

2024 学年第二学期期中考试九年级数学试卷

参考答案

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. A; 2. D; 3. C; 4. D; 5. B; 6. C.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. 2; 8. $2\sqrt{3}$; 9. $a(a+4)(a-4)$; 10. $x=5$; 11. -2 ; 12. $\frac{2}{3}$;

13. 3 (答案不唯一); 14. 450; 15. $\frac{4}{\sin \alpha}$; 16. $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$; 17. $\frac{3}{2}a$; 18. $\frac{\sqrt{13} \pm 1}{4}$.

三、解答题（本大题共 8 题，满分 78 分）

19. (本题满分 10 分)

解: 原式 $= 2 + (-3) + (\sqrt{3} - 1) - \sqrt{3}$
 $= -2$.

20. (本题满分 10 分)

解:
$$\begin{cases} x - y = 2, & \text{①} \\ x^2 - 2xy - 3y^2 = 0. & \text{②} \end{cases}$$

方程可变形为 $(x - 3y)(x + y) = 0$.

得 $x - 3y = 0$ 或 $x + y = 0$.

因此, 原方程组可化为两个二元一次方程组:

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ x - 3y = 0; \end{cases} \begin{cases} x - y = 2, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

分别解这两个方程组, 得原方程组的解是 $\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = -1. \end{cases}$

21. (本题满分 10 分, 其中第 (1) 小题 4 分, 第 (2) 小题 6 分)

解: (1) 把 $A(k-4, 1-k)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$, 得 $\frac{k}{k-4} = 1-k$,

$$k^2 - 4k + 4 = 0,$$

所以, k 的值为 2.

(2) 过点 A 、 B 分别作 x 轴的垂线, 垂足为点 M 、 N ,

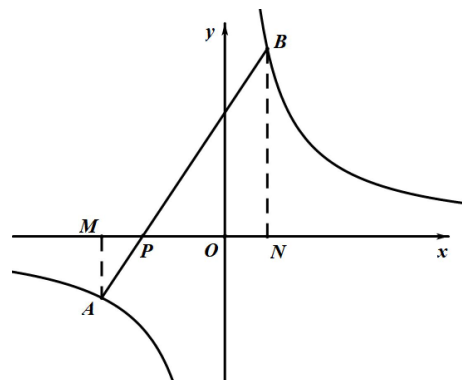
$$\text{由 } AM \parallel BN, \text{ 可得 } \frac{AM}{BN} = \frac{AP}{BP} = \frac{MP}{NP},$$

由 $BP = 3AP$, $A(-2, -1)$,

可得 $B(\frac{3}{2}, 3)$, 则 $BN = 3$, $MN = \frac{8}{3}$,

于是 $NP = 2$,

所以, 在 $Rt\triangle BPN$ 中, $\tan \angle BPO = \frac{BN}{NP} = \frac{3}{2}$.



22. (本题满分 10 分)

解: 如图, 以 C 为原点, CB 、 CA 所在的直线为 x 轴、 y 轴, 建立平面直角坐标系 xOy ,

过点 N 分别作 x 轴、 y 轴的垂线, 垂足为点 H 、 G ,

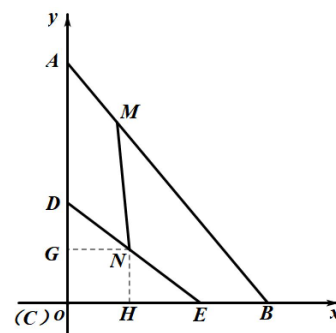
由 GN 平行 x 轴, 可得 $\frac{GN}{EC} = \frac{DN}{DE}$,

由 $DN = \frac{1}{2}DE$, $CE = 4$, 可得 $GN = 2$,

同理可得, $NH = \frac{3}{2}$,

于是点 N 坐标是 $(2, \frac{3}{2})$,

同理可得, 点 M 坐标是 $(\frac{3}{2}, 6)$,



$$\therefore MN = \sqrt{(2 - \frac{3}{2})^2 + (\frac{3}{2} - 6)^2} = \frac{\sqrt{82}}{2}.$$

23. (本题满分 12 分, 第(1)小题满分 6 分, 第(2)小题满分 6 分)

(1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\because BD^2 = AD \cdot BE,$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{BD}{BE},$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle BDE,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4,$$

$$\because BD = BE,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 4,$$

$$\therefore AB = AD,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AB = BC = CD = AD,$$

$$\because BD^2 = AD \cdot BE, \quad CE = 2BC, \quad BD = BE, \quad \text{设 } AB = BC = CD = AD = a,$$

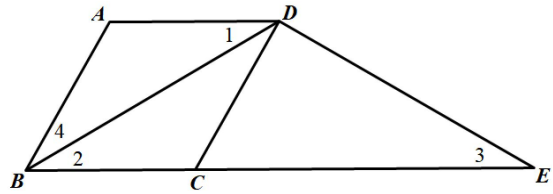
$$\therefore CE = 2a, \quad DE = \sqrt{3}a,$$

$$\therefore CD^2 + DE^2 = a^2 + (\sqrt{3}a)^2 = 4a^2, \quad CE^2 = (2a)^2 = 4a^2,$$

$$\therefore CD^2 + DE^2 = CE^2,$$

$$\therefore \angle CDE = 90^\circ,$$

$$\therefore CD \perp DE.$$



24. (本题满分 12 分, 第(1)小题满分 4 分, 第(2)小题满分 4 分, 第(3)小题满分 4 分)

解: (1) 由 $y = ax^2 - 2ax - 4$, 可得 $C(0, -4)$,

又 $OB = OC$, 则 $B(4, 0)$,

把 $B(4, 0)$, 代入 $y = ax^2 - 2ax - 4$, 得 $a = \frac{1}{2}$,

所以, 抛物线的表达式是 $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$.

(2) 由 $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4 = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{9}{2}$,

可得抛物线的对称轴方程是 $x = 1$, $A(-2, 0)$,

由 $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, -4)$,

可得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times [4 - (-2)] \times 4 = 12$, 则 $S_{\triangle A'B'B'} = 15$,

根据题意 $AB = A'B' = 6$, 则 $A'B'$ 边上的高是 5, $B'(a, 5)$,

由 $B(4, 0)$, $C(-2, -1)$, 可得 $y_{CB} = x - 4$,

把 $B'(a, 5)$ 代入 $y_{CB} = x - 4$, 则 $B'(9, 5)$,

由 $B(4, 0)$, $B'(9, 5)$, 可知抛物线先向右平移了 5 个单位, 又向上平移了 5 个单位,

则 $A'(3, 5)$,

所以, 新抛物线的表达式是 $y = \frac{1}{2}x^2 - 6x + \frac{37}{2}$, 对称轴方程是 $x = 6$.

(3) 在位于直线 $A'B'$ 上方的新抛物线的图像上取一点 Q , 使得 $\angle 1 = \angle 2$,

在 $Rt\triangle BOC$ 中, $CO = BO$, 则 $\angle 3 = \angle 4 = 45^\circ$,

根据题意可得 $AB \parallel A'B'$, $AA' \parallel BB'$, 则 $\angle 4 = \angle 5 = 45^\circ$,

于是 $\angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 5$, 即 $\angle PB'B = \angle ACB$,

过点 P 作 x 轴的垂线, 与 $A'B'$ 、 x 轴分别交于点 E 、 F ,

于是 $Rt\triangle B'EQ \sim Rt\triangle AOC$, 可得 $\angle 1 = \angle 2$,

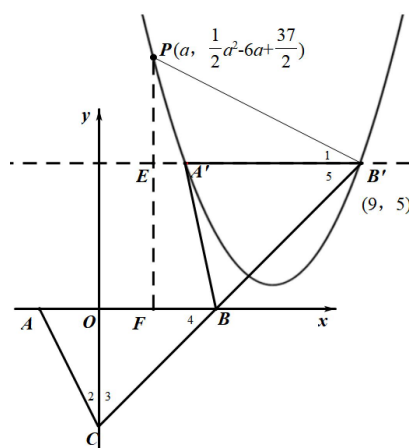
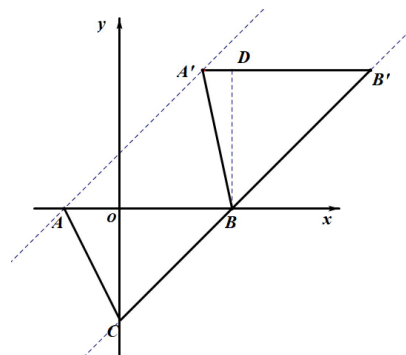
则 $\tan \angle 2 = \tan \angle 1 = \frac{1}{2}$,

设 $P(a, \frac{1}{2}a^2 - 6a + \frac{37}{2})$,

则 $PE = \frac{1}{2}a^2 - 6a + \frac{37}{2} - 5 = \frac{1}{2}a^2 - 6a + \frac{27}{2}$, $B'E = 9 - a$,

在 $Rt\triangle BOC$ 中, $\tan \angle 1 = \frac{PE}{B'E} = \frac{\frac{1}{2}a^2 - 6a + \frac{27}{2}}{9 - a} = \frac{1}{2}$, 解得 $a = 2$,

所以, 点 P 的坐标是 $(2, \frac{17}{2})$.



25. (本题满分 14 分, 第(1)小题①满分 4 分, 第(1)小题②满分 4 分, 第(2)小题满分 6 分)

解: (1) 过点 A 、 D 分别作 $AG \perp BC$, $DH \perp BC$, 垂足为点 G 、 H ,

过点 F 作 $FP \perp AD$, 交 AD 的延长线于点 P ,

$\therefore AG \parallel DH$, $AG=DH$, $\angle AGB = \angle P=90^\circ$,

$\therefore AD \parallel BC$, $\therefore$ 四边形 $AGHD$ 是平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $AGHD$ 是矩形,

$\therefore AD=GH$, $\angle GAD = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAF = 90^\circ$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$, $\therefore AB = AF$,

$\therefore \triangle ABG \cong \triangle APF$,

$\therefore BG = FP$,

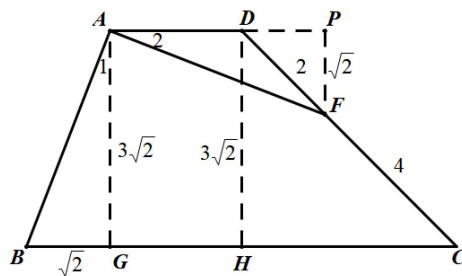
$\therefore AD \parallel BC$, $\angle C = 45^\circ$,

$\therefore \angle PDF = \angle C = 45^\circ$,

在 $Rt\triangle DPF$ 中, $DF=2$, $\therefore FP = DF \cdot \sin \angle PDF = \sqrt{2}$,

同理 $DH = 3\sqrt{2}$,

在 $Rt\triangle ABG$ 中, $\therefore AB = \sqrt{AG^2 + BG^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{5}$.



(2) 由 (1) 设 $AG=DH=AP=a$, $BG=FP=b$, 则 $AD=GH=a-b$, $BH=a$,

在 $Rt\triangle DHC$ 中, $DH=a$, $\angle C = 45^\circ$,

$\therefore CH = DH \cdot \tan \angle C = a$,

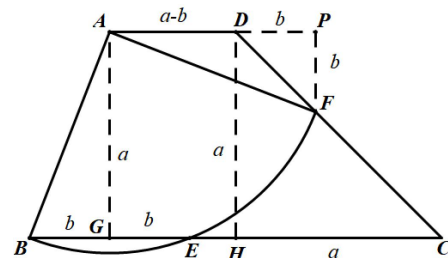
$\therefore BC = BH + CH = 2a$,

$\therefore$ 点 A 为圆心, $AG \perp BC$,

$\therefore BE = 2BG = 2b$,

$\therefore CE = BC - BE = 2a - 2b$,

$\therefore \frac{AD}{EC} = \frac{a-b}{2a-2b} = \frac{1}{2}$.



(3) 联结 EF , 延长 PF 交 BC 于点 Q ,

$\therefore AD \parallel BC$, $FP \perp AD$, $\therefore FQ \perp BC$,

$\therefore E$ 是弧 $\widehat{BF}$ 的中点, $\therefore BE = EF$,

由 (2) 可设 $FQ = a - b$, $BE = EF = 2b$,

在 $Rt\triangle FQC$ 中, $FQ = a - b$, $\angle C = 45^\circ$,

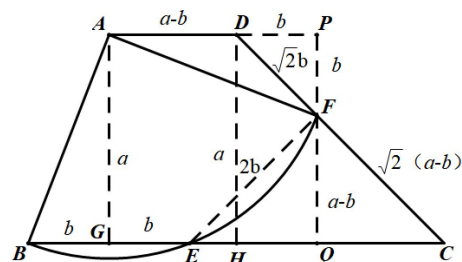
$\therefore FC = \frac{FQ}{\sin \angle C} = \sqrt{2}(a - b)$, $CQ = FQ \cot \angle C = a - b$,

同理 $DF = \sqrt{2}b$,

$\therefore \frac{DF}{FC} = \frac{b}{a - b}$,

$\therefore EQ = BC - BE - CQ = 2a - 2b - (a - b) = a - b$,

$\therefore EQ = CQ$,



$$\therefore FQ \perp BC,$$

$$\therefore EF = FC,$$

$$\therefore 2b = \sqrt{2}(a-b),$$

$$\therefore \frac{b}{a-b} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \frac{DF}{FC} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$