

2025 学年第一学期九年级期终学业质量调研

数学试卷

(时间 100 分钟, 满分 150 分) 202601

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

[每题只有一个正确选项, 在答题纸相应题号的选项上用 **2B** 铅笔正确填涂]

1. 下列图形中一定相似的图形是 ()

- A. 两个等腰三角形 B. 两个直角三角形 C. 两个等腰梯形 D. 两个正方形

【答案】D

【解析】

【分析】根据相似图形的定义, 结合选项, 用排除法求解.

【详解】A、两个等腰三角形顶角不一定相等, 故不符合题意;

B、两个直角三角形, 只有一个直角相同, 锐角不一定相等, 故不符合题意;

C、两个等腰梯形, 对应角不一定相等, 对应边不一定成比例, 故不符合题意;

D、两个正方形, 形状相同, 大小不一定相同, 符合相似性定义, 故符合题意;

故选 D.

【点睛】本题考查的是相似形的定义, 结合图形, 即图形的形状相同, 但大小不一定相同的变换是相似变换.

2. 在 $\triangle ABC$ 中 $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$. 下列结论正确的是 ()

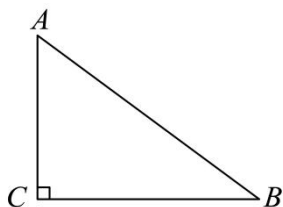
- A. $\sin A = \frac{3}{5}$ B. $\cos A = \frac{3}{5}$ C. $\tan A = \frac{3}{5}$ D. $\cot A = \frac{3}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了锐角三角函数的定义. 直接利用锐角三角函数的定义分别分析得出答案.

【详解】解: 如图所示:



$\because \angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5,$$

$\sin A = \frac{4}{5}$, 故 A 错误, 不符合题意;

$\cos A = \frac{3}{5}$, 故 B 正确, 符合题意;

$\tan A = \frac{4}{3}$; 故 C 错误, 不符合题意;

$\cot A = \frac{3}{4}$, 故 D 错误, 不符合题意;

故选: B.

3. 已知实数 $k (k \neq 0)$ 及非零向量 $\vec{a}$, 下列结论正确的是 ()

A. $|\vec{k\vec{a}}| = |k| \cdot |\vec{a}|$

B. $\vec{k\vec{a}} = |k| \cdot |\vec{a}|$

C. $|k| \vec{a} = k |\vec{a}|$

D. $\vec{k\vec{a}} = k |\vec{a}|$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了平面向量, 根据向量模的性质, 标量乘法后的模等于标量的绝对值乘以向量的模.

【详解】 解: A、对于任意实数 k 和非零向量 $\vec{a}$, 有 $|\vec{k\vec{a}}| = |k| |\vec{a}|$, 故此选项正确, 符合题意;

B、选项中左边为向量, 右边为标量, 类型不匹配, 故此选项错误, 不符合题意;

C、选项中左边为向量, 右边为标量, 类型不匹配, 故此选项错误, 不符合题意;

D、选项中当 $k < 0$ 时, $\vec{k\vec{a}} \neq |k| \vec{a}$, 故不成立, 故此选项错误, 不符合题意.

故选: A.

4. 二次函数 $y = x^2 - 4x + 1$ 的图象一定不经过 ()

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【答案】 C

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的图象与性质，解答本题的关键是明确题意，利用二次函数的性质解答．二次函数图象是抛物线，开口向上，通过分析当 $x < 0$ 时 $y > 0$ ，可知图象不经过第三象限．

【详解】解：∵二次函数 $y = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$ ，

∴该函数图象开口向上，对称轴为直线 $x = 2$ ，

∴当 $x < 2$ 时， y 随 x 的增大而减小，

当 $x = 0$ 时， $y = 1$ ，

∴当 $x < 0$ 时， $y > 1$ ，故所有 $x < 0$ 的点均满足 $y > 0$ ，故图象在第二象限，而不在第三象限，

∴该函数图象一定不经过第三象限．

故选：C．

5. 已知 BD 是四边形 $ABCD$ 的对角线， $\angle BDC = \angle A$ ，下列补充的条件中，不能判定 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 相似的是（ ）

A. $\angle ABD = \angle CBD$

B. $\angle ADB = \angle C$

C. $AB \cdot DC = AD \cdot DB$

D. $BD^2 = AD \cdot CD$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查相似三角形的判定，关键掌握两角对应相等或两边对应成比例且夹角相等（SAS）等判定方法．已知 $\angle BDC = \angle A$ ，结合各选项条件判断 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 是否相似．

【详解】解：∵ $\angle BDC = \angle A$ ，

选项A：∵ $\angle ABD = \angle CBD$ ，且 $\angle BDC = \angle A$ ，∴ $\triangle ABD \sim \triangle DBC$ ，故A能判定相似，不符合题意；

选项B：∵ $\angle ADB = \angle C$ ，且 $\angle BDC = \angle A$ ，∴ $\triangle ABD \sim \triangle DBC$ ，故B能判定相似，不符合题意；

选项C：∵ $AB \cdot DC = AD \cdot DB$ ，即 $\frac{AB}{DB} = \frac{AD}{DC}$ ，且 $\angle A = \angle BDC$ ，∴ $\triangle ABD \sim \triangle DBC$ ，故C能判定相似，不符合题意；

选项D：∵ $BD^2 = AD \cdot CD$ ，即 $\frac{BD}{AD} = \frac{CD}{BD}$ ，但夹角 $\angle ADB$ 与 $\angle BDC$ 不一定相等，故D不能判定相似，符合题意．

故选：D．

6. 学校在操场上举行庄严的升旗仪式，每个学生均站立在旗杆前方的水平地面上面向国旗行注目礼．已知国旗的初始位置距地面高度均大于或等于每个学生的身高．如果将看向国旗的视线与水平视线所形成的夹角定义为注视角，那么国旗从初始位置开始匀速上升至顶端的过程中，以下说法正确的是（ ）

- A. 每个学生的注视角大小不变
- B. 每个学生的注视角逐渐减小
- C. 每个学生的注视角逐渐增大
- D. 同一时刻，相同身高学生的注视角相等

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查解直角三角形的应用，理解题意是解答的关键注视角为视线与水平线的夹角，通过正切函数关系分析，国旗匀速上升时，高度增加导致正切值增大，从而注视角增大；选项 D 中，相同身高但水平距离不同时注视角不等.

【详解】 设学生眼睛高度为 h ，水平距离为 d ，国旗初始高度 $H_0 \geq h$ ，上升速度 $v > 0$ ，时间 t 后国旗高度

$$H_t = H_0 + vt.$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{H_t - h}{d} = \frac{H_0 + vt - h}{d},$$

且 $v > 0$ ， $d > 0$ ， $H_0 \geq h$ ， d 、 H_0 、 v 、 h 是定值，

$\therefore H_0 + vt - h$ 随 t 增加而增加，

$\therefore \tan \theta$ 随 t 增加而增加，

又 $\because \theta$ 为锐角， $\tan \theta$ 的值随着 θ 的增大而增大，

$\therefore \theta$ 逐渐增大，

故每个学生的注视角逐渐增大，故选项 A、B 说法错误，不符合题意，选项 C 说法正确，符合题意；

对于 D，同一时刻 H_t 相同，但 d 可能不同，即使 h 相同， θ 也可能不等，故 D 说法错误，不符合题意.

故选：C.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

[请将结果直接填入答题纸每个小题相应位置的方框内]

7. 如果 $x:y=5:2$ ，那么 $(x-y):y=$ _____.

【答案】 3:2

【解析】

【分析】 本题主要考查了比例的性质，设 $x=5k$ ， $y=2k(k \neq 0)$ ，则 $x-y=3k$ ，代入表达式求值即可.

【详解】 解： $\because x:y=5:2$ ，

$\therefore$ 可设 $x = 5k$, $y = 2k (k \neq 0)$,

$\therefore x - y = 5k - 2k = 3k$,

$\therefore (x - y) : y = 3k : 2k = 3 : 2$.

故答案为: $3 : 2$.

8. 如果两个相似三角形的周长之比是 $1 : 2$, 那么这两个三角形的相似比是_____.

【答案】

$1 : 2$

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的性质, 掌握相似三角形的周长比等于相似比是解题的关键. 根据相似三角形的周长比等于相似比直接得解.

【详解】 解: 根据相似三角形的性质, 周长之比等于相似比,

$\therefore$ 周长之比为 $1 : 2$,

$\therefore$ 相似比为 $1 : 2$.

故答案为: $1 : 2$.

9. 在比例尺为 $1 : 1000$ 的图纸上, 一座建筑物的高是 2 厘米, 它的实际高度是_____米.

【答案】 20

【解析】

【分析】 本题考查比例, 正确掌握比例尺的定义是解题的关键.

设实际高度为 x 厘米, 根据比例尺的定义“图上距离与实际距离的比等于比例尺”, 列方程求解即可.

【详解】 解: 设实际高度为 x 厘米,

则 $2 : x = 1 : 1000$, 解得 $x = 2000$,

2000 厘米 $= 20$ 米.

故答案为: 20 .

10. 抛物线 $y = x^2 - 2x$ 与 y 轴的交点坐标是_____.

【答案】 $(0, 0)$

【解析】

【分析】 令 $x = 0$, 可求出抛物线与 y 轴的交点坐标.

【详解】 解: 当 $x = 0$ 时, $y = 0$,

$\therefore$ 抛物线 $y = x^2 - 2x$ 与 y 轴的交点坐标是 $(0, 0)$.

故答案为 $(0, 0)$.

【点睛】 本题考查了二次函数图象与 y 轴的交点坐标特征：与 y 轴的交点的横坐标为 0，与 x 轴的交点的纵坐标为 0.

11. 如果抛物线 $y = (a-1)x^2 - 1$ 有最高点，那么实数 a 的取值范围是_____.

【答案】

$$a < 1$$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的图象与性质，根据二次函数的性质，抛物线有最高点时，开口向下，二次项系数小于零.

【详解】 解：抛物线 $y = (a-1)x^2 - 1$ 有最高点，

因此开口向下，二次项系数 $a-1 < 0$,

解得 $a < 1$.

故答案为： $a < 1$.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(-3, 0)$ 、 $B(2, 12)$ ，则 $\angle BAO$ 正弦值是_____.

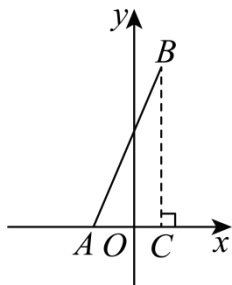
【答案】 $\frac{12}{13}$

【解析】

【分析】 本题考查了锐角三角函数，勾股定理，坐标与图形，解题的关键是正确构造直角三角形.

过点 B 作 $BC \perp x$ 轴于点 C ，利用勾股定理求解斜边，再由正弦的定义求解即可.

【详解】 解：如图，过点 B 作 $BC \perp x$ 轴于点 C ,



$\therefore$ 点 $A(-3, 0)$ 、 $B(2, 12)$,

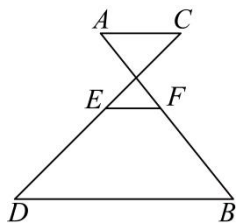
$\therefore BC = 12$, $AC = 5$,

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 13$,

$$\therefore \sin \angle BAO = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13},$$

故答案为: $\frac{12}{13}$.

13. 如图, 已知 $AC \parallel EF \parallel DB$, $AF : BF = 2 : 3$, $CD = 10$, $CE = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查平行线分线段成比例, 根据平行线分线段成比例, 列出比例式进行求解即可.

【详解】 解: $\because AC \parallel EF \parallel DB$,

$$\therefore CE : DE = AF : BF = 2 : 3,$$

$$\therefore CE : CD = 2 : 5,$$

$$\because CD = 10,$$

$$\therefore CE = 4;$$

故答案为: 4.

14. 小海沿着坡度为 $1 : \sqrt{3}$ 的斜坡上行 80 米时, 他的铅垂高度上升了 $\underline{\hspace{2cm}}$ 米.

【答案】 40

【解析】

【分析】 本题主要考查了解直角三角形的应用, 勾股定理, 根据坡度比垂直高度与水平距离的比为 $1 : \sqrt{3}$, 利用勾股定理求解斜边与垂直高度的关系.

【详解】 解: 设铅垂高度上升了 h 米, 则水平距离为 $\sqrt{3}h$ 米.

$$\text{由勾股定理, 得 } h^2 + (\sqrt{3}h)^2 = 80^2,$$

$$\text{即 } h^2 + 3h^2 = 6400,$$

$$4h^2 = 6400,$$

$$h^2 = 1600,$$

解得 $h = 40$.

故答案为:40.

15. 等边三角形的周长为 C , 面积为 S , 则面积 S 关于周长 C 的函数解析式为_____.

【答案】 $S = \frac{\sqrt{3}}{36} C^2$

【解析】

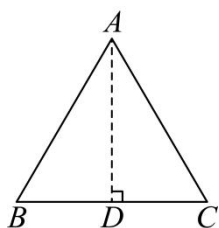
【分析】 直接利用等边三角形的性质得出 AD 的长, 再利用三角形面积求法得出答案.

【详解】 解: 如图所示: 过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D .

$$\because \text{等边三角形的周长为 } C, \therefore AB=BC=AC=\frac{C}{3}, \therefore DC=BD=\frac{C}{6}, \therefore AD=\sqrt{\left(\frac{C}{3}\right)^2 - \left(\frac{C}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} C,$$

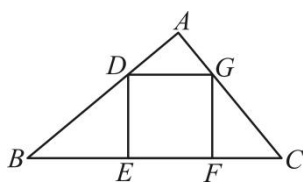
$$\therefore S = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{6} C \times \frac{C}{3} = \frac{\sqrt{3}}{36} C^2.$$

故答案为 $S = \frac{\sqrt{3}}{36} C^2$.



【点睛】 本题主要考查了等边三角形的性质以及三角形面积求法, 正确表示出三角形的高是解题的关键.

16. 如图, 正方形 $DEFG$ 的顶点均在 $\triangle ABC$ 的边上, $BC = 6$, $DE = 2$, BC 边上的高的长为_____.



【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的应用, 关键是利用正方形的对边平行, 得到 $\triangle ADG \sim \triangle ABC$, 再根据相似三角形的高与对应边成比例列方程求解.

【详解】 解: 设 BC 边上的高为 h .

$\because$ 正方形 $DEFG$ 的边 $DG \parallel BC$,

$\therefore \triangle ADG \sim \triangle ABC$.

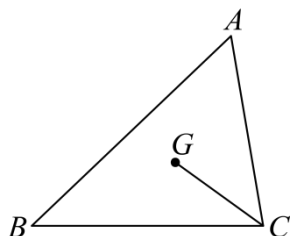
$\therefore DG = DE = 2$, $BC = 6$, $\triangle ADG$ 的高为 $h - 2$,

$$\therefore \frac{h-2}{h} = \frac{DG}{BC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \text{ 解得 } h = 3,$$

经检验, $h = 3$ 是原分式方程的解.

故答案为: 3.

17. 如图, 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, $AB = 4$, $BC = 3$, $\tan B = 1$, 则 $\cot \angle BCG =$ _____.

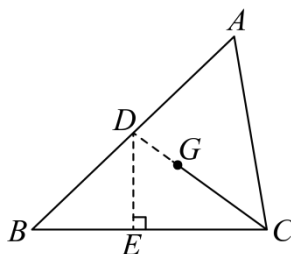


【答案】 $\frac{3\sqrt{2}-2}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解直角三角形以及重心的性质. 延长 CG 交 AB 于点 D , 过点 D 作 $DE \perp BC$ 于点 E , 根据重心的性质以及 $\tan B = 1$, 可求出 $BE = DE = \sqrt{2}$, 从而得到 $CE = BC - BE = 3 - \sqrt{2}$, 即可求解.

【详解】 解: 延长 CG 交 AB 于点 D , 过点 D 作 $DE \perp BC$ 于点 E ,



$\therefore$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, $AB = 4$,

$$\therefore BD = \frac{1}{2} AB = 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中, $\tan B = 1$,

$$\therefore \tan B = \frac{DE}{BE} = 1,$$

$$\therefore BE = DE,$$

$$\therefore BD = \sqrt{BE^2 + DE^2} = \sqrt{2}BE = \sqrt{2}DE,$$

$$\therefore BE = DE = \sqrt{2},$$

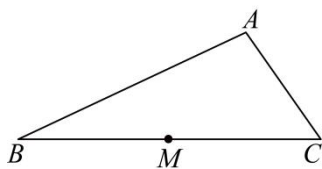
$$\therefore BC = 3,$$

$$\therefore CE = BC - BE = 3 - \sqrt{2},$$

$$\therefore \cot \angle BCG = \frac{CE}{DE} = \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}$$

18. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\tan B = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\tan C = \sqrt{2}$, $BC = 4\sqrt{2}$. 点 M 是 BC 中点, 点 D 在边 AB 上, 连接 DM , 将 $\triangle BDM$ 沿着直线 DM 翻折, 点 B 的对应点为点 E . 连接 AE , 如果 $AE \parallel BC$, 那么 $\angle BMD$ 的度数为_____.



【答案】 22.5° 或 67.5°

【解析】

【分析】 本题考查翻折的性质, 锐角三角函数的定义; 过 A 点作 $AN \perp BC$, 过点 E 作 $EF \perp BC$, 利用锐角三角函数的定义可求出 $AN = 2$, $BN = 3\sqrt{2}$, $NC = \sqrt{2}$, 平行线间的距离处处相等可得 $EF = AN = 2$, 然后分类讨论, 可求出 $\sin \angle BME = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\sin \angle FME = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 然后根据特殊角的三角函数值和翻折的性质即可求解.

【详解】 解: 过 A 点作 $AN \perp BC$,

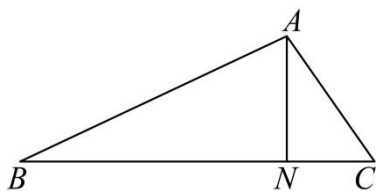
$$\therefore \tan B = \frac{AN}{BN} = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \tan C = \frac{AN}{NC} = \sqrt{2},$$

$$\therefore BN = \frac{3\sqrt{2}}{2} AN, \quad NC = \frac{\sqrt{2}}{2} AN,$$

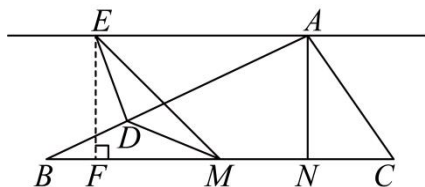
$$\therefore BC = BN + NC = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{2}}{2} AN + \frac{\sqrt{2}}{2} AN = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore AN = 2, \quad BN = 3\sqrt{2}, \quad NC = \sqrt{2},$$



过点 E 作 $EF \perp BC$ ，当点 E 在 A 点左侧，如图所示：



$\therefore$ 点 M 是 BC 中点，

$$\therefore BM = \frac{1}{2}BC = 2\sqrt{2},$$

$\therefore$ 将 $\triangle BDM$ 沿着直线 DM 翻折，点 B 的对应点为点 E ，

$$\therefore BM = EM = 2\sqrt{2}, \quad \angle BMD = \angle EMD = \frac{1}{2}\angle BME,$$

$\therefore AE \parallel BC$ ， $EF \perp BC$ ， $AN \perp BC$ ，即 EF 、 AN 为平行线间的距离，

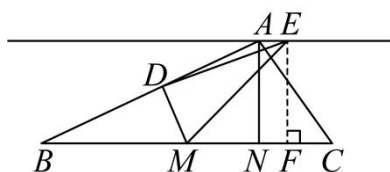
$$\therefore EF = AN = 2,$$

$$\therefore \sin \angle BME = \frac{EF}{EM} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \angle BME = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BMD = \frac{1}{2} \times 45^\circ = 22.5^\circ,$$

过点 E 作 $EF \perp BC$ ，当点 E 在 A 点右侧，如图所示：



$$\text{同理可得：} \sin \angle FME = \frac{EF}{EM} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \angle FME = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BME = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle BMD = \frac{1}{2} \times 135^\circ = 67.5^\circ.$$

综上： $\angle BMD = 22.5^\circ$ 或 67.5° 。

故答案为： 22.5° 或 67.5° 。

三、(本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $2(1 - \cot 30^\circ) + \frac{4 \sin 60^\circ}{3 \tan 30^\circ - \tan 45^\circ}$

【答案】 $5 - \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了特殊角的三角函数值, 二次根式的计算. 熟练掌握特殊角的三角函数值, 二次根式的运算顺序和法则是解题的关键.

根据特殊角的三角函数值化简, 而后根据二次根式的计算法则计算即可.

【详解】 解: $2(1 - \cot 30^\circ) + \frac{4 \sin 60^\circ}{3 \tan 30^\circ - \tan 45^\circ}$

$$= 2(1 - \sqrt{3}) + \frac{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 1}$$
$$= 2 - 2\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$$
$$= 2 - 2\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}$$
$$= 2 - 2\sqrt{3} + \frac{6 + 2\sqrt{3}}{2}$$
$$= 2 - 2\sqrt{3} + (3 + \sqrt{3})$$
$$= 2 - 2\sqrt{3} + 3 + \sqrt{3}$$
$$= 5 - \sqrt{3}.$$

20. 已知抛物线 $y = (x - 1)(x + 3)$.

(1) 写出这条抛物线的开口方向、对称轴, 以及它的变化情况;

(2) 将这条抛物线平移, 使其顶点 P 移到点 $Q(-3, 1)$ 的位置, 求抛物线平移的距离.

【答案】 (1) 开口方向向上; 对称轴为直线 $x = -1$; 当 $x < -1$ 时, y 随 x 的增大而减小; 当 $x > -1$ 时, y 随 x 的增大而增大

(2) 平移的距离为 $\sqrt{29}$

【解析】

【分析】本题考查抛物线的图象性质和抛物线平移，关键是将抛物线解析式转化为顶点式，确定顶点坐标，再结合平移的坐标变化计算距离.

(1) 先将抛物线解析式展开并转化为顶点式，根据二次项系数判断开口方向，根据顶点式确定对称轴，再结合开口方向分析函数的增减变化情况；

(2) 先确定原抛物线的顶点坐标，再计算原顶点与目标顶点的坐标差，利用勾股定理求出两点间的距离，即为平移的距离.

【小问 1 详解】

解：将抛物线 $y = (x-1)(x+3)$ 展开得 $y = x^2 + 2x - 3$ ，转化为顶点式为 $y = (x+1)^2 - 4$ ，

$\because$ 二次项系数 $1 > 0$ ，

$\therefore$ 抛物线开口向上；对称轴为直线 $x = -1$ ；

$\therefore$ 开口向上，

$\therefore$ 当 $x < -1$ 时， y 随 x 的增大而减小；当 $x > -1$ 时， y 随 x 的增大而增大；

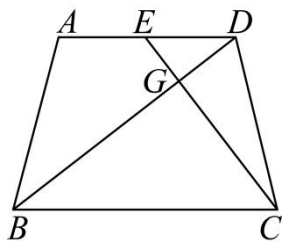
【小问 2 详解】

解：由 (1) 知原抛物线的顶点 P 坐标为 $(-1, -4)$ ，目标顶点 Q 坐标为 $(-3, 1)$ ，

两点的横坐标差为 $-3 - (-1) = -2$ ，纵坐标差为 $1 - (-4) = 5$ ，

根据勾股定理，平移的距离为 $\sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$.

21. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，已知 $AD:BC = 2:3$ ，点 E 是 AD 的中点，连接 EC 交 BD 于点 G .



(1) 如果 $\triangle EDG$ 的面积等于 5，求 $\triangle BCG$ 的面积；

(2) 设 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，求向量 $\overrightarrow{BG}$ 关于向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的分解式.

【答案】(1) 45 (2) $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a}$

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的判定和性质，向量的线性计算，熟练掌握相关知识点，是解题的关键：

(1) 证明 $\triangle EDG \sim \triangle CBG$ ，根据相似三角形的面积比等于相似比进行求解即可；

(2) 作 $FG \parallel AB, DH \parallel AB$ ，证明 $\triangle BFG \sim \triangle BHD$ ，推出 $FG = \frac{3}{4}DH$ ， $BF = \frac{3}{4}BH$ ，证明四边形 $ABHD$ 为平行四边形，得到 $BH = AD, HD = AB$ ，再根据三角形法则，进行求解即可。

【小问 1 详解】

解： $\because AD:BC = 2:3$ ，点 E 是 AD 的中点，

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AD, \quad DE:BC = 1:3,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle EDG \sim \triangle CBG,$$

$$\therefore S_{\triangle EDG} : S_{\triangle CBG} = \left(\frac{DE}{BC} \right)^2 = \frac{1}{9},$$

$$\therefore \triangle EDG \text{ 的面积等于 } 5,$$

$$\therefore \triangle BCG \text{ 的面积为 } 45;$$

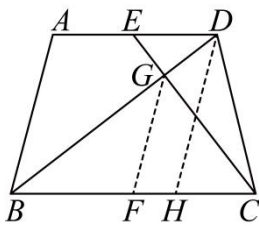
【小问 2 详解】

解： 由 (1) 知： $\triangle EDG \sim \triangle CBG$ ，

$$\therefore \frac{BG}{DG} = \frac{BC}{DE} = 3,$$

$$\therefore \frac{BG}{BD} = \frac{3}{4},$$

作 $FG \parallel AB, DH \parallel AB$ ，



则 $\triangle BFG \sim \triangle BHD$ ，

$$\therefore \frac{FG}{DH} = \frac{BF}{BH} = \frac{BG}{DB} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore FG = \frac{3}{4}DH, BF = \frac{3}{4}BH,$$

$$\therefore AD \parallel BC, AB \parallel DH,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABHD \text{ 为平行四边形},$$

$$\therefore HD = AB, BH = AD,$$

$$\therefore AD : BC = 2 : 3,$$

$$\therefore BH : BC = 2 : 3,$$

$$\therefore BH = \frac{2}{3}BC,$$

$$\therefore FG = \frac{3}{4}BA, BF = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}BC = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\vec{b}, FG = \frac{3}{4}\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a}.$$

22. 某小区为方便居民停车, 拟在角落处增设一个矩形停车位 $ABCD$, 车位的三面围墙及墙 DE 均高于车顶, 相关数据如图 1 所示. 已知拟停在该车位的汽车前车门完全打开时与车身夹角为 70° , 当前车门与车身夹角不小于 25° 时, 驾驶员能顺畅地出来. 图 2 是该汽车外形的部分数据, 例如: 数据②是前车门长度 100 厘米, 数据④是车外后视镜完全打开时车身占用的宽度为 215 厘米. 图 3 是车门打开的示意图. 假设车身始终与墙 BC 保持平行, 车外后视镜完全打开时与墙之间有 10 厘米的安全距离. (参考数据: $\sin 70^\circ \approx 0.94$, $\cos 70^\circ \approx 0.34$, $\tan 70^\circ \approx 2.76$, $\sin 25^\circ \approx 0.42$, $\cos 25^\circ \approx 0.91$, $\tan 25^\circ \approx 0.46$, $\sin 53^\circ \approx 0.80$, $\cos 53^\circ \approx 0.60$, $\tan 53^\circ \approx 1.33$.)

结合上述条件, 回答下列问题:

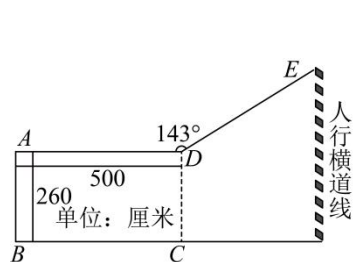


图1

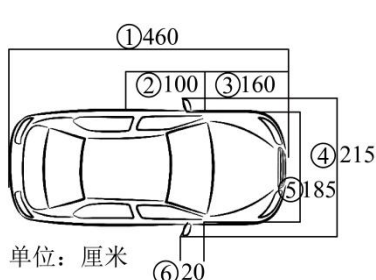


图2

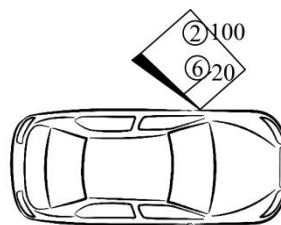


图3

- (1) 当该汽车倒车停入车位 $ABCD$ 区域时, 驾驶员是否能够顺畅地从车中出来? 请说明理由;
- (2) 已知车库门前有一条平行于 CD 且与 CD 距离 270 厘米的人行道, 当驾驶室的车门能完全打开时, 汽车是否占用到人行道? 请说明理由. (精确到 1 厘米)

【答案】 (1) 驾驶员能顺畅地从车中出来, 理由见解析

(2) 汽车不会占用到人行道, 理由见解析

【解析】

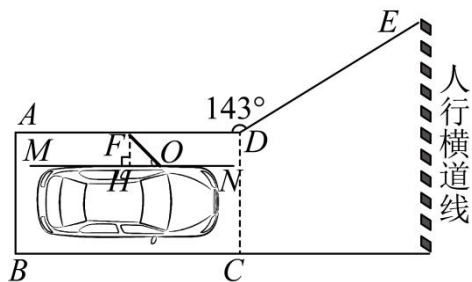
【分析】 (1) 先根据车身宽度与后视镜安全距离, 算出车身与墙的可用间距, 假设车门与车身夹角为临界

值 25° ，求出车门横向伸出的距离，比较伸出距离与可用间距，判断能否顺畅下车即可；

(2) 考虑极限状态，假设前车门顶在墙 DE 上，计算车门完全打开时的水平、垂直伸出长度，结合几何辅助线的线段关系，求出车头到 CD 的总距离，与人行道距离比较，判断是否占用。

【小问 1 详解】

解：如图，过前车门顶点 F 向车身 MN 作垂线，垂足为点 H 。



根据题意，车外后视镜完全打开时距离车身的距离为 $\frac{215-185}{2} = 15\text{cm}$ ， $FO = 100\text{cm}$ ，

$\therefore$ 车外后视镜完全打开时与墙之间有 10 厘米的安全距离，

$\therefore$ 此时另一侧车身与墙 BC 之间的距离为 $10 + 15 = 25(\text{cm})$ ，

则车身 MN 与墙 AD 之间的距离为 $260 - 185 - 25 = 50(\text{cm})$ 。

假设前车门 FO 与车身 MN 的夹角 $\angle FOH = 25^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle FHO$ 中， $\frac{FH}{FO} = \sin \angle FOH = \sin 25^\circ \approx 0.42$ ，

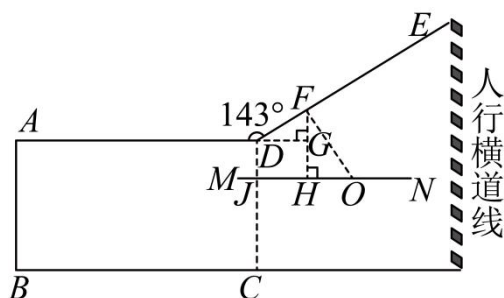
$\therefore FH = 0.42FO = 0.42 \times 100 = 42(\text{cm})$ 。

$\therefore 42 < 50$ ，

$\therefore$ 驾驶员能顺畅地从车中出来；

【小问 2 详解】

解：考虑极限状态，如图，前车门顶点 F 在墙 DE 上，过点 F 作 $FH \perp MN$ ，过点 D 作 $DG \perp FH$ ， DC 与 MN 交于点 J ，容易得到 $DG = JH$ ， $DJ = GH$ 。



当前车门完全打开时与车身夹角为 70° ，即 $\angle FOH = 70^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle FHO$ 中, $\frac{HO}{FO} = \cos \angle FOH = \cos 70^\circ \approx 0.34$, $\frac{FH}{FO} = \sin \angle FOH = \sin 70^\circ \approx 0.94$,

$\therefore HO = 0.34FO = 0.34 \times 100 = 34(\text{cm})$, $FH = 0.94FO = 0.94 \times 100 = 94(\text{cm})$.

由 (1), $DJ = GH = 50\text{cm}$, $\therefore FG = FH - GH = 44(\text{cm})$.

在 $\text{Rt}\triangle FHO$ 中, $\angle DFG = \angle ADE - \angle FGD = 53^\circ$, $\frac{DG}{FG} = \tan \angle DFG = \tan 53^\circ \approx 1.33$,

$\therefore DG = JH = 1.33FG = 1.33 \times 44 = 58.52(\text{cm})$,

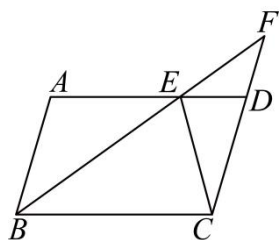
$\therefore JN = JH + HO + ON = 58.52 + 34 + 160 = 252.52(\text{cm})$,

$\therefore CD$ 与人行道的距离为 270 厘米, $270 > 252.52$,

$\therefore$ 汽车不会占用到人行道.

【点睛】 本题考查了三角函数的实际应用, 从题干和图形中提取信息和画出正确的示意图是解决问题的关键.

23. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 点 E 在边 AD 上, BE 、 CD 的延长线交于点 F , 连接 CE , 已知 $CE^2 = DE \cdot BC$.



(1) 求证: $\triangle ABE \sim \triangle EFC$;

(2) 求证: $CE \cdot CF = EF \cdot AD$.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的性质, 相似三角形的判定与性质, 掌握相关性质定理和判定定理是解题的关键.

(1) 先根据平行四边形的性质证明 $\angle DEC = \angle BCE$, 结合已知的 $CE^2 = DE \cdot BC$, 证明 $\triangle DEC \sim \triangle ECB$, 得到 $\angle FCE = \angle EBC$, 通过角的等量代换证明 $\angle AEB = \angle FCE$, 根据平行线的性质得到 $\angle ABE = \angle F$, 从而可证;

(2) 证明 $\triangle CEF \sim \triangle BCF$, 得到 $\frac{CE}{BC} = \frac{EF}{CF}$, 结合平行四边形的对应边相等, 即 $BC = AD$, 等量代换即可证明.

【小问 1 详解】

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB \parallel CD, \quad AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle BCE,$$

$$\therefore CE^2 = DE \cdot BC,$$

$$\therefore \frac{DE}{CE} = \frac{CE}{BC},$$

$$\therefore \triangle DEC \sim \triangle ECB,$$

$$\therefore \angle FCE = \angle EBC,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle EBC,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle FCE,$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle F,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle EFC;$$

【小问 2 详解】

证明：由 (1) 知， $\angle FCE = \angle FBC$ ，

$$\therefore \angle F = \angle F,$$

$$\therefore \triangle CEF \sim \triangle BCF,$$

$$\therefore \frac{CE}{BC} = \frac{EF}{CF},$$

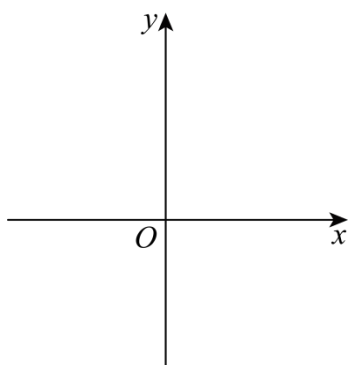
∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore BC = AD,$$

$$\therefore \frac{CE}{AD} = \frac{EF}{CF},$$

$$\therefore CE \cdot CF = EF \cdot AD.$$

24. 如图，平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $M_1: y = -x^2 + bx + 3$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 、 B ，与 y 轴交于点 C ，抛物线 M_1 的顶点为点 D 。



(1) 求 b 的值和点 D 的坐标;

(2) 已知以点 G 为顶点的抛物线 $M_2: y = -(x-m)^2 + 5-m$ 与抛物线 M_1 相交.

①设抛物线 M_1 、 M_2 的交点为点 E , 在抛物线 M_2 上, 如果点 E 与点 G 之间的部分是上升的, 求 m 的取值范围;

②连接 AD 、 AG , 过点 G 作 AD 的平行线, 交抛物线 M_2 于点 N , 如果 AG 平分 $\angle NAD$, 求 m 的值.

【答案】 (1) $b = 2$, $D(1, 4)$

(2) ① $m > 2$; ② $1 \pm \sqrt{10}$

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的综合应用, 二次函数图象的平移, 正确的求出函数解析式, 利用数形结合的思想进行求解是解题的关键:

(1) 待定系数法求出 b 的值, 一般式化为顶点式, 求出 D 点坐标;

(2) ①根据抛物线的解析式得到 $G(m, 5-m)$, 进而得到点 G 在直线 $y = -x + 5$ 上移动, 连接直线和抛物线 M_1 的解析式, 求出 x 的值, 再根据点 E 与点 G 之间的部分是上升的, 得到点 G 在点 H 的下方时满足题意, 即可得出结果;

②根据两条抛物线的 a 值相同, 得到 M_2 可以看作是 M_1 , 平移得到, 根据 $GN \parallel AD$, 得到 $AD = NG$, 结合 AG 平分 $\angle NAD$ 推出 $AN = NG$, 进而推出四边形 $ADGN$ 为菱形, 得到 $AD = DG$, 列出方程进行求解即可.

【小问 1 详解】

解: 把 $A(-1, 0)$ 代入 $M_1: y = -x^2 + bx + 3$, 得 $-(-1)^2 - b + 3 = 0$,

解得: $b = 2$,

$\therefore y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$,

$$\therefore D(1,4);$$

【小问2详解】

$$\text{解: } \textcircled{1} \because M_2: y = -(x-m)^2 + 5 - m,$$

$$\therefore G(m, -m+5),$$

$$\text{令 } x = m, y = -m+5, \text{ 则 } y = -x+5,$$

$\therefore$ 点 G 在直线 $y = -x+5$ 上运动,

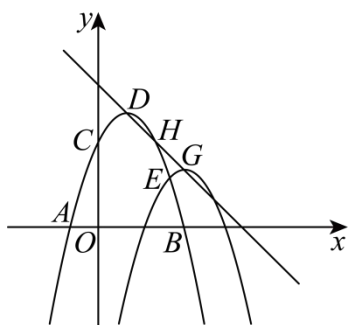
$$\text{令 } -x+5 = -x^2 + 2x+3, \text{ 解得 } x_1 = 1, x_2 = 2,$$

$\therefore$ 直线 $y = -x+5$ 与抛物线 M_1 的交点为 $(1, -1+5), (2, -2+5)$, 即 $(1, 4), (2, 3)$,

设点 $H(2, 3)$,

$\therefore$ 抛物线 M_1 、 M_2 的交点为点 E , 且在抛物线 M_2 上, 点 E 与点 G 之间的部分是上升的,

$\therefore$ 当点 G 在点 H 下方时, 符合题意, 即 $m > 2$;



$$\textcircled{2} \because M_1: y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4, \quad M_2: y = -(x-m)^2 + 5 - m,$$

$\therefore M_2$ 可以看作是 M_1 平移得到,

$\therefore D$ 为 M_1 的顶点, G 为 M_2 的顶点,

$\therefore G$ 是由 D 点平移得到,

$\therefore AD \parallel GN$,

$\therefore$ 点 N 是由点 A 平移得到, $\angle DAG = \angle AGN$,

$\therefore AD = NG$,

$\therefore$ 四边形 $ADGN$ 为平行四边形,

$\therefore AG$ 平分 $\angle NAD$,

$\therefore \angle DAG = \angle NAG$,

$$\therefore \angle NAG = \angle AGN,$$

$$\therefore AN = NG,$$

$\therefore$ 四边形 $ADGN$ 为菱形,

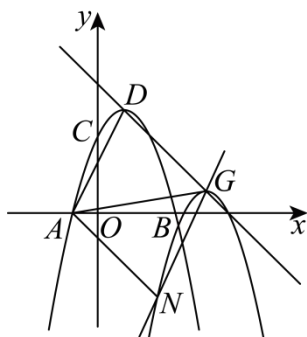
$$\therefore AD = DG,$$

$$\because A(-1,0), D(1,4), G(m, -m+5),$$

$$\therefore AD^2 = (-1-1)^2 + 4^2 = 20, DG^2 = (m-1)^2 + (-m+5-4)^2,$$

$$\therefore 20 = (m-1)^2 + (-m+5-4)^2,$$

解得 $m = 1 \pm \sqrt{10}$.



25. $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle ABC = 2\angle C$, BD 平分 $\angle ABC$.

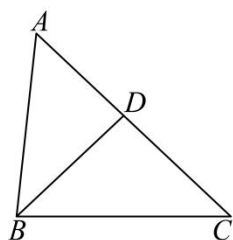


图1

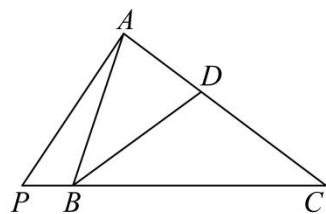


图2

(1) 如图 1, 如果 $AD = 4$, $DC = 5$, 求 BC 的长;

(2) 如图 2, 过点 A 作 AC 的垂线 AP , 与边 CB 的延长线交于点 P .

①试猜想线段 PC 与边 AB 的数量关系, 并证明;

②在线段 DB 上截取 $DQ = DA$, 连接 AQ , 当 $\angle PAQ = 2\angle BAQ$ 时, 探究是否存在实数 k , 使得

$AB = kBQ + PB$ 成立? 如果存在, 请求出 k 的值; 如果不存在, 请说明理由.

【答案】(1) BC 的长为 $\frac{15}{2}$

(2) ① $PC = 2AB$, 证明见解析; ②存在实数 k , 且 $k = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【解析】

【分析】(1) 利用角平分线性质的等角，进而判定等腰三角形，结合相似三角形的判定与性质，通过相似比计算线段长度；

(2) ①取 PC 中点 E ，连接 AE ，证明 $PC = 2AE$ ， $AE = AB$ 即可；

②通过角度关系推导出特殊角度，结合等腰三角形性质与三角形相似，分析线段间的等量关系，进而确定 k 的值.

【小问 1 详解】

解：∵ BD 平分 $\angle ABC$ ，

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2} \angle ABC.$$

$$\therefore \angle ABC = 2\angle C,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD = \angle C,$$

$$\therefore BD = CD = 5.$$

$$\therefore \angle ADB = \angle CBD + \angle C = 2\angle C = \angle ABC,$$

$$\therefore \triangle ADB \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DB}{BC} = \frac{AB}{AC}.$$

$$\therefore AD = 4, DC = 5,$$

$$\therefore AC = AD + CD = 9, BD = 5,$$

$$\therefore \frac{4}{AB} = \frac{AB}{9},$$

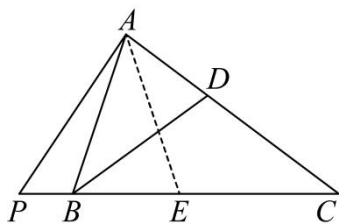
$$\therefore AB^2 = 36, AB = 6 \text{ (负值舍去)}.$$

$$\therefore \frac{BD}{BC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore BC = \frac{3BD}{2} = \frac{15}{2};$$

【小问 2 详解】

解：①如图，取 PC 中点 E ，连接 AE ，



$$\therefore AC \perp AP,$$

$\therefore \triangle APC$ 是直角三角形,

$$\therefore PC = 2AE, \quad AE = EC,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle C,$$

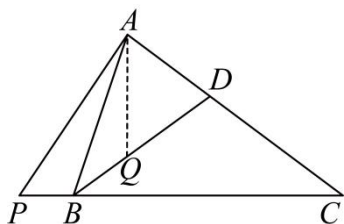
$$\therefore \angle AEB = \angle C + \angle EAC = 2\angle C = \angle ABC,$$

$$\therefore AB = AE,$$

$$\therefore PC = 2AB;$$

②如图, $\therefore DQ = DA$,

$$\therefore \angle DAQ = \angle AQD = \frac{180^\circ - \angle ADB}{2} = 90^\circ - \angle C.$$



$$\therefore \angle BAQ = 180^\circ - \angle C - \angle ABC - \angle DAQ = 90^\circ - 2\angle C.$$

$$\therefore \angle PAQ = 2\angle BAQ,$$

$$\therefore \angle PAQ = 180^\circ - 4\angle C.$$

$$\therefore \angle PAQ + \angle QAD = 180^\circ - 4\angle C + 90^\circ - \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle ABD = \angle CBD = 36^\circ.$$

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ABC = 72^\circ,$$

$$\therefore AC = BC,$$

同理: $AB = BD = CD$,

$$\therefore AD = AC - CD = AC - AB.$$

由 (1) 得 $\triangle ADB \sim \triangle ABC$,

$$\text{设 } \frac{AD}{AB} = \frac{DB}{BC} = \frac{AB}{AC} = m, \text{ 则 } AD = mAB, \quad AB = mAC, \quad BD = mBC,$$

$$\text{由 (1) 得 } AB^2 = AD \cdot AC, \text{ 即 } m^2 AC^2 = (AC - mAC) \cdot AC$$

$$\text{整理得 } m^2 + m - 1 = 0, \text{ 解得 } m = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ (负值舍去).}$$

由①得 $PC = 2AB = 2mBC$,

$$\therefore PB = PC - BC = (2m - 1)BC$$

$$\therefore AB - PB = (1 - m)BC, \quad DQ = DA = m^2BC,$$

$$\therefore BQ = BD - QD = m(1 - m)BC,$$

$$\therefore k = \frac{AB - PB}{BQ} = \frac{(1 - m)BC}{m(1 - m)BC} = \frac{1}{m} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2},$$

$\therefore$ 存在实数 k , 且 $k = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ 使得 $AB = kBQ + PB$ 成立.

【点睛】 本题主要考查相似三角形的判定与性质、直角三角形斜边中线的性质、等腰三角形判定与性质等知识, 涉及角度关系推导与线段长度计算, 综合性较强.