

浦东新区 2024 学年度第一学期期末练习卷

初三数学参考答案及评分说明

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)

1. B ; 2. C; 3. A; 4. B; 5. D; 6. C.

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. $\frac{2}{5}$; 8. $2\sqrt{5}-2$; 9. $3a-10b$; 10. 南偏西 65° ; 11. $1:\sqrt{3}$;

12. $>$;

13. $\frac{5}{4}$; 14. 12; 15. 3 ; 16. 10 ;

17. 5; 18. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

三、解答题：(本大题共 7 题，满分 78 分)

19. 解：原式 = $\frac{2 \times \frac{1}{2}}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1} - \sqrt{3} \times \sqrt{3}$ (8 分) (每个三角比的值各 2 分)

$$= \frac{1}{\sqrt{2}-1} - 3$$
 (1 分) (化简正确得 1 分)
$$= \sqrt{2} - 2$$
 (1 分) (计算正确得 1 分)

20. 解：(1) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，
 $\therefore$ 点 D 是边 AB 的中点，
 $\therefore CD = BD = \frac{1}{2}AB$ (1 分)
 $\therefore \angle DCB = \angle B$ (1 分)
 $\therefore \cos B = \frac{4}{5}$ ，
 $\therefore \cos \angle DCB = \frac{4}{5}$ (1 分)
 $\therefore AB = 10$ ，
 $\therefore CD = 5$ (1 分)
 $\therefore DE \perp CD$ ，
 $\therefore \angle CDE = 90^\circ$.
 $\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中， $\cos \angle DCB = \frac{CD}{CE} = \frac{4}{5}$.
 $\therefore CE = \frac{25}{4}$ (1 分)

(2) 过点 E 作 $EH \perp AB$ ，垂足为点 H (1 分)

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle CDE \text{ 中, } CD=5, CE=\frac{25}{4},$$

$$\therefore DE = \sqrt{CE^2 - CD^2} = \frac{15}{4}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, } \angle ACB=90^\circ, \therefore \cos B = \frac{BC}{AB}, \therefore BC=8.$$

$$\therefore BE = BC - CE = \frac{7}{4}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle BEH \text{ 中, } \cos B = \frac{4}{5}, \therefore \sin B = \frac{3}{5}. \therefore EH = \frac{21}{20}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle DEH \text{ 中, } \sin \angle BDE = \frac{EH}{DE} = \frac{7}{25}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

21. 解: (1) $-\frac{2}{3}\vec{a}, \frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}, \frac{3}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b} \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$

(2) 正确作图 $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

写出结论 $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

22. 解: 任务一【方案选择】方案一 / 方案二. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

【方案一】法 1: 在 Rt $\triangle ABC$ 中, $\angle B=90^\circ, \alpha=12^\circ, \tan \alpha = \frac{AB}{BC},$

$$\therefore AB = BC \tan \alpha. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

在 Rt $\triangle ABD$ 中, $\angle B=90^\circ, \beta=11.5^\circ, \tan \beta = \frac{AB}{BD},$

$$\therefore AB = BD \tan \beta \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\therefore BC \tan \alpha = BD \tan \beta, \text{ 即 } BC \tan \alpha = BC \tan \beta + CD \tan \beta. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore BC \tan 12^\circ = BC \tan 11.5^\circ + CD \tan 11.5^\circ.$$

解得: $BC \approx 226.67. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

$$\therefore AB \approx 48.3 \text{ 米}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

【方案一】法 2: 在 Rt $\triangle ABC$ 中, $\angle B=90^\circ, \alpha=12^\circ, \cot \alpha = \frac{BC}{AB},$

$$\therefore BC = AB \cot \alpha. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

在 Rt $\triangle ABD$ 中, $\angle B=90^\circ, \beta=11.5^\circ, \cot \beta = \frac{BD}{AB},$

$$\therefore BD = AB \cot \beta. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\therefore BD - BC = CD, \text{ 即 } AB \cot \beta - AB \cot \alpha = CD. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore AB \cot 11.5^\circ - AB \cot 12^\circ = 10.$$

解得: $AB \approx 47.6. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

$$\therefore AB \approx 47.6 \text{ 米}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

【方案二】法 1: 在 Rt $\triangle ABC$ 中, $\angle B=90^\circ, \alpha=12^\circ, \tan \alpha = \frac{AB}{BC},$

$$\therefore AB = BC \tan \alpha. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

在 Rt $\triangle AED$ 中, $\angle AED=90^\circ, \beta=11.7^\circ, \tan \beta = \frac{AE}{DE},$

$$\therefore AE = DE \tan \beta . \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

由题意可得: $BC=DE$, $BE=CD$.

$$\therefore AB - BE = AE, \text{ 即 } BC \tan \alpha - BE = DE \tan \beta . \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore BC \tan 12^\circ - 1.3 = BC \tan 11.7^\circ .$$

$$\text{解得: } BC \approx 216.67 . \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\therefore AB \approx 46.2 \text{ 米} . \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

【方案二】法 2: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $\alpha = 12^\circ$, $\cot \alpha = \frac{BC}{AB}$,

$$\therefore BC = AB \cot \alpha . \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $\beta = 11.7^\circ$, $\cot \beta = \frac{DE}{AE}$,

$$\therefore DE = AE \cot \beta . \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

由题意可得: $BC=DE$, $BE=CD$.

$$\therefore CB=DE, \text{ 即 } AB \cot \alpha = AE \cot \beta . \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore AB \cot 12^\circ = (AB - 1.3) \cot 11.7^\circ .$$

$$\text{解得: } AB \approx 50.6 . \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\therefore AB \approx 50.6 \text{ 米} . \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

50.8 米、45.4 米、46.8 米、49.9 米等答案比照得分.

任务二: 从物理 (测量)、地理 (海拔) 或数学 (乘法与除法的选择、精确度) 等角度进行分析, 言之有理均可得分. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

23. 证明: (1) $\because BE \perp CD$,

$$\therefore \angle CEB = \angle BED = 90^\circ . \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore \angle ECB + \angle CBE = 90^\circ . \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle DBE + \angle CBE = 90^\circ . \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore \angle ECB = \angle DBE . \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle CBE . \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

(2) 方法一:

$$\because BE \perp CD, \text{ 点 } F \text{ 是 } BC \text{ 的中点},$$

$$\therefore CF = EF .$$

$$\therefore \angle ECF = \angle CEF .$$

由 (1) 可知 $\angle ECB = \angle DBE$,

$$\therefore \angle CEF = \angle AED ,$$

$$\therefore \angle AED = \angle ABE . \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore \angle EAD = \angle BAE ,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle ABE . \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BE} = \frac{AD}{AE}.$$

又由 (1) 知 $\triangle BDE \sim \triangle CBE$,

$$\therefore \frac{ED}{BE} = \frac{BD}{BC}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BE} = \frac{BD}{BC}.$$

不妨设 $FB=FC=FE=a$,

$$\text{那么 } AB=2a, \quad AF=\sqrt{5}a, \quad AE=(\sqrt{5}-1)a, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BE} = \frac{AD}{AE},$$

$$\therefore AE^2 = AD \cdot AB, \quad \text{可得 } AD = (3-\sqrt{5})a. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore BD = 2a - (3-\sqrt{5})a = (\sqrt{5}-1)a. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore AE=BD.$$

$$\therefore BD^2 = AD \cdot AB. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

方法二: $\because$ 点 F 是 BC 的中点, $\angle CEB=90^\circ$,

$$\therefore CF=EF.$$

$$\therefore \angle ECF = \angle CEF.$$

由 (1) 可知 $\angle ECB = \angle DBE$,

$$\therefore \angle CEF = \angle AED,$$

$$\therefore \angle AED = \angle ABE. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore \angle EAD = \angle BAE,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle ABE. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BE} = \frac{AD}{AE}.$$

$$\therefore AE^2 = AD \cdot AB. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore \angle ECB = \angle DBE, \quad \angle BDE = \angle CDB,$$

$$\therefore \triangle BED \sim \triangle CBD. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{ED}{BD} = \frac{BE}{BC}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{即 } \frac{ED}{BE} = \frac{BD}{BC}.$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{BD}{BC}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore AB=BC,$$

$$\therefore AE=BD.$$

$$\therefore BD^2 = AD \cdot AB. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

使用其他方法证明, 比照得分.

24. 解: (1) 将 $A(-3,0)$, $C(0,5)$ 代入解析式, 有: $\begin{cases} 9a+6a+c=0, \\ c=5. \end{cases}$ (2 分)

解得: $a=-\frac{1}{3}$, $c=5$.

$\therefore$ 抛物线 M_1 的解析式为: $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+5$ (2 分)

(2) 方法一:

①由题意, 抛物线 M_2 的解析式可设为: $y=-\frac{1}{3}(x-1)^2+\frac{16}{3}-m$.

那么: $D(1, \frac{16}{3}-m)$, $E(0, 5-m)$ (1 分)

又 $\because$ 点 P 与点 $A(-3,0)$ 重合, 即直线 DE 过点 A , 过点 D 作 $DH \perp x$ 轴, 垂足为点 H , 易得 $DH \parallel OE$,

$\therefore \frac{EO}{DH} = \frac{AO}{AH}$, 代入有: $\frac{5-m}{\frac{16}{3}-m} = \frac{3}{4}$ (2 分)

$\therefore m=4$ (1 分)

方法二:

①由题意, 抛物线 M_2 的解析式可设为: $y=-\frac{1}{3}(x-1)^2+\frac{16}{3}-m$.

那么: $D(1, \frac{16}{3}-m)$, $E(0, 5-m)$ (1 分)

直线 DE 的解析式为: $y=\frac{1}{3}x+5-m$, $\therefore P(3m-15, 0)$ (2 分)

又 $\because$ 点 P 与点 $A(-3,0)$ 重合, $\therefore 3m-15=-3$, $\therefore m=4$ (1 分)

② 记抛物线对称轴与 x 轴交于点 H , 那么 $H(1,0)$, 且 $DH \parallel BB' \parallel y$ 轴.

当点 P 在点 B 左侧时, 由 $\frac{DH}{HB} = \frac{BB'}{PB}$, 有: $\frac{\frac{16}{3}-m}{4} = \frac{m}{20-3m}$; (1 分)

当点 P 在点 B 右侧时, 仍由 $\frac{DH}{HB} = \frac{BB'}{PB}$, 有: $\frac{m-\frac{16}{3}}{4} = \frac{m}{3m-20}$; (1 分)

解得: $m = \frac{20 \pm 4\sqrt{5}}{3}$, $\therefore$ 点 D 的坐标为 $(1, \frac{-4 \pm 4\sqrt{5}}{3})$ (2 分)

使用锐角的三角比或其他方法求解, 比照得分.

25. 解: (1) $\because PC=2PO$, $PG \parallel CD$, $\therefore \frac{OG}{OD} = \frac{OP}{OC} = \frac{1}{3}$ (1 分)

在平行四边形 $ABCD$ 中, $OA=OC$, $\therefore \frac{CP}{CA} = \frac{CP}{2CO} = \frac{1}{3}$ (1 分)

又 $\because PE \parallel AD$, $\therefore \frac{CP}{CA} = \frac{CE}{CD} = \frac{1}{3}$ (1 分)

$\therefore \frac{OG}{OD} = \frac{CE}{CD}$ (1 分)

$\therefore EG \parallel OC$ (1 分)

(2) $\because \angle ABC=90^\circ$, $\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 为矩形.

$\therefore OC=OD$, $\therefore \angle GDE=\angle PCE=\angle CPF$, (1 分)

又 $\because \angle CFP=\angle ABC=90^\circ$, 且 $\angle DEG < 90^\circ$,

$\therefore$ 只能 $\angle DGE=90^\circ$, $\angle DEG=\angle PGE=\angle PCF$ (1 分)

$\therefore$ 此时有: $\triangle DGE \sim \triangle PFC \sim \triangle ABC$.

设 $CE=4k$, 那么 $PE=6k$, $PG=9k$, $EG=3\sqrt{13}k$, $DE=13k$ (2 分)

$\therefore \frac{OP}{OC} = \frac{PG}{CD} = \frac{9}{17}$, $\therefore \frac{OP}{PC} = \frac{9}{8}$ (1 分)

(3) $\because BA=BC$, $\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 为菱形.

设 $FB=FG=a$, $PF=FC=CE=b$, $\therefore GP=a-b$.

$\because GP \parallel CE$, $\therefore \frac{PG}{CE} = \frac{AP}{AC} = \frac{BF}{BC}$, $\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{a}{a+b}$, $\therefore a^2 - ab - b^2 = 0$.

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$, $\therefore \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (负根已舍).

$\therefore \frac{DG}{GB} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\therefore \frac{DG}{GB} = \frac{BG}{BD} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (2 分)

$\therefore \frac{DG}{DA} = \frac{DA}{DB}$, 又 $\because \angle ADG = \angle BDA$, $\therefore \triangle DGA \sim \triangle DAB$ (1 分)

$\therefore$ 设 $\angle DAG = \angle DBA = \angle ADB = \alpha$, 那么 $\angle BAG = \angle BGA = 2\alpha$.

$\therefore 5\alpha = 180^\circ$, $\therefore \alpha = 36^\circ$. $\therefore \angle ABC = 72^\circ$ (1 分)

(2) (3) 中画对图形或者直接写对答案可得 1 分, 但既画对图形又直接写对答案每小问仍得 1 分.