

杨浦区 2024 学年度第二学期初三质量调研 (一)

数学学科

(测试时间: 100 分钟, 满分: 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列根式中, 是最简二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{\frac{1}{6}}$ B. $\sqrt{6}$ C. $\sqrt{12}$ D. $\sqrt{20}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查最简二次根式; 根据最简二次根式的定义及二次根式的性质逐一判断即可.

【详解】 解: A. $\sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, 不是最简二次根式, 不符合题意;

B. $\sqrt{6}$ 是最简二次根式, 符合题意;

C. $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, 不是最简二次根式, 不符合题意;

D. $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, 不是最简二次根式, 不符合题意;

故选: B.

2. 下列计算中, 正确的是 ()

- A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ B. $a^2 + a^2 = 2a^4$
- C. $(-a^3)^2 = a^6$ D. $6a^6 \div 2a^2 = 3a^3$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查了同底数幂乘法计算, 积的乘方计算, 单项式除以单项式和合并同类项, 根据相关

计算法则分别求出对应选项中式子的结果即可得到答案.

【详解】解: A、 $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$, 原式计算错误, 不符合题意;

B、 $a^2 + a^2 = 2a^2$, 原式计算错误, 不符合题意;

C、 $(-a^3)^2 = a^6$, 原式计算正确, 符合题意;

D、 $6a^6 \div 2a^2 = 3a^4$, 原式计算错误, 不符合题意;

故选: C.

3. 如果反比例函数 $y = \frac{2-m}{x}$ 的图像上有两点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 当 $x_1 < x_2 < 0$ 时, 有 $y_1 < y_2$, 那么 m 的取值范围是 ()

A. $m < 0$

B. $m > 0$

C. $m < 2$

D. $m > 2$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查反比例函数的性质, 结合题意得出当 $x < 0$ 时, 反比例函数 $y = \frac{2-m}{x}$ 中 y 随 x 的增大而增大, 得到 $2-m < 0$, 计算求解即可.

【详解】解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{2-m}{x}$ 的图像上有两点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$,

当 $x_1 < x_2 < 0$ 时, 有 $y_1 < y_2$,

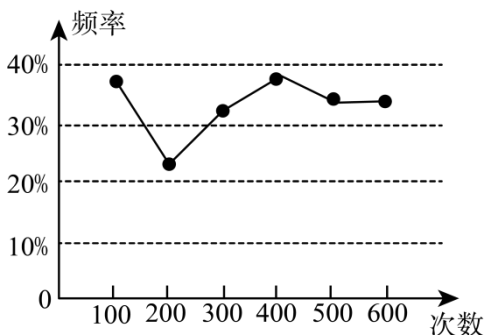
$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, 反比例函数 $y = \frac{2-m}{x}$ 中 y 随 x 的增大而增大,

$\therefore 2-m < 0$

得 $m > 2$,

故选: D.

4. 小王为了统计某一试验结果出现的频率, 利用计算机进行模拟试验, 并绘制出如图所示的统计图, 那么符合这一试验结果的可能是 ()



A. 掷一枚质地均匀的骰子, 出现 1 点朝上的概率

- B. 掷一枚质地均匀的骰子，出现奇数点朝上的概率
- C. 掷一枚质地均匀的骰子，出现素数点朝上的概率
- D. 掷一枚质地均匀的骰子，出现合数点朝上的概率

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查频率的计算，根据频数、频率的定义，确定各选项中，符合条件的对象的频率，作出判断.

【详解】解：图中，符合该结果的频率在30%和35%之间

- A. 掷一枚质地均匀的骰子，出现1点朝上的频率约为 $\frac{1}{6} \approx 17\%$ ，不合题意；
- B. 掷一枚质地均匀的骰子，出现奇数点朝上的概率为 $\frac{3}{6} = 50\%$ ，不合题意；
- C. 掷一枚质地均匀的骰子，出现素数点（2，3，5）朝上的概率为 $\frac{3}{6} = 50\%$ ，不符合题意；
- D. 掷一枚质地均匀的骰子，出现合数点（4，6）朝上的概率约为 $\frac{2}{6} \approx 33\%$ ；

故选：D.

5. 下列命题中正确的是（ ）

- A. 对角线相等的四边形是菱形
- B. 对角线互相垂直的四边形是菱形
- C. 对角线相等的平行四边形是菱形
- D. 对角线互相垂直的平行四边形是菱形

【答案】D

【解析】

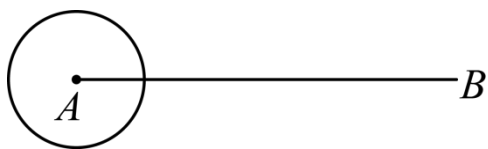
【详解】试题解析：对角线互相垂直平分的四边形是菱形；对角线互相垂直的平行四边形是菱形；
故选D.

点睛：菱形的判定方法有：有一组邻边相等的平行四边形是菱形.

对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

四条边都相等的四边形是菱形.

6. 如图，已知线段AB的长为10，圆A的半径为2，点P是线段AB上一点，以B为圆心、BP为半径作圆，将圆B绕点P旋转180°得到圆C，点C是点B的对应点，如果圆A与圆C相切，那么符合条件的点P的个数是（ ）



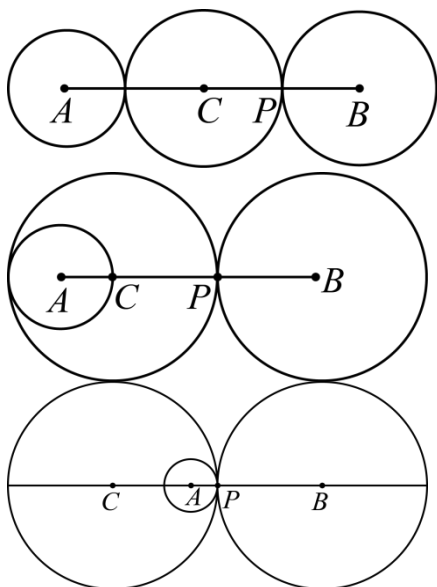
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查了圆与圆的位置关系，两个圆相切有外切和内切两种情况，据此画出内切和外切的示意图即可得到答案.

【详解】 解：如图所示，当圆 A 与圆 C 相切外切和内切时，分别有 1 个和 2 个点 P 符合题意，



故选： C.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 化简： $\sqrt{8a} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2\sqrt{2a}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了化简二次根式，直接根据二次根式的性质化简即可.

【详解】 解： $\sqrt{8a} = 2\sqrt{2a}$ ，

故答案为： $2\sqrt{2a}$.

8. 分解因式： $9x^2 - 4 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(3x+2)(3x-2)$

【解析】

【分析】 本题主要考查因式分解，直接运用平方差公式进行因式分解即可.

【详解】 解: $9x^2 - 4 = (3x + 2)(3x - 2)$,

故答案为: $(3x + 2)(3x - 2)$.

9. 方程 $\sqrt{2x - 4} = 2$ 的解是_____.

【答案】 $x = 4$

【解析】

【分析】 本题主要考查无理方程的解法; 根据两边同时平方, 计算求解, 再进行检验即可.

【详解】 解: $\sqrt{2x - 4} = 2$

两边同时平方得

$$2x - 4 = 4,$$

解得: $x = 4$,

经检验, $x = 4$ 是原方程的解,

即原方程的解为 $x = 4$;

故答案为: $x = 4$.

10. 已知关于 x 的方程 $x^2 - ax - 2 = 0$, 判断该方程的根的情况是_____.

【答案】 有两个不相等的实数根

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 与根的关系, 当 $\Delta > 0$ 时, 一元二次方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 一元二次方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 一元二次方程没有实数根. 求出根的判别式判断即可.

【详解】 解: $\because x^2 - ax - 2 = 0$,

$$\therefore \Delta = (-a)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = a^2 + 8 > 0,$$

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根.

故答案为: 有两个不相等的实数根.

11. 某新能源汽车销售公司 2022 年盈利 a 万元, 如果该公司每年盈利增长的百分率都为 10%, 那么该公司 2024 年盈利_____万元. (用含 a 的代数式表示)

【答案】 $1.21a$

【解析】

【分析】本题主要考查了列代数式，根据题意可得 2023 年盈利 $a(1+10\%)$ 万元，则 2024 年盈利 $a(1+10\%)^2$ 万元.

【详解】解：由题意得，该公司 2024 年盈利 $a(1+10\%)^2 = 1.21a$ 万元，
故答案为： $1.21a$.

12. 如果将直线 $y = -2x - 1$ 平移，使其经过点 $(0, 3)$ ，那么平移后所得直线的表达式是_____.

【答案】 $y = -2x + 3$ ## $y = 3 - 2x$

【解析】

【分析】 本题主要考查一次函数图象平移，待定系数法求一次函数解析式；设平移后所得直线的表达式是 $y = -2x + b$ ，将点 $(0, 3)$ 代入，计算得出 $b = 3$ 即可求出.

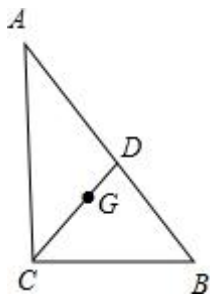
【详解】解：根据题意，经过平移 k 值不变，
 $\therefore$ 设平移后所得直线的表达式是 $y = -2x + b$ ，
将点 $(0, 3)$ 代入，得 $b = 3$
 $\therefore y = -2x + 3$
故答案为： $y = -2x + 3$.

13. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，点 G 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的重心，如果 $CG = 6$ ，那么斜边 AB 的长等于_____.

【答案】 18

【解析】

【详解】 CD 为斜边上的中线，如图，



$\therefore$ 点 G 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的重心，
 $\therefore CG : GD = 2 : 1$ ，

$$\therefore DG = \frac{1}{2} CG = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$$

$$\therefore CD = 3 + 6 = 9,$$

$$\therefore AB = 2CD = 18.$$

故答案为 18.

14. 某中学为了了解全校 600 名学生平均每周周末在家体育锻炼时间的情况，随机调查了该校 50 名学生一月内平均每周周末在家体育锻炼时间的情况，结果如下表：

时间（分）	40	45	50	55	60	65	70
人数	10	10	8	6	5	6	5

请估计该学校平均每周周末在家体育锻炼时间不少于 60 分钟的学生大约有_____人.

【答案】192

【解析】

【分析】此题考查了样本估计总体，用 600 乘以样本中不少于 60 分钟的学生人数所占的百分比求解即可.

【详解】解： $600 \times \frac{5+6+5}{50} = 192$ （人）.

$\therefore$ 估计该学校平均每周周末在家体育锻炼时间不少于 60 分钟的学生大约有 192 人.

故答案为：192.

15. 如果抛物线不经过第二象限，且它的对称轴在 y 轴右侧，那么这条抛物线的表达式可以是_____（只需写出一个即可）.

【答案】 $y = -x^2 + 2x - 2$

【解析】

【分析】本题主要考查抛物线的表达式；设抛物线为 $y = ax^2 + bx + c$ ，根据题意求出 a, b, c 的取值范围并对其取值即可求出.

【详解】解：设抛物线为 $y = ax^2 + bx + c$

$\therefore$ 抛物线不经过第二象限，

$$\therefore a < 0$$

设 $a = -1$,

$\therefore$ 对称轴在 y 轴右侧，

$$\therefore -\frac{b}{2a} = \frac{b}{2} > 0$$

$$\therefore b > 0$$

$$\text{设 } b = 2$$

$$\therefore \text{抛物线为 } y = ax^2 + bx + c$$

$$\therefore y = -x^2 + 2x + c$$

$\therefore$ 抛物线不经过第二象限,

$$\therefore \text{当 } x = 1 \text{ 时, } y = -1 + 2 + c \leq 0$$

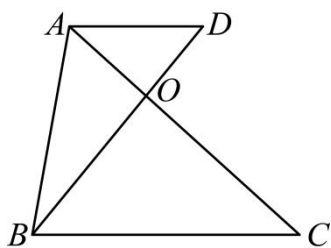
$$\therefore c \leq -1$$

$$\therefore \text{设 } c = -2$$

$$\therefore y = -x^2 + 2x - 2$$

故答案为: $y = -x^2 + 2x - 2$.

16. 如图, $AD \parallel BC$, $BC = 2AD$, AC 与 BD 相交于点 O , 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AO} = \vec{b}$, 那么用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD}$ 是_____.



【答案】 $\frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$

【解析】

【分析】 本题主要考查向量的线性运算, 相似的判定和性质; 根据平行得到 $\triangle AOD \sim \triangle COB$, 根据相似的性质得到 $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, 再根据向量的三角形法则得到 $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{a})$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}$ 即可求出.

【详解】 解: $\because AD \parallel BC$

$$\therefore \triangle AOD \sim \triangle COB$$

$$\text{又 } \because BC = 2AD$$

$$\therefore \frac{OD}{OB} = \frac{AD}{CB} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

$$\therefore \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = -\vec{b} + \vec{a}$$

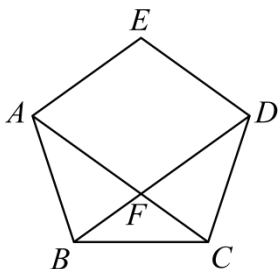
$$\therefore \overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{a})$$

$$\therefore \overrightarrow{OD} = -\frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$$

故答案为: $\frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$.

17. 如图, 已知正五边形 $ABCDE$ 的边长是 4, 联结 AC 、 BD 交于点 F , 那么 CF 的长是_____.



【答案】 $2\sqrt{5} - 2$

【解析】

【分析】 本题考查了正多边形内角和定理, 相似三角形的性质与判定, 等腰三角形的性质与判定等, 先求出 $\angle CBD = \angle CDB = \angle ACB = 36^\circ$, 则可求出 $BF = CF$, $\angle DFC = \angle DCF$, 则 $DF = DC = 4$, 设 $BF = CF = x$, 则 $BD = x + 4$, 证明 $\triangle FBC \sim \triangle CBD$, 利用相似三角形的性质列出比例式求解即可.

【详解】 解: $\because$ 五边形 $ABCDE$ 是正五边形,

$$\therefore BC = CD = 4, \angle BCD = \frac{180^\circ \times (5-2)}{5} = 108^\circ,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle CDB = \frac{180^\circ - \angle BCD}{2} = 36^\circ,$$

同理可得 $\angle ACB = 36^\circ$,

$$\therefore \angle FBC = \angle FCB = \angle CDB = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle DCF = \angle BCD - \angle BCA = 72^\circ, \angle DFC = \angle FBC + \angle FCB = 72^\circ, BF = CF,$$

$$\therefore \angle DFC = \angle DCF,$$

$$\therefore DF = DC = 4,$$

设 $BF = CF = x$, 则 $BD = x + 4$,

$$\therefore \angle FBC = \angle FCB = \angle CDB = 36^\circ,$$

$$\therefore \triangle FBC \sim \triangle CBD,$$

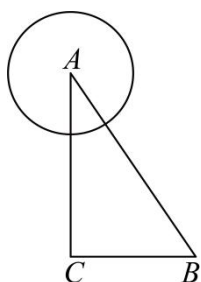
$$\therefore \frac{BD}{BC} = \frac{CD}{CF}, \text{ 即 } \frac{x+4}{4} = \frac{4}{x},$$

解得 $x = 2\sqrt{5} - 2$ 或 $x = -2\sqrt{5} - 2$ (舍去),

$$\therefore CF = 2\sqrt{5} - 2,$$

故答案为: $2\sqrt{5} - 2$.

18. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 4$, 以 A 为圆心、2 为半径作圆, 点 D 是圆 A 上一点, 连接 CD , 点 E 是 CD 的中点, 连接 BE , 那么 BE 长度的取值范围是_____.



【答案】 $4 \leq BE \leq 6$

【解析】

【分析】 本题考查了点与圆的位置关系、三角形中位线定理和勾股定理. 根据题意正确作出辅助线、懂得利用中位线定理确定点 E 的运动轨迹是解题的关键.

先取 AC 的中点 M , 点 E 是 CD 的中点, 连接 AD 、 ME , 根据中位线定理确定点 E 的运动轨迹是在以 M 为圆心, 半径为 1 的圆上, 然后根据勾股定理求出 BM 的长度, 最后确定 BE 的范围.

【详解】 解: 取 AC 的中点 M , 连接 AD 、 ME 、 BM , 如图:

$\because$ 点 E 是 CD 的中点, 点 M 是 AC 的中点, $AD = 2$,

$$\therefore ME \parallel AD, ME = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times 2 = 1,$$

$\therefore$ 当点 D 在圆 A 上时, 点 E 始终在以 M 为圆心, 半径为 1 的圆上,

$\because$ 点 M 是 AC 的中点,

$$\therefore CM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$$

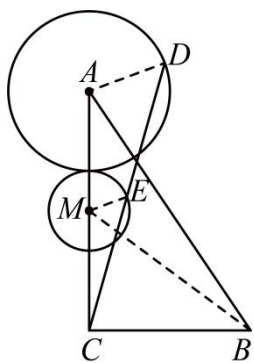
$$\therefore \text{在 Rt}\triangle BCM \text{ 中, } BM = \sqrt{CM^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\therefore BM - 1 \leq BE \leq BM + 1,$$

$$\therefore 5 - 1 \leq BE \leq 5 + 1,$$

$$\text{即 } 4 \leq BE \leq 6.$$

故答案为: $4 \leq BE \leq 6$.



三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. 先化简，再求值： $\left(a+1-\frac{2a-1}{a-1}\right) \div \frac{a^2-4a+4}{a-1}$ ，其中 $a=\sqrt{3}$ 。

【答案】 $\frac{a}{a-2}$ ， $2\sqrt{3}-3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式的化简求值，分母有理化，先把小括号内的式子通分化简，再把除法变成乘法后约分化简，最后代值计算即可打得到答案。

$$\begin{aligned}
 \text{【详解】 解：} & \left(a+1-\frac{2a-1}{a-1}\right) \div \frac{a^2-4a+4}{a-1} \\
 &= \frac{a^2-1-2a+1}{a-1} \div \frac{(a-2)^2}{a-1} \\
 &= \frac{a^2-2a}{a-1} \cdot \frac{a-1}{(a-2)^2} \\
 &= \frac{a(a-2)}{a-1} \cdot \frac{a-1}{(a-2)^2} \\
 &= \frac{a}{a-2}, \\
 \text{当 } a=\sqrt{3} \text{ 时，原式} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} = \frac{3-2\sqrt{3}}{3-4} = 2\sqrt{3}-3.
 \end{aligned}$$

$$20. \text{ 解不等式组：} \begin{cases} 6-3x > 2(x-2) \\ \frac{2x-1}{2}-3x \leq 4 \end{cases}$$

【答案】 $-\frac{9}{4} \leq x < 2$

【解析】

【分析】 分别解出两个不等式的解，再归纳不等式组的解集，即可解答。

本题考查了解一元一次不等式组，需要分别解两个不等式，再找出它们的解集的公共部分.

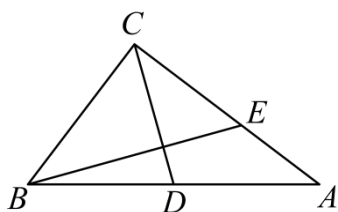
【详解】解：
$$\begin{cases} 6-3x > 2(x-2) \text{ ①} \\ \frac{2x-1}{2} - 3x \leq 4 \text{ ②} \end{cases}$$

由①，得 $x < 2$ ，

由②，得： $x \geq -\frac{9}{4}$ ，

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-\frac{9}{4} \leq x < 2$.

21. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 8$ ， $\tan A = \frac{3}{4}$ ， CD 是中线，作 $BE \perp CD$ ，交边 AC 于点 E .



(1) 求 CE 的长；

(2) 求 $\angle EBA$ 的正切值.

【答案】(1) $CE = \frac{9}{2}$

(2) $\frac{7}{24}$

【解析】

【分析】(1) 首先解直角三角形得到 $BC = 6$ ，勾股定理求出 AB ，然后证明出 $\angle CBE = \angle ACD = \angle A$ ，

得到 $\tan \angle CBE = \tan \angle A = \frac{3}{4}$ ， $\frac{CE}{BC} = \frac{3}{4}$ ，然后代数求解即可；

(2) 如图所示，过点 E 作 $EF \perp AB$ 于点 F ，求出 AE ，然后利用 $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}$ 求出 $EF = \frac{21}{10}$ ，然后

解直角三角形求解即可.

【小问 1 详解】

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，

$$\therefore \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}, \text{ 即 } \frac{BC}{8} = \frac{3}{4}$$

解得 $BC = 6$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 10$$

$\because CD$ 是中线

$$\therefore CD = BD = AD = \frac{1}{2}AB = 5$$

$$\therefore \angle A = \angle ACD$$

$$\because \angle ACD + \angle BCD = \angle A + \angle BCD = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because BE \perp CD$$

$$\therefore \angle CBE + \angle BCD = 90^\circ$$

$$\therefore \angle CBE = \angle ACD = \angle A$$

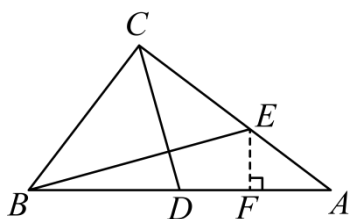
$$\therefore \tan \angle CBE = \tan \angle A = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{CE}{BC} = \frac{3}{4}, \text{ 即 } \frac{CE}{6} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore CE = \frac{9}{2};$$

【小问 2 详解】

如图所示，过点 E 作 $EF \perp AB$ 于点 F



$$\because CE = \frac{9}{2}, \quad AC = 8$$

$$\therefore AE = AC - CE = 8 - \frac{9}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{EF}{AE}, \text{ 即 } \frac{6}{10} = \frac{EF}{\frac{7}{2}}$$

$$\therefore EF = \frac{21}{10}$$

$$\because \tan A = \frac{EF}{AF} = \frac{3}{4}, \text{ 即 } \frac{\frac{21}{10}}{AF} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore AF = \frac{14}{5}$$

$$\therefore BF = AB - AF = 10 - \frac{14}{5} = \frac{36}{5}$$

$$\therefore \tan \angle EBA = \frac{EF}{BF} = \frac{\frac{21}{10}}{\frac{36}{5}} = \frac{7}{24}$$

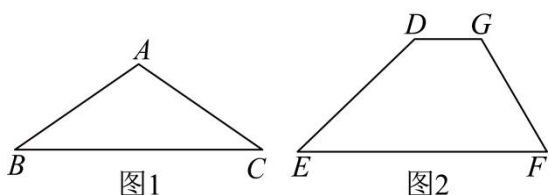
【点睛】此题考查了解直角三角形，勾股定理，直角三角形斜边中线的性质，解题的关键是掌握以上知识点.

22. 为了让游客更好的观赏花圃景观，某植物园打算在不同形状的花圃内都建设一条半圆形的步道，要求一：步道的外围不超过各自花圃的范围；要求二：半圆形步道的圆心在花圃的某一条边上；要求三：半圆形步道的半径尽可能的大（忽略步道的宽度）.

根据以下不同形状的花圃分别按要求画出这个半圆形步道的圆心（不用写作法，保留痕迹），并直接写出不同形状的花圃下半圆形步道的半径.

花圃一：如图1， ABC 是一个等腰三角形的花圃，经测量 $AB = AC = 13\text{m}$ ， $BC = 24\text{m}$ ，半圆形步道的圆心在边 BC 上；

花圃二：如图2，四边形 $DEFG$ 是一个梯形的花圃， $DG \parallel EF$ ，经测量 $DG = 9\text{m}$ ， $EF = 27\text{m}$ ， $\angle E = 45^\circ$ ， $\tan F = 2$ ，半圆形步道的圆心在边 EF 上.（结果保留根号）



【答案】花圃一：画图见解析，半圆形步道的半径为 $\frac{60}{13}\text{cm}$ ；花圃二：画图见解析，半圆形步道的半径为 $(36\sqrt{2} - 18\sqrt{5})\text{cm}$

【解析】

【分析】花圃一：分别以点 B 和点 C 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}BC$ 为半径画弧，两弧交于 F ，连接 AF 交 BC 于点 D 即为所求的圆心；过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，利用三线合一得到 $BD = \frac{1}{2}BC = 12\text{cm}$ ，勾股定理求出

$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 5(\text{cm})$ ，然后利用等面积法求解即可；

花圃二：延长 CD ， FG 交于点 H ，尺规作 $\angle EHF$ 的角平分线交 EF 于点 A 即为所求作的圆心；过点 A 作 $AN \perp HF$ 于点 N ，过点 A 作 $AM \perp HE$ 于点 M ，设 $FN = x$ ，则 $AM = AN = 2x$ ， $EA = 2\sqrt{2}x$ ，

$AF = \sqrt{AN^2 + NF^2} = \sqrt{5}x$ ，根据 $EF = 27\text{m}$ 列方程求解即可.

【详解】花圃一：根据题意得，当半圆与 AB ， AC 相切时，半圆的半径最大，
如图所示，点 D 即为所求作的圆心；

过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，故 DE 为半圆的半径

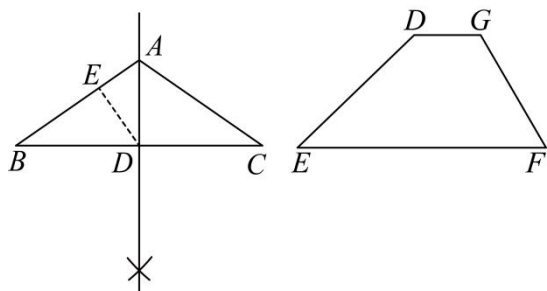


图1

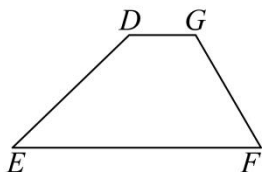


图2

$$\because AB = AC = 13\text{m}, BC = 24\text{m}$$

由作图得， AD 垂直平分 BC

$$\therefore BD = \frac{1}{2}BC = 12\text{cm}$$

$$\therefore AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 5(\text{cm})$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BD = \frac{1}{2}AB \cdot DE$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = \frac{1}{2} \times 13DE$$

$$\therefore DE = \frac{60}{13}\text{cm}$$

$$\therefore \text{半圆形步道的半径为 } \frac{60}{13}\text{cm};$$

花圃二：根据题意得，当半圆与 DE ， GF 相切时，半圆的半径最大，
如图所示，点 A 即为所求作的圆心；

过点 A 作 $AN \perp HF$ 于点 N ，过点 A 作 $AM \perp HE$ 于点 M

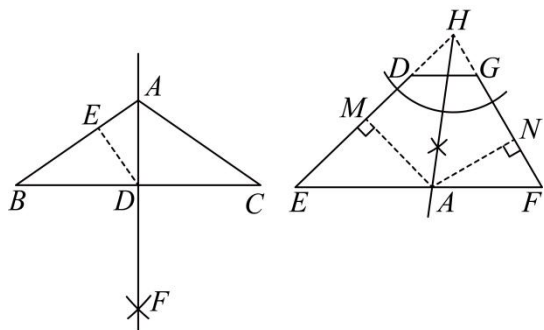


图1

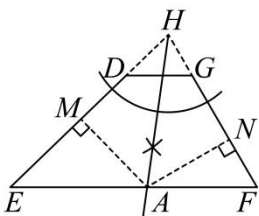


图2

$$\therefore AM = AN, \text{ 且 } AM, AN \text{ 为半圆的半径}$$

$$\therefore \angle E = 45^\circ$$

$\therefore \triangle MEA$ 是等腰直角三角形

$$\therefore \tan F = \frac{AN}{FN} = 2$$

$\therefore$ 设 $FN = x$, 则 $AM = AN = 2x$

$$\therefore EA = 2\sqrt{2}x, \quad AF = \sqrt{AN^2 + NF^2} = \sqrt{5}x$$

$$\therefore EF = EA + AF = 27\text{m}$$

$$\therefore 2\sqrt{2}x + \sqrt{5}x = 27$$

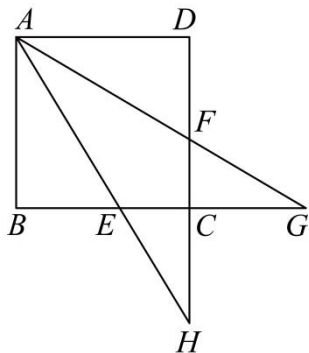
$$\text{解得 } x = 18\sqrt{2} - 9\sqrt{5}$$

$$\therefore AM = AN = 2x = 36\sqrt{2} - 18\sqrt{5}$$

$$\therefore \text{半圆的半径为 } (36\sqrt{2} - 18\sqrt{5})\text{cm}.$$

【点睛】此题考查了切线的性质，勾股定理，角平分线的性质定理，解直角三角形等知识，解题的关键是掌握以上知识点.

23. 已知：如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上，且 $\angle BAE = \angle DAF$ ，延长 AE 、 AF 分别交 DC 、 BC 延长线于点 H 、 G 。



(1) 求证： $DF \cdot CD = BE \cdot BC$ ；

(2) 联结 EF 、 HG ，如果 $EF \parallel HG$ ，求证：四边形 $ABCD$ 是正方形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了矩形的性质，正方形的判定，相似三角形的性质与判定，全等三角形的性质与判定等待，熟知相似三角形的性质与判定定理是解题的关键.

(1) 由矩形的性质可得 $AD = BC$ ， $AB = CD$ ， $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ，再证明 $\triangle BAE \sim \triangle DAF$ 推出 $DF \cdot AB = BE \cdot AD$ ，则 $DF \cdot CD = BE \cdot BC$ ；

(2) 先导角证明 $\angle CEH = \angle CFG$ ，则可证明 $\triangle ECH \sim \triangle FCG$ ，证明 $\triangle ECF \sim \triangle GCH$ ，进而可证明 $CH = CG$ ， $CE = CF$ ，再证明 $\triangle EAG \cong \triangle FAH$ (AAS)，得到 $AE = AF$ ，即可证明 $AB = AD$ ，据此可证明结论。

【小问 1 详解】

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AD = BC, AB = CD, \angle B = \angle D = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle BAE = \angle DAF,$$

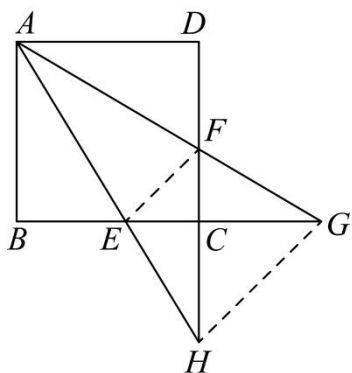
$$\therefore \triangle BAE \sim \triangle DAF,$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BE}{DF},$$

$$\therefore DF \cdot AB = BE \cdot AD, \text{ 即 } DF \cdot CD = BE \cdot BC;$$

【小问 2 详解】

证明： $\because \triangle BAE \sim \triangle DAF$,



$$\therefore \angle AEB = \angle AFD,$$

$$\because \angle CEH = \angle AEB, \angle CFG = \angle AFD,$$

$$\therefore \angle CEH = \angle CFG,$$

$$\text{又} \because \angle ECH = \angle FCG,$$

$$\therefore \triangle ECH \sim \triangle FCG,$$

$$\therefore \frac{EC}{FC} = \frac{CH}{CG},$$

$$\therefore EF \parallel GH,$$

$$\therefore \triangle ECF \sim \triangle GCH,$$

$$\therefore \frac{EC}{CG} = \frac{CF}{CH},$$

$$\therefore \frac{EC}{CF} = \frac{CG}{CH},$$

$$\therefore \frac{CH}{CG} = \frac{CG}{CH},$$

$$\therefore CH = CG,$$

$$\therefore CE = CF,$$

$$\therefore CG + CE = CH + CF, \text{ 即 } EG = FH,$$

$$\text{又} \because \angle EAG = \angle FAH, \angle EGA = \angle FHA,$$

$$\therefore \triangle EAG \cong \triangle FAH (\text{AAS}),$$

$$\therefore AE = AF,$$

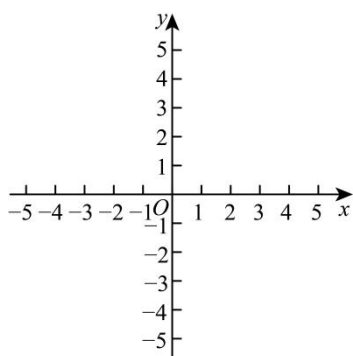
$$\therefore \triangle BAE \sim \triangle DAF,$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AF} = 1,$$

$$\therefore AB = AD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形.

24. 已知平面直角坐标系 xOy , 抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 3a (a > 0)$ 与 x 轴交于点 A 和点 B (点 A 在点 B 左侧), 与 y 轴交于点 C , 顶点为 D , 过点 C 作 $CE \parallel x$ 轴交抛物线于点 E .



(1) 直接写出抛物线的对称轴及点 A 、 B 的坐标;

(2) 联结 AE , 如果 AE 平分 $\angle BAC$, 求 a 的值;

(3) 点 P 是抛物线上一点, 线段 PD 、 AE 交于点 F , 如果 $S_{\triangle AFD} = S_{\triangle PFE}$, 那么直线 PD 是否一定会经过一个定点? 如果会, 求出这个定点的坐标; 如果不会, 请说明理由.

【答案】 (1) 直线 $x = 1$, $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$

$$(2) a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(3) \text{ 直线 } PD \text{ 恒过定点 } \left(\frac{7}{3}, 0\right).$$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次函数综合，一次函数与几何综合，两点距离计算公式等等，熟知二次函数的相关知识是解题的关键.

(1) 根据对称轴计算公式求出对称轴，再求出函数值为 0 时自变量的值即可求出 A 、 B 的坐标；

(2) 根据平行线的性质和角平分线的定义可推出 $\angle CAE = \angle CEA$ ，则 $AC = EC$ ，再根据题意可得点 C 和点 E 关于抛物线的对称轴对称，则 $CE = 2$ ；求出点 C 坐标，进而表示出 AC^2 ，根据 $AC^2 = 2^2$ 建立方程求解即可；

(3) 根据图形面积之间的关系可得 $S_{\triangle ADE} = S_{\triangle PDE}$ ，则 $AP \parallel DE$ ，求出 D 、 E 坐标，进而得到直线 DE 解析式为 $y = ax - 5a$ ，则直线 AP 解析式为 $y = ax + a$ ，进一步求出 $P(4, 5a)$ ，同理可得直线 PD 解析式为 $y = 3ax - 7a = a(3x - 7)$ ，据此可得答案.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 抛物线解析式为 $y = ax^2 - 2ax - 3a$ ，

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = -\frac{-2a}{2a} = 1$ ，

当 $y = ax^2 - 2ax - 3a = 0$ 时，解得 $x = -1$ 或 $x = 3$ ，

$\therefore A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ；

【小问 2 详解】

解： $\because AE$ 平分 $\angle BAC$ ，

$\therefore \angle CAE = \angle BAE$ ，

$\because CE \parallel x$ 轴，

$\therefore \angle AEC = \angle BAE$ ，

$\therefore \angle CAE = \angle CEA$ ，

$\therefore AC = EC$ ，

$\because CE \parallel x$ 轴，且 C 、 E 都在抛物线上，

$\therefore$ 点 C 和点 E 关于抛物线的对称轴对称，

$\therefore CE = 2 \times (1 - 0) = 2$ ；

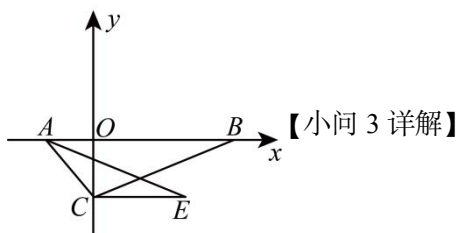
在 $y = ax^2 - 2ax - 3a$ 中，当 $x = 0$ 时， $y = -3a$ ，

$$\therefore C(0, -3a),$$

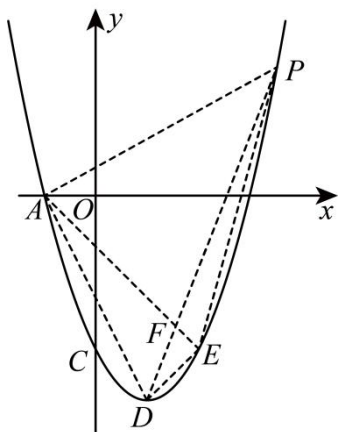
$$\therefore OC = 3a,$$

在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中, 由勾股定理得 $AC^2 = OA^2 + OC^2 = 1 + 9a^2 = 2^2$,

$$\therefore a = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 或 } a = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (舍去);}$$



$$\text{解: } \because S_{\triangle AFD} = S_{\triangle PFE},$$



$$\therefore S_{\triangle AFD} + S_{\triangle DEF} = S_{\triangle PFE} + S_{\triangle DEF},$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} = S_{\triangle PDE},$$

$$\therefore AP \parallel DE,$$

在 $y = ax^2 - 2ax - 3a$ 中, 当 $x = 1$ 时, $y = -4a$,

$$\therefore D(1, -4a),$$

由对称性可知 $E(2, -3a)$,

设直线 DE 解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} k + b = -4a \\ 2k + b = -3a \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = a \\ b = -5a \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 DE 解析式为 $y = ax - 5a$,

$\therefore$ 可设直线 AP 解析式为 $y = ax + t$,

把 $A(-1, 0)$ 代入 $y = ax + t$ 中得: $-a + t = 0$, 解得 $t = a$,

$\therefore$ 直线 AP 解析式为 $y = ax + a$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = ax + a \\ y = ax^2 - 2ax - 3a \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = 4 \\ y = 5a \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases},$$

$\therefore P(4, 5a)$,

同理可得直线 PD 解析式为 $y = 3ax - 7a = a(3x - 7)$,

在 $y = a(3x - 7)$ 中, 当 $x = \frac{7}{3}$ 时, $y = 0$,

$\therefore$ 直线 PD 恒过定点 $(\frac{7}{3}, 0)$.

25. 已知圆 O 的直径 AB 上有一点 C (不与 A 、 B 重合), $AB = 10$, 过点 C 作弦 $DE \perp AB$, 点 F 是弧 BD 的中点, 连接 EF , 交 AB 于点 G .

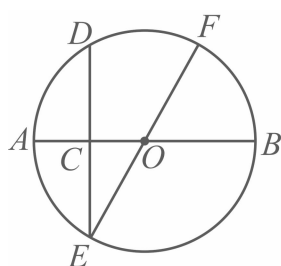


图1

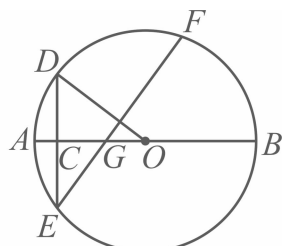
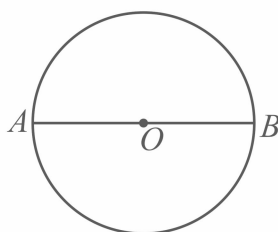


图2



备用图

(1) 如图 1, 当点 G 与点 O 重合时, 求 AC 的长;

(2) 如图 2, 连接 OD , 当 $OD \perp EF$ 时, 求 $\frac{DE}{EF}$ 的值;

(3) 设 $AC = x$, $y = \frac{EG}{GF}$, 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出自变量 x 的取值范围.

【答案】(1) $\frac{5}{2}$

(2) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$(3) \quad y = \frac{\sqrt{10x}}{5} (0 < x < 10)$$

【解析】

【分析】(1) 连接 OD ，根据垂径定理得出 $\widehat{AD} = \widehat{AE}$ ，根据弧、圆心角的关系，以及对顶角的性质得出 $\angle AOD = \angle AOE = \angle DOF = \angle BOF$ ，结合平角定义求出 $\angle AOD = 60^\circ$ ，根据余弦定义求出 $CO = \frac{5}{2}$ ，即可求解；

(2) 连接 OE ， OF ， DG ， DF ，设 DG 与 EF 相交于 H ，根据垂径定理得出 $\widehat{DE} = \widehat{DF}$ ，根据弧、弦、圆心角的关系得出 $\angle DOF = \angle DOE$ ， $DE = DF$ ，结合 (1) 可得 $\angle DOF = \angle BOF = \angle DOE$ ，

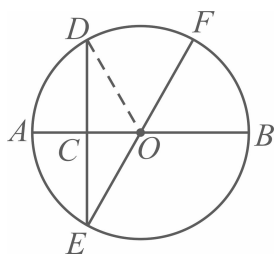
$\angle AOD = \angle AOE = \frac{1}{2} \angle DOE$ ，结合平角定义求出 $\angle DOE = 72^\circ = \angle DOF = \angle BOF$ ，根据等边对等角和三角形内角和定理可求出 $\angle EDF = 108^\circ$ ，进而求出 $\angle DEF = \angle DFE = 36^\circ$ ，根据垂径定理、垂直平分线的性质得出 $DG = EG$ ，进而求出 $\angle EDG = \angle DEG = 36^\circ$ ，然后证明 $\triangle DEG \sim \triangle FED$ ，得出 $DE^2 = EG \cdot EF$ ，证明 $\triangle DFG$

是等腰三角形，得出 $FG = DF = DE$ ，则 $DE^2 = EG \cdot EF$ 可化简为 $\left(\frac{DE}{EF}\right)^2 + \frac{DE}{EF} - 1 = 0$ ，最后解方程即可；

(3) 分情况讨论：当 C 在 AO 上时，连接 DO ， FO ， AD ，过 F 作 $FH \perp AB$ 与于 H ，证明 $\triangle CGE \sim \triangle HGF$ ，得出 $y = \frac{EG}{FG} = \frac{CE}{FH} = \frac{CD}{FH}$ ，证明 $\triangle ACD \sim \triangle OHF$ ，得出 $\frac{DC}{FH} = \frac{AD}{OH} = \frac{AD}{5}$ ，在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 和 $\text{Rt}\triangle ODC$ 中，根据勾股定理得出 $CD^2 = AD^2 - x^2 = 5^2 - (5-x)^2$ ，则可求出 $AD = \sqrt{10x}$ 即可求出 y 关于 x 的函数解析式；当 C 在 OB 上时，同理求解即可。

【小问 1 详解】

解：连接 OD ，



$\therefore DE \perp AB$ ，

$\therefore \widehat{AD} = \widehat{AE}$ ，

$\therefore \angle AOD = \angle AOE$ ，

$\therefore$ 点 F 是弧 BD 的中点，

$\therefore DF = BF$ ，

$\therefore \angle DOF = \angle BOF$ ，

又 $\angle AOE = \angle BOF$,

$\therefore \angle AOD = \angle AOE = \angle DOF = \angle BOF$,

又 $\angle AOD + \angle DOF + \angle BOF = 180^\circ$,

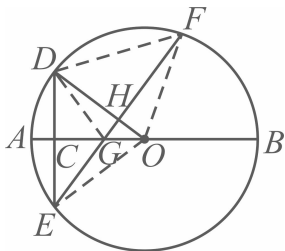
$\therefore \angle AOD = 60^\circ$,

$\therefore CO = DO \cdot \cos 60^\circ = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$,

$\therefore AC = AO - CO = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$;

【小问 2 详解】

解: 连接 OE , OF , DG , DF , 设 DG 与 EF 相交于 H ,



$\therefore OD \perp EF$,

$\therefore \widehat{DE} = \widehat{DF}$,

$\therefore \angle DOF = \angle DOE$, $DE = DF$,

又 $\angle DOF = \angle BOF$,

$\therefore \angle DOF = \angle BOF = \angle DOE$,

又 $\angle AOD = \angle AOE$, $\angle OFD = \angle ODF = 54^\circ$

$\therefore \angle AOD = \angle AOE = \frac{1}{2} \angle DOE$,

$\therefore \angle AOD + \angle DOF + \angle BOF = 180^\circ$,

$\therefore \frac{1}{2} \angle DOE + \angle DOE + \angle DOE = 180^\circ$,

$\therefore \angle DOE = 72^\circ = \angle DOF = \angle BOF$,

$\therefore OE = OD = OF$,

$\therefore \angle OED = \angle ODE = 54^\circ$,

$\therefore \angle EDF = 108^\circ$,

$\therefore DE = DF$,

$\therefore \angle DEF = \angle DFE = 36^\circ$,

$\therefore OA \perp DE$,

$$\therefore DC = EC,$$

$$\therefore DG = EG,$$

$$\therefore \angle EDG = \angle DEG = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle EDG = \angle DFE = 36^\circ,$$

$$\text{又 } \angle DEG = \angle FED,$$

$$\therefore \triangle DEG \sim \triangle FED,$$

$$\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{EG}{DE},$$

$$\therefore DE^2 = EG \cdot EF,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle DFE = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle DGF = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle DFG = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle GDF = 72^\circ = \angle DGF,$$

$$\therefore FG = DF = DE,$$

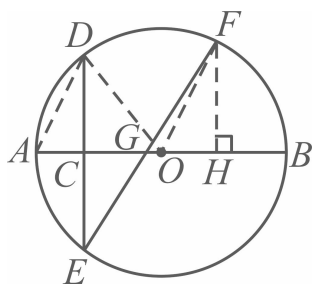
$$\therefore DE^2 = (EF - FG) \cdot EF = (EF - DE) \cdot EF,$$

$$\text{化简得 } \left(\frac{DE}{EF}\right)^2 + \frac{DE}{EF} - 1 = 0,$$

$$\text{解得 } \frac{DE}{EF} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (\text{负值舍去});$$

【小问 3 详解】

解：当 C 在 AO 上时，连接 DO ， FO ， AD ，过 F 作 $FH \perp AB$ 与于 H ，



$$\therefore CD \perp AB,$$

$$\therefore CD \parallel FH,$$

$$\therefore \triangle CGE \sim \triangle HGF,$$

$$\therefore y = \frac{EG}{FG} = \frac{CE}{FH} = \frac{CD}{FH},$$

$$\therefore \angle DAC = \frac{1}{2} \angle DOB, \quad \angle DOB = \angle DOF + \angle BOF, \quad \angle DOF = \angle BOF,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle FOH,$$

$$\text{又 } \angle ACD = \angle OHF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle OHF,$$

$$\therefore \frac{DC}{FH} = \frac{AD}{OH} = \frac{AD}{5},$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADC \text{ 中, } CD^2 = AD^2 - AC^2 = AD^2 - x^2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ODC \text{ 中, } CD^2 = OD^2 - OC^2 = 5^2 - (5-x)^2,$$

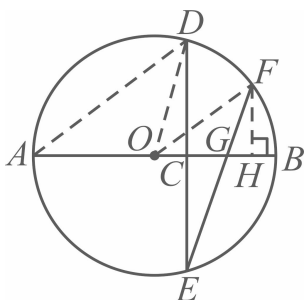
$$\therefore AD^2 - x^2 = 5^2 - (5-x)^2,$$

$$\text{化简得 } AD^2 = 10x,$$

$$\therefore AD = \sqrt{10x} \quad (\text{负值舍去}),$$

$$\therefore y = \frac{EG}{FG} = \frac{CD}{FH} = \frac{AD}{5} = \frac{\sqrt{10x}}{5} \quad (0 < x \leq 5);$$

当 C 在 OB 上时, 连接 DO , FO , AD , 过 F 作 $FH \perp AB$ 与于 H ,



$$\text{同理可求出 } y = \frac{EG}{FG} = \frac{CD}{FH} = \frac{AD}{5},$$

$$CD^2 = AD^2 - x^2 = 5^2 - (x-5)^2,$$

$$\text{解得 } AD = \sqrt{10x}$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{10x}}{5} \quad (5 < x < 10),$$

$$\text{综上, } y = \frac{\sqrt{10x}}{5} \quad (0 < x < 10).$$

【点睛】 本题考查了圆周角定理, 弧、弦、圆心角的关系, 垂径定理, 相似三角形的判定与性质, 解直角三角形, 解一元二次方程, 勾股定理等知识, 明确题意, 添加合适辅助线, 构造相似三角形是解题的关键.

