therefore OQ = 10 - \frac{5}{4}x,$$

$$\therefore PQ = OQ - OP = 10 - \frac{5}{4}x - x = 10 - \frac{9}{4}x,$$

$$y = \frac{1}{2} \left(10 - \frac{9}{4}x \right) \cdot \frac{3}{5}x,$$

$$\text{即 } y = -\frac{27}{40}x^2 + 3x \quad (0 < x \leq 4).$$

【小问 3 详解】

如果 $FQ = PQ$,

$$\therefore \angle QPF = \angle QFP = \angle OPD = \angle ODP,$$

$$\therefore QF \parallel AC,$$

$$\because OQ \parallel AB$$

$\therefore$ 四边形 $AFQO$ 是平行四边形,

$$\therefore AF = QO,$$

$$\because \angle ADF = \angle OPD = \angle AFD,$$

$$\therefore AF = AD = 2x,$$

$$\therefore OQ = 2x,$$

$$\therefore 2x = 10 - \frac{5}{4}x$$

$$\therefore x = \frac{40}{13}.$$

如果 $FQ = FP$, 作 $OM \perp AB$, $FN \perp PQ$, 垂足分别为 M 、 N , 则四边形 $OMFN$ 是矩形, $PN = QN$,

