

上海市奉贤区 2025-2026 学年九年级上学期 1 月期末数学试题

(2026.01)

(完卷时间 100 分钟, 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.
3. 填空题须在对应矩形框内作答, 超出对应边框作答无效.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 如果 a 、 b 满足 $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$, 那么下列各式正确的是 ()

A. $a + b = 7$

B. $2a = 5b$

C. $\frac{a+b}{b} = \frac{7}{5}$

D. $\frac{a+2}{b+2} = \frac{2}{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了比例的性质, 设参数法是解题的关键.

设 $a = 2k$, $b = 5k$ ($k \neq 0$), 代入各项逐一验证即可.

【详解】解: 设 $a = 2k$, $b = 5k$ ($k \neq 0$),

A、 $a + b = 2k + 5k = 7k$, 只有当 $k = 1$ 时, $a + b = 7$ 才成立, 但 k 可以是任意非零数,

$\therefore$ A 错误, 故该选项不符合题意;

B、 $2a = 4k$, $5b = 25k$, $4k \neq 25k$,

$\therefore$ B 错误, 故该选项不符合题意;

C、 $\frac{a+b}{b} = \frac{2k+5k}{5k} = \frac{7k}{5k} = \frac{7}{5}$,

$\therefore$ C 正确, 故该选项符合题意;

D、当 $k = 1$ 时, $\frac{a+2}{b+2} = \frac{2k+2}{5k+2} = \frac{2+2}{5+2} = \frac{4}{7} \neq \frac{2}{5}$,

∴ D 错误，故该选项不符合题意.

故选: C.

2. 在 Rt ABC 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, 那么下列各式正确的是 ()

A. $\tan A = \frac{b}{a}$

B. $\cos A = \frac{a}{c}$

C. $\sin B = \frac{b}{c}$

D. $\cot B = \frac{b}{a}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题主要考查了三角函数的定义, 根据直角三角形中三角函数的定义, 分别计算 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的三角函数值, 并验证各选项.

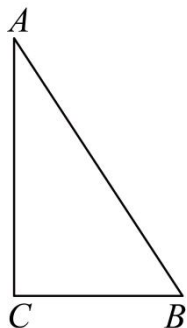
【详解】 解: 如下图所示,

A 选项: $\tan A = \frac{BC}{AC}$, $\because AC = b$, $BC = a$, $\therefore \tan A = \frac{a}{b}$, 故 A 选项错误;

B 选项: $\cos A = \frac{AC}{AB}$, $\because AB = c$, $AC = b$, $\therefore \cos A = \frac{b}{c}$, 故 B 选项错误;

C 选项: $\sin B = \frac{AC}{AB}$, $\because AB = c$, $BC = a$, $\therefore \sin B = \frac{b}{c}$, 故 C 选项正确;

D 选项: $\cot B = \frac{BC}{AC}$, $\because AC = b$, $BC = a$, $\therefore \cot B = \frac{a}{b}$, 故 D 选项错误.



故选: C.

3. 已知抛物线 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 经过两个不同的点 $A(m, 8)$ 和 $B(2, 8)$, 那么 m 的值是 ()

A. 2

B. -2

C. 8

D. -8

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数 $y = ax^2$ 的图像的性质, 根据抛物线 $y = ax^2$ 关于 y 轴对称的性质, 由于点 A 和点 B 的纵坐标相同, 因此它们的横坐标互为相反数, 即可解答.

【详解】解：∵ 抛物线 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 的对称轴为 y 轴，且点 $A(m, 8)$ 和 $B(2, 8)$ 的纵坐标均为 8，

∴ 点 A 和点 B 关于 y 轴对称，

∴ $m = -2$ ，

故选：B.

4. 如果 $\vec{a}, \vec{b}$ 都是非零向量，且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，那么下列结论中一定正确的是（ ）

A. $\vec{a} = n\vec{b} (n \neq 0)$

B. $\vec{a} = \vec{b}$

C. $\vec{a} = -\vec{b}$

D. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

【答案】A

【解析】

【分析】根据向量平行的定义，两个非零向量平行意味着存在一个非零实数使一个向量是另一个的倍数.
本题考查平面向量的性质，掌握基本概念是解题关键.

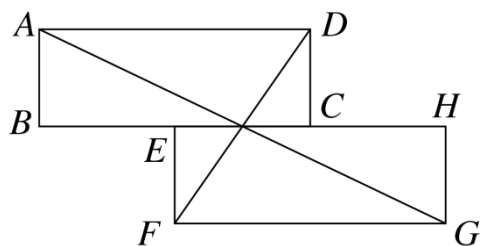
【详解】∵ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 且 $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ ，

∴ 存在实数 $n \neq 0$ ，使得 $\vec{a} = n\vec{b}$.

选项 A 正确；选项 B、C、D 不一定成立.

故选：A.

5. 如图，四边形 $ABCD$ 和四边形 $EFGH$ 是两个全等的矩形， E 是边 BC 的中点，连接 DF 、 AG . 如果 $DF \perp AG$ ， $BC = 4$ ，那么 AB 的值为（ ）



A. 1

B. $\frac{3}{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了全等图形的性质，全等三角形的性质与判定，相似三角形的性质与判定，矩形的性质，设 AG ， BC 交于 M ， BC ， DF 交于 N ，可证明 $\triangle ABM \cong \triangle GHM$ 得到 $BM = HM$ ，由线段中点的定义可推出 $BM = HM = 3$ ，则可推出 $EM = CM = 1$ ，证明 $\triangle EFN \cong \triangle CDN$ ，得到

$EN = CN = \frac{1}{2}CE = 1$ ，则可证明点 M 和点 N 重合；证明 $\triangle ABM \sim \triangle MCD$ ，得到 $\frac{AB}{CM} = \frac{BM}{CD}$ ，即

$$\frac{AB}{1} = \frac{3}{AB}, \text{ 据此可得答案.}$$

【详解】解：如图所示，设 AG ， BC 交于 M ， BC ， DF 交于 N ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $EFGH$ 是两个全等的矩形，

$$\therefore AB = GH, \angle ABM = \angle GHM = 90^\circ, EH = BC = 4;$$

$$\text{又} \because \angle AMB = \angle GMH,$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle GHM (\text{AAS}),$$

$$\therefore BM = HM;$$

$\because E$ 是边 BC 的中点，

$$\therefore BE = CE = \frac{1}{2}BC = 2,$$

$$\therefore BH = BE + EH = 6,$$

$$\therefore BM = HM = \frac{1}{2}BH = 3,$$

$$\therefore CM = BC - BM = 1, EM = BM - BE = 1,$$

$$\therefore EM = CM;$$

同理可证明 $\triangle EFN \cong \triangle CDN$ ，

$$\therefore EN = CN = \frac{1}{2}CE = 1,$$

$$\therefore EM = EN, \text{ 即点 } M \text{ 和点 } N \text{ 重合};$$

$$\because DF \perp AG,$$

$$\therefore \angle AMD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BMA + \angle CMD = 90^\circ,$$

由矩形的性质可得 $AB = CD$ ， $\angle B = \angle BCD = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle BAM + \angle BMA = 90^\circ,$$

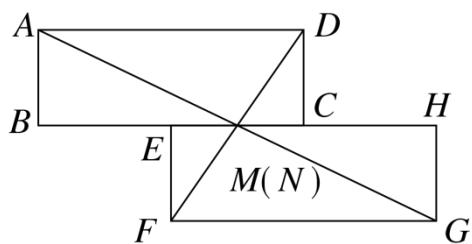
$$\therefore \angle BAM = \angle CMD,$$

$$\therefore \triangle ABM \sim \triangle MCD,$$

$$\therefore \frac{AB}{CM} = \frac{BM}{CD}, \text{ 即 } \frac{AB}{1} = \frac{3}{AB},$$

$$\therefore AB = \sqrt{3} \text{ 或 } AB = -\sqrt{3} \text{ (舍去),}$$

故选：D.



6. 一个三角形框架模型的边长分别为 20cm ， 30cm ， 40cm ，工人师傅要利用两根 30cm 和 50cm 的铁丝做一个与模型相似的三角形，要求以其中一根铁丝为一边，另一根上截出两段（允许有余料）作为另外两边，那么工人师傅做的这个三角形的周长是（ ）

- A. 80cm B. 67.5cm C. 60cm D. 52.5cm

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的性质，根据相似三角形对应边成比例的性质，以 30cm 铁丝为最长边；以 30cm 铁丝为中等边；以 30cm 铁丝为最短边长；以 50cm 铁丝为一边时，同理验证即可，掌握知识点的应用是解题的关键.

【详解】解：由题意得，①以 30cm 铁丝为最长边，设中等边长为 $x\text{cm}$ ，短边长为 $y\text{cm}$ ，

$$\therefore \frac{y}{20} = \frac{x}{30} = \frac{30}{40},$$

$$\text{则 } x = 22.5, \quad y = 15,$$

$$\therefore 15 + 22.5 < 50,$$

$$\therefore \text{符合题意，周长为：} 30 + 15 + 22.5 = 67.5(\text{cm}),$$

②以 30cm 铁丝为中等边，设最长边为 $x\text{cm}$ ，短边长为 $y\text{cm}$ ，

$$\therefore \frac{y}{20} = \frac{30}{30} = \frac{x}{40},$$

$$\text{则 } x = 40, \quad y = 20,$$

$$\therefore 40 + 20 > 50,$$

$\therefore$ 不符合题意；

③以 30cm 铁丝为最短边，设最长边为 $x\text{cm}$ ，中等边长为 $y\text{cm}$ ，

$$\therefore \frac{30}{20} = \frac{y}{30} = \frac{x}{40},$$

$$\text{则 } x = 60, \quad y = 45,$$

$$\therefore 60 + 45 > 50,$$

∴ 不符合题意;

④ 以 50cm 铁丝为最短边, 设最长边为 $x\text{cm}$, 中等边长为 $y\text{cm}$,

$$\therefore \frac{50}{20} = \frac{y}{30} = \frac{x}{40},$$

$$\text{则 } x = 100, \quad y = 75,$$

$$\therefore 100 + 75 > 30,$$

∴ 不符合题意;

⑤ 以 50cm 铁丝为中等边, 设最长边为 $x\text{cm}$, 短边长为 $y\text{cm}$,

$$\therefore \frac{y}{20} = \frac{50}{30} = \frac{x}{40},$$

$$\text{则 } x = \frac{200}{3}, \quad y = \frac{100}{3},$$

$$\therefore \frac{200}{3} + \frac{100}{3} > 30,$$

∴ 不符合题意;

⑥ 以 50cm 铁丝为最长边, 设中等边长为 $x\text{cm}$, 短边长为 $y\text{cm}$,

$$\therefore \frac{y}{20} = \frac{x}{30} = \frac{50}{40},$$

$$\text{则 } x = 37.5, \quad y = 25,$$

$$\therefore 37.5 + 25 > 30,$$

∴ 不符合题意,

故选: B.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 计算: $3(\vec{a} - 2\vec{b}) =$ _____.

【答案】 $3\vec{a} - 6\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查了向量的运算法则, 根据向量的运算法则, 应用向量的标量乘法分配律进行计算即可.

【详解】 解: $3(\vec{a} - 2\vec{b}) = 3\vec{a} - 6\vec{b}$.

故答案为: $3\vec{a} - 6\vec{b}$.

8. 已知抛物线 $y = 2(x+1)^2$ 与抛物线 $y = a(x+1)^2$ 关于 x 轴对称, 那么 a 的值是_____.

【答案】

-2

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数图象与几何变换，掌握两条抛物线关于 x 轴对称，则对应点的纵坐标互为相反数是解题的关键．根据两条抛物线关于 x 轴对称，则对应点的纵坐标互为相反数，因此二次项系数互为相反数，即可得解．

【详解】 解：∵ 抛物线 $y = 2(x+1)^2$ 与抛物线 $y = a(x+1)^2$ 关于 x 轴对称，

∴ 对于任意 x ，有 $a(x+1)^2 = -2(x+1)^2$ ，

∴ $a = -2$ ．

故答案为：-2．

9. 如果二次函数 $y = (m+3)x^2 - 1$ 的图像有最低点，那么 m 的取值范围是_____．

【答案】

$m > -3$

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的图像和性质，掌握基本概念是解题关键．

二次函数图像有最低点的条件是二次项系数大于零

【详解】 解：∵ 当二次项系数大于零时，抛物线开口向上，有最低点．

∴ $m+3 > 0$ ，

解得 $m > -3$ ．

故答案为： $m > -3$ ．

10. 某汽车的紧急刹车距离 s （米）与车速 v （千米/小时）的关系是 $s = \frac{1}{100}v^2$ ．如果前方 25 米处发生了事故，司机驾驶该车紧急刹车避免了碰撞，那么可以推测该车车速不超过_____千米/小时．

【答案】 50

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的实际应用，求出 $s = 25$ 时的自变量的值即可得出结果．

【详解】 解：∵ $s = \frac{1}{100}v^2$ ，

∴ 当 $s = \frac{1}{100}v^2 = 25$ 时，解得 $v = 50$ （负值舍去）；

故该车车速不超过 50 千米/小时．

故答案为：50

11. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上， $DE \parallel BC$ ．如果 $AD:BD = 2$ ，那么 $DE:BC$ 的值是_____．

【答案】

$$\frac{2}{3}$$

【解析】

【分析】 本题考查的是相似三角形的判定与性质，证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 是解本题的关键．

先证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，可得 $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$ ，再利用 $AD:BD = 2$ ，从而可得答案．

【详解】 解： $\because DE \parallel BC$ ，

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

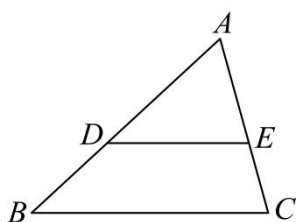
$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC},$$

$$\because AD:BD = 2,$$

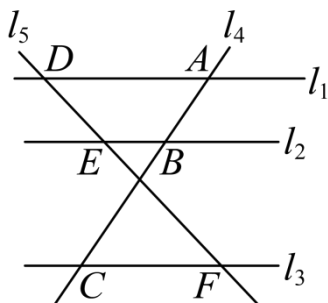
$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AD+BD} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}.$$

故答案为： $\frac{2}{3}$ ．



12. 如图，已知直线 l_1, l_2, l_3 分别交直线 l_4 于点 A 、 B 、 C ，交直线 l_5 于点 D 、 E 、 F ，且 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ．已知 $DE = 4, DF = 10, BC = 5$ ，那么线段 AC 的长是_____．



【答案】 $\frac{25}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了平行线分线段成比例：三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例．利用平行线分线段成比例定理得到 $\frac{DE}{DF} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ 进而得到 $\frac{EF}{DF} = \frac{3}{5}$ ，利用比例的性质得到 $\frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$ ，从而可计算出 AC 的长．

【详解】 解： $\because l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ，

$$\therefore \frac{DE}{DF} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \frac{EF}{DF} = \frac{3}{5} = \frac{BC}{AC}$$

$$\therefore AC = \frac{BC \times 5}{3} = \frac{25}{3}$$

故答案为： $\frac{25}{3}$

13. 小华在某游乐园 APP 的地图上看到，某游玩项目排队区域的图上长度约 2.5 厘米，已知该地图的比例尺是 1:1000，那么排队区域的实际长度约_____米．

【答案】

25

【解析】

【分析】 本题考查比例线段，掌握比例线段的定义及比例尺是解题关键．设实际长度为 x 厘米，根据比例列出方程，然后求解即可．

【详解】 解： 设实际长度为 x 厘米，

$$\therefore \frac{2.5}{x} = \frac{1}{1000},$$

$$\therefore x = 2500,$$

故实际长度为 $2500cm = 25m$ ，

故答案为： 25．

14. 景区新建了一条通往山顶观景台的缓坡步道，设计要求是坡度为 1:2.4，施工方测得观景台距离地面的垂直高度为 10 米，为满足设计要求，这段缓坡步道的长度应为_____米．

【答案】 26

【解析】

【分析】 本题考查了坡度的概念及用勾股定理求斜边长，根据坡度定义，已知垂直高度 10 米，可求水平距

离，再应用勾股定理求斜边长度即步道长度.

【详解】解：坡度比为1:2.4，即垂直高度与水平距离之比为1:2.4，垂直高度为10米，
则水平距离为 $10 \times 2.4 = 24$ 米，

根据勾股定理，这段缓坡步道的长度 $=\sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{676} = 26$ （米），

故答案为：26 .

15. 如果一个等腰三角形腰上的高与底边的高的比为2:3，那么这个等腰三角形底角的余弦值是_____.

【答案】

$$\frac{1}{3}$$

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的性质、余弦函数的定义. 利用等腰三角形面积公式，建立腰上的高与底边上的高的关系，得到底边与腰的比，再在直角三角形中求底角的余弦值.

【详解】解：设等腰三角形底边长为 a ，腰长为 c ，底边上的高为 $h_{\text{底}}$ ，腰上的高为 $h_{\text{腰}}$.

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_{\text{底}} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_{\text{腰}}, \text{ 即}$$

$$\therefore \frac{h_{\text{腰}}}{h_{\text{底}}} = \frac{a}{c}.$$

$$\therefore h_{\text{腰}} : h_{\text{底}} = 2 : 3,$$

$$\therefore \frac{a}{c} = \frac{2}{3}.$$

在等腰三角形中，底边上的高也是中线，

$$\therefore \text{底角的邻边为} \frac{a}{2}, \text{斜边为} c,$$

$$\therefore \text{等腰三角形底角的余弦值} = \frac{\frac{a}{2}}{c} = \frac{a}{2c} = \frac{2}{2 \times 3} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{3}.$$

16. 小海操控一辆遥控玩具车从A处沿北偏东 60° 方向走了6米到B处，再从B处向正南方向走了9米到达C处，此时这辆遥控玩具车离A处的距离是_____米.

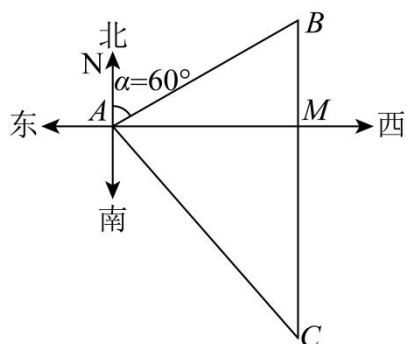
【答案】 $3\sqrt{7}$

【解析】

【分析】根据题意，利用方向角，再根据两点间距离公式求解.

本题考查了方向角和勾股定理，掌握勾股定理是解题关键.

【详解】由题可得:



$$\because \angle NAB = \angle ABC = 60^\circ, AB = 6, BC = 9, \angle BMA = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BAM = 30^\circ,$$

$$\therefore BM = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$$

$$\therefore MC = BC - BM = 9 - 3 = 6,$$

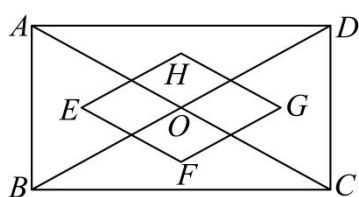
$$\therefore AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore AC = \sqrt{AM^2 + MC^2} = 3\sqrt{7}$$

所以这辆遥控玩具车离 A 处的距离是 $3\sqrt{7}$ 米.

故答案为: $3\sqrt{7}$.

17. 如图, 矩形 $ABCD$ 的面积为 18, 对角线 AC 、 BD 交于点 O . 如果 E 、 F 、 G 、 H 分别是 $\triangle ABO$, $\triangle BCO$, $\triangle CDO$, $\triangle ADO$ 的重心, 那么四边形 $EFGH$ 的面积是_____.



【答案】4

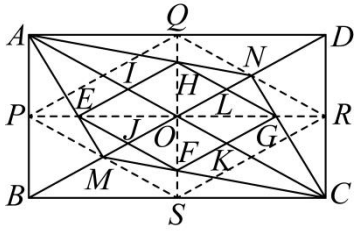
【解析】

【分析】本题考查了重心的有关性质，根据矩形的性质求面积，根据矩形的性质与判定求线段长，相似三角形的判定与性质综合等知识点，解答题关键是掌握上述知识点.

先分别得出 $S_{\triangle HOE} = \frac{2}{9} S_{\text{矩形}APOQ}$, $S_{\triangle OFE} = \frac{2}{9} S_{\text{矩形}BSOP}$, $S_{\triangle OFG} = \frac{2}{9} S_{\text{矩形}CSOR}$, $S_{\triangle OHG} = \frac{2}{9} S_{\text{矩形}DQOR}$, 再求出四边形 $EFGH$ 的面积.

【详解】解: 如图, 连接 OE , OH , OG , OF , 并分别延长, 与 AB , AD , CD , BC 分别交于 P 、

Q 、 R 、 S ，连接 PQ 、 QR 、 SR 、 PS ，



$\therefore$ 四边形是矩形， AC 与 BD 是对角线，

$$\therefore AC = BD, OA = OC = \frac{1}{2}AC, OB = OD = \frac{1}{2}BD,$$

$$\therefore OA = OB = OC = OD,$$

$\therefore E$ 、 F 、 G 、 H 分别是 $\triangle ABO$ ， $\triangle BCO$ ， $\triangle CDO$ ， $\triangle ADO$ 的重心，

$\therefore OP$ 是 $\triangle ABO$ 的中线， OS 是 $\triangle BCO$ 的中线， OR 是 $\triangle CDO$ 的中线， OQ 是 $\triangle ADO$ 的中线，

$$\therefore OP \perp AB, OR \perp AB, QO \perp AD, SO \perp BC,$$

$\therefore Q$ 、 O 、 C 三点共线， P 、 O 、 R 三点共线，

$\therefore E$ 、 H 分别是 $\triangle ABO$ ， $\triangle ADO$ 的重心，

$$\therefore OE : PE = 2 : 1, OH : HQ = 2 : 1,$$

$$\therefore OE : OP = 2 : 3, OH : OQ = 2 : 3,$$

$$\therefore OE : OP = OH : OQ, OH : OQ = 2 : 3,$$

$$\text{又 } \angle HOE = \angle QOP,$$

$$\therefore \triangle HOE \sim \triangle QOP,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle HOE}}{S_{\triangle POQ}} = \left(\frac{OH}{OQ} \right)^2 = \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$\therefore S_{\triangle HOE} = \frac{4}{9} S_{\triangle POQ},$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle PAQ = 90^\circ,$$

$$\therefore OP \perp AB, OR \perp AB,$$

$$\therefore \angle APO = \angle AQO = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $APQO$ 是矩形，

同理可得：四边形 $BSOP$ 是矩形，四边形 $CSOR$ 是矩形，四边形 $DQOR$ 是矩形，

∴ 四边形 $APOQ$ 是矩形,

$$\therefore AP = OQ, \quad AQ = OP,$$

$$\text{又 } PQ = PQ,$$

$$\therefore \triangle APQ \cong \triangle QOP (\text{SSS}),$$

$$\therefore S_{\triangle APQ} = S_{\triangle QOP} = \frac{1}{2} S_{\text{矩形}APOQ},$$

$$\therefore S_{\triangle HOE} = \frac{4}{9} S_{\triangle POQ} = \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} S_{\text{矩形}APOQ} = \frac{2}{9} S_{\text{矩形}APOQ},$$

$$\text{同理可得: } S_{\triangle OEF} = \frac{2}{9} S_{\text{矩形}BSOP}, \quad S_{\triangle OFG} = \frac{2}{9} S_{\text{矩形}CSOR}, \quad S_{\triangle OHG} = \frac{2}{9} S_{\text{矩形}DQOR},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}EFGH} = S_{\triangle HOE} + S_{\triangle OEF} + S_{\triangle OFG} + S_{\triangle OHG}$$

$$= \frac{2}{9} S_{\text{矩形}APOQ} + \frac{2}{9} S_{\text{矩形}BSOP} + \frac{2}{9} S_{\text{矩形}CSOR} + \frac{2}{9} S_{\text{矩形}DQOR}$$

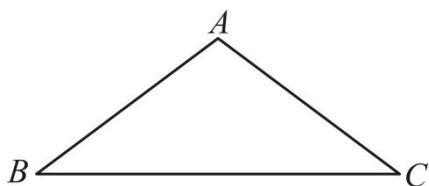
$$= \frac{2}{9} S_{\text{矩形}ABCD}$$

$$= \frac{2}{9} \times 18$$

$$= 4,$$

故答案为: 4.

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5, \cot B = \frac{4}{3}$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 旋转, B 的对应点为点 D , 连接 AD 交边 BC 于点 E . 如果 $AE = 3ED$, 那么 CE 的长为_____.

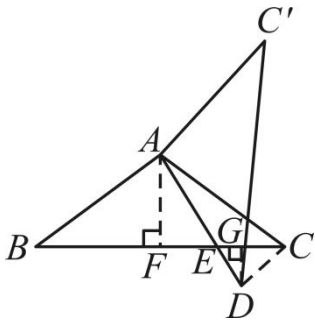


【答案】 $\frac{7}{4}$ 或 $\frac{25}{4}$

【解析】

【分析】 分类讨论, 构造 $\triangle AEF \sim \triangle DEG$, 进而根据勾股定理得到 FE 的长度, 即可求出结果. 本题考查了三角函数, 相似三角形的判定和性质, 勾股定理, 掌握相似三角形的性质是解题关键.

【详解】 解: ① 由题可得:



过点 A 作 $AF \perp BC$, 过点 D 作 $DG \perp BC$,

$$\because AB = AC = 5, \cot B = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \sin B = \frac{3}{5},$$

$$\therefore AF = 3, \quad BF = CF = 4$$

$$\because AF \parallel DG,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle DEG,$$

$$\therefore \frac{AF}{DG} = \frac{AE}{ED} = \frac{FE}{EG},$$

$$\therefore AE = 3ED,$$

$$\therefore \frac{AE}{ED} = 3$$

$$\therefore DG = 1,$$

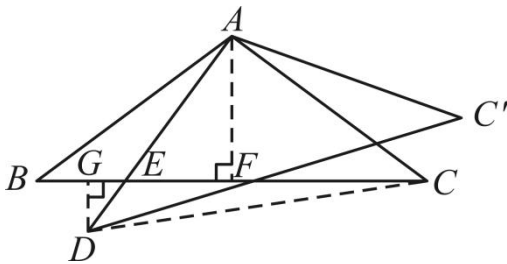
$$\because AB = AD = 5,$$

$$\therefore AE = \frac{15}{4}, DE = \frac{5}{4},$$

$$\therefore FE = \sqrt{AE^2 - AF^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 - 3^2} = \frac{9}{4},$$

$$\therefore CE = CF - FE = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$$

② 由题可得:



过点 A 作 $AF \perp BC$, 过点 D 作 $DG \perp BC$,

$$\therefore AB = AC = 5, \cot B = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \sin B = \frac{3}{5},$$

$$\therefore AF = 3, \quad BF = CF = 4$$

$$\therefore AF \parallel DG,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle DEG,$$

$$\therefore \frac{AF}{DG} = \frac{AE}{ED} = \frac{FE}{EG},$$

$$\therefore AE = 3ED,$$

$$\therefore \frac{AE}{ED} = 3$$

$$\therefore DG = 1,$$

$$\therefore AB = AD = 5,$$

$$\therefore AE = \frac{15}{4}, DE = \frac{5}{4},$$

$$\therefore FE = \sqrt{AE^2 - AF^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 - 3^2} = \frac{9}{4},$$

$$\therefore CE = CF + FE = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{7}{4} \text{ 或 } \frac{25}{4}.$$

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\cos^2 45^\circ + \frac{2 \sin 60^\circ}{2 - \cot 30^\circ} - \tan^2 60^\circ.$

【答案】

$$\frac{1}{2} + 2\sqrt{3}$$

【解析】

【分析】 本题考查特殊角的三角函数值的计算, 先代入各特殊角的三角函数值, 然后利用实数的混合运算法则进行计算即可.

【详解】 解: $\cos^2 45^\circ + \frac{2 \sin 60^\circ}{2 - \cot 30^\circ} - \tan^2 60^\circ$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \sqrt{3}} - (\sqrt{3})^2 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} - 3 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} - 3 \\
&= \frac{1}{2} + 2\sqrt{3} + 3 - 3 \\
&= \frac{1}{2} + 2\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

20. 数学课上老师给同学们出示了一条抛物线，甲、乙、丙三位同学分别用一句话描述了它：

甲：这条抛物线的对称轴是直线 $x = 2$ ；

乙：将这条抛物线向下平移 2 个单位，会经过原点；

丙：这条抛物线在对称轴的右侧部分是下降的；

(1) 如果这三位同学关于这条抛物线的描述都是正确的，请你写出一个同时满足这些描述的抛物线的表达式，并求出此时它的顶点坐标；

(2) 请你根据老师给出的这条抛物线，再写出一个正确结论。（与三位同学的描述不一样）

【答案】 (1)

抛物线的表达式为 $y = -x^2 + 4x + 2$ ，顶点坐标为 $(2, 6)$ （答案不唯一）

(2)

抛物线经过点 $(4, 2)$ （答案不唯一）

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的基本性质，熟练掌握二次函数的基本性质是解题关键；

(1) 利用待定系数法按照甲乙的描述确定好 a, b, c 三者的关系，然后根据丙同学描述可取 $a = -1$ ，进而可求解；

(2) 求出与 y 轴的交点，然后利用对称性可得到抛物线经过点 $(4, 2)$ 。

【小问 1 详解】

解：设抛物线表达式为 $y = ax^2 + bx + c$

甲描述：对称轴为直线 $x=2$ ，即 $-\frac{b}{2a}=2$ ，整理得 $b=-4a$

乙描述：向下平移 2 个单位后表达式为 $y=ax^2+bx+c-2$ ，经过原点 $(0,0)$

代入得 $0=c-2$ ，即 $c-2=0$ ，解得 $c=2$

丙描述：对称轴右侧部分下降，即抛物线开口向下，所以 $a<0$

取 $a=-1$ ，则 $b=-4\times(-1)=4$ ， $c=2$

抛物线表达式为 $y=-x^2+4x+2$ ，

$\therefore$ 对称轴为 $x=2$ ，

$\therefore$ 代入得 $y=-4+8+2=6$ ，

$\therefore$ 顶点为 $(2,6)$ 。

【小问 2 详解】

解：当 $x=0$ 时， $y=2$ ，

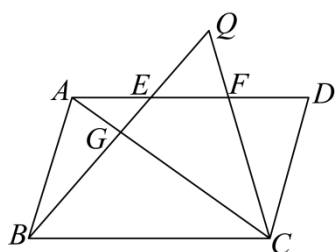
$\therefore$ 二次函数与 y 轴的交点为 $(0,2)$ ，

$\therefore$ 对称轴为直线 $x=2$ ，

$\therefore$ 点 $(0,2)$ 关于 $x=2$ 的对称点为 $(4,2)$ ，

$\therefore$ 抛物线经过点 $(4,2)$ 。

21. 如图，在 $\square ABCD$ 中，点 E 、 F 分别在边 AD 上， $AE=EF=FD$ ， BE 与 AC 交于点 G ， BE 的延长线与 CF 的延长线交于点 Q 。



(1) 求 $BG:EG:QE$ ；

(2) 设 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{CG}=\underline{\hspace{2cm}}$ ， $\overrightarrow{CQ}=\underline{\hspace{2cm}}$ 。（用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示）

【答案】(1) 3:1:2

(2) $\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}$ ； $\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了相似三角形的性质与判定，平行四边形的性质，向量的线性运算，熟知相似三角形的性质与判定定理和向量的相关知识是解题的关键.

(1) 根据题意可得 $AE = EF = \frac{1}{3}AD$ ，由平行四边形的性质可得 $AD \parallel BC$ ， $AD = BC$ ，证明 $\triangle AEG \sim \triangle CBG$ ， $\triangle QEF \sim \triangle QBC$ 推出 $BG = 3EG$ ， $BQ = 3QE$ ，据此根据线段的和差关系求解即可；

(2) 可证明 $CG = \frac{3}{4}CA$ ，根据 $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$ ，可得 $\overrightarrow{CG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA} = \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$ ，则 $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ ；证明 $QG = BG = \frac{1}{2}BQ$ ，得到 $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BG} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ ，根据 $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BC}$ 可得答案.

【小问 1 详解】

解： $\because AE = EF = FD$ ，

$$\therefore AE = EF = \frac{1}{3}AD,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC, AD = BC,$$

$$\therefore AE = EF = \frac{1}{3}BC;$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle CBG, \triangle QEF \sim \triangle QBC,$$

$$\therefore \frac{EG}{BG} = \frac{AE}{BC} = \frac{1}{3}, \frac{QE}{BQ} = \frac{EF}{BC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore BG = 3EG, BQ = 3QE,$$

$$\therefore BE = 4EG, BE = 2EQ,$$

$$\therefore QE = 2EG,$$

$$\therefore BG : EG : QE = 3EG : EG : 2EG = 3 : 1 : 2;$$

【小问 2 详解】

解： 由 (1) 得 $\triangle AEG \sim \triangle CBG$ ，

$$\therefore \frac{CG}{AG} = \frac{BC}{AE} = 3,$$

$$\therefore AG = \frac{1}{3}CG,$$

$$\therefore AC = AG + CG = \frac{4}{3}CG$$

$$\therefore CG = \frac{3}{4}CA,$$

$$\because \overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \vec{a} - \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{CG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA} = \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b},$$

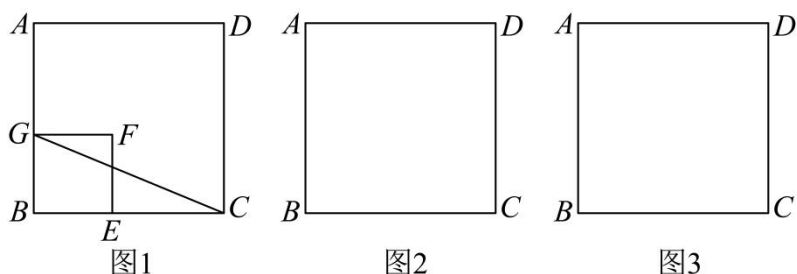
由 (1) 得 $BG = 3EG$, $QG = EG + QE = 3EG$,

$$\therefore QG = BG = \frac{1}{2}BQ,$$

$$\therefore \overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BG} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$

22. 如果一个小正方形的一组邻边在大正方形的边上, 那么我们就称这个小正方形是大正方形的“内邻正方形”, 这个“内邻正方形”的面积与大正方形面积比值叫做“内邻值”.



(1) 如图 1, 正方形 $BEFG$ 是正方形 $ABCD$ 的一个“内邻正方形”, 如果 $\tan \angle BCG = \frac{1}{3}$, 求此时的“内邻值”;

(2) 请用两种不同的方法, 用无刻度直尺和圆规在图 2 和图 3 的正方形 $ABCD$ 中分别作出它的“内邻值”为 $\frac{1}{2}$ 的“内邻正方形”. (写出结论, 并保留作图痕迹)

【答案】 (1) $\frac{1}{9}$

(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据 $\tan \angle BCG = \frac{1}{3}$ 求出正方形 $BEFG$ 与正方形 $ABCD$ 的边长比，然后即可求出面积比；

(2) 关键是在大正方形的边上找出边长的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ，方法一可以利用大正方形对角线的长的一半作为小正方形的

的边长即可；方法二是结合圆的性质和三角形相似的性质得出 $BE = \sqrt{AB \cdot BN} = \sqrt{AB \cdot \frac{AB}{2}} = \frac{AB}{\sqrt{2}}$ ，然后

以 BE 为边长作正方形即可。

【小问 1 详解】

解：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore \angle DB = 90^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle BCG = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{BG}{BC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{S_{\text{正方形} BEFG}}{S_{\text{正方形} ABCD}} = \frac{BG^2}{BC^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

∴ 此时的“内邻值”为 $\frac{1}{9}$ ；

【小问 2 详解】

解：方法一：如图 2，

1. 连接 AC ， BD ，并交于点 O ；
2. 以 B 为圆心， BO 为半径画弧，交 AB 于 G ，交 BC 于 E ；
3. 以 E 为圆心， BO 为半径画弧，交 DB 于 F ；
4. 正方形 $BEFG$ 即为所求。

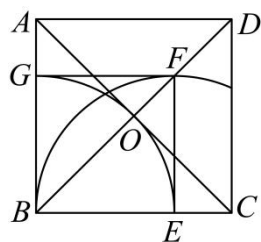


图2

方法二：如图 3，

1. 取 AB 中点 M ；
2. 延长 AB 至 N ，使 $BN = BM$ ；
3. 以 AN 为直径作圆 O ，交 BC 于 E ；

$$\therefore \angle DBC = \angle DCB, \quad \angle AEC = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle ABE + \angle BAE, \quad \angle ACE = \angle ACD + \angle DCB,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle ACD,$$

$$\text{又} \because \angle ADF = \angle CDA,$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle CDA;$$

【小问2详解】

$$\text{证明: } \because \frac{AD}{AB} = \frac{CE}{CB},$$

$$\therefore \frac{AB - BD}{AB} = \frac{CB - EB}{CB},$$

$$\therefore \frac{AB}{AB} - \frac{BD}{AB} = \frac{CB}{CB} - \frac{EB}{CB},$$

$$\therefore 1 - \frac{BD}{AB} = 1 - \frac{EB}{CB}, \quad \text{即} \quad \frac{BD}{AB} = \frac{EB}{CB},$$

$$\text{又} \because \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle BAC,$$

$$\therefore DE \parallel AC,$$

$$\therefore \angle DEA = \angle FAC,$$

$$\text{又} \because \angle FCA = \angle DAE, \quad AE = AC,$$

$$\therefore \triangle FCA \cong \triangle DAE \text{ (ASA)},$$

$$\therefore DE = AF;$$

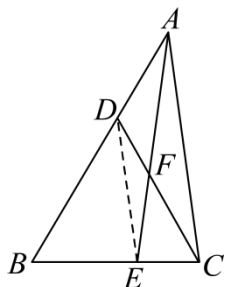
$$\because \triangle ADF \sim \triangle CDA,$$

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{AF}{AC},$$

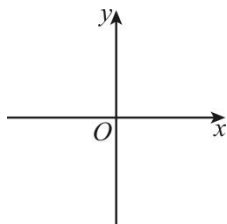
$$\therefore AD \cdot AC = AF \cdot CD,$$

$$\because AE = AC,$$

$$\therefore AD \cdot AE = DE \cdot CD.$$



24. 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图). 抛物线 $y = ax^2 + bx + 3 (a \neq 0)$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 B , 与 y 轴交于点 C , 顶点为 $D(1, m)$.



- (1) 求点 B 的坐标及 m 的值;
 - (2) 将抛物线 $y = ax^2 + bx + 3 (a \neq 0)$ 沿射线 BC 方向平移, 得到新抛物线的顶点为 E .
- ①如果四边形 $ABDE$ 是梯形, 求点 E 的坐标;
- ②如果 $\angle EAC = \angle CBD$, 求平移后新抛物线的表达式.

【答案】 (1) $B(3, 0)$, $m = 4$

(2) ① $(-7, 12)$ ② $y = -x^2 - 2x + 5$

【解析】

【分析】 (1) 用待定系数法求解析式即可求解;

(2) ①根据题意可知 $AE \parallel BD$, $BC \parallel DE$, 构造直线 DE 和直线 AE , 则交点 E 即为所求; ②构造 $\triangle CFA \sim \triangle DCB$, 可得 $\angle OAE = 90^\circ$, 结合直线 DE 的解析式可得交点 E , 根据顶点式即可求解.

本题考查了二次函数的基本性质, 二次函数的平移, 一次函数的性质, 掌握基本概念是解题关键.

【小问 1 详解】

解: 由题可知, 顶点为 $D(1, m)$,

则对称轴为: $x = -\frac{b}{2a} = 1$,

将点 $A(-1, 0)$ 代入抛物线 $y = ax^2 + bx + 3 (a \neq 0)$,

则得 $a - b + 3 = 0$,

解得: $a = -1$, $b = 2$

则二次函数解析式为: $y = -x^2 + 2x + 3$,

当 $x = 1$ 时, $y = 4$,

则点 $D(1, 4)$, $m = 4$,

当 $y=0$ 时, $-x^2+2x+3=0$,

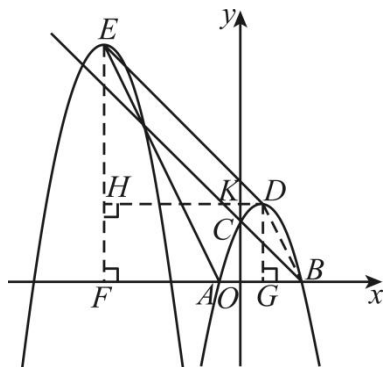
解得 $x=-1$ 或 $x=3$

则点 $B(3,0)$,

故答案为: $B(3,0)$, $m=4$,

【小问 2 详解】

解: ①由题可知



若四边形 $ABDE$ 是梯形,

则 $AE \parallel BD$,

过点 E 作 $EF \perp x$ 轴, 过点 D 作 $DG \perp x$ 轴, 过点 D 作 $DH \perp EF$ 交射线 BC 于点 K ,

则 $DH \parallel AB$,

$\therefore$ 点 $A(-1,0)$, $B(3,0)$, $C(0,3)$, $D(1,4)$,

设直线 BD 的表达式为: $y=kx+b$,

将点 $B(3,0)$, $D(1,4)$, 代入得 $\begin{cases} 3k+b=0 \\ k+b=4 \end{cases}$,

解得 $k=-2$, $b=6$,

则直线 BD 的表达式为: $y=-2x+6$,

设直线 AE 的表达式为: $y=-2x+b_1$,

将点 $A(-1,0)$, 代入得 $2+b_1=0$,

解得 $b_1=-2$,

则直线 AE 的表达式为: $y=-2x-2$,

因为抛物线沿射线 BC 方向平移,

则 $BC \parallel DE$,

设直线 BC 的表达式为: $y = k_2x + b_2$,

将点 $B(3,0)$, $C(0,3)$, 代入得 $\begin{cases} 3k + b = 0 \\ b = 3 \end{cases}$

解得 $k_2 = -1$, $b_2 = 3$,

则直线 BC 的表达式为: $y = -x + 3$,

设直线 DE 的表达式为: $y = -x + b_3$,

将点 $D(1,4)$, 代入得 $-1 + b_3 = 4$,

解得 $b_3 = 5$,

则直线 DE 的表达式为: $y = -x + 5$

则直线 DE 和直线 AE 的交点 E 即为抛物线平移后的顶点坐标,

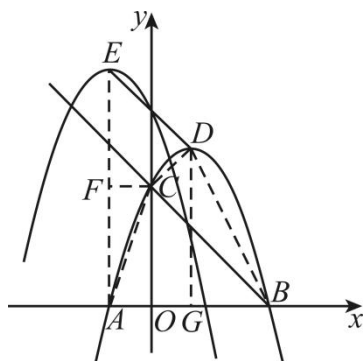
联立方程得 $\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = -2x - 2 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} x = -7 \\ y = 12 \end{cases}$

则点 E 的坐标为 $(-7,12)$

故答案为: $(-7,12)$.

②由题可得:



$$CD = \sqrt{(1-0)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2},$$

$$BC = \sqrt{(3-0)^2 + (0-3)^2} = 3\sqrt{2},$$

$$BD = \sqrt{(3-1)^2 + (0-4)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore CD^2 + BC^2 = BD^2,$$

$$\therefore \angle DCB = 90^\circ,$$

过点 C 作 $CF \perp AE$,

$$\therefore \angle CFA = 90^\circ, AC = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

$$\because \angle EAC = \angle CBD,$$

$$\therefore \triangle CFA \sim \triangle DCB,$$

$$\therefore \frac{AC}{BD} = \frac{CF}{DC} = \frac{AF}{BC},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{5}} = \frac{CF}{\sqrt{2}} = \frac{AF}{3\sqrt{2}},$$

$$\therefore CF = 1, AF = 3,$$

$$\because OC = 3, OA = 1, \angle AOC = 90^\circ,$$

$\therefore AOCF$ 为矩形,

$$\therefore \angle OAE = 90^\circ,$$

则点 E 的横坐标为 -1 ,

由①可得直线 DE 的表达式为: $y = -x + 5$

当 $x = -1$ 时, $y = 6$,

则点 $E(-1, 6)$,

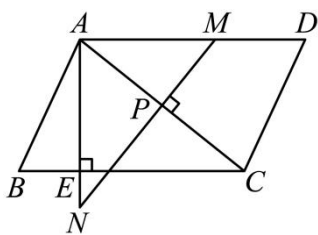
设平移后新抛物线的表达式为 $y = -(x-h)^2 + k$,

将点 $E(-1, 6)$ 代入得 $y = -(x+1)^2 + 6$,

则抛物线的表达式为: $y = -x^2 - 2x + 5$.

故答案为: $y = -x^2 - 2x + 5$.

25. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $\angle B$ 是锐角, $AE \perp BC$, 垂足为 E , 对角线 AC 垂直平分线 MN 交 AD 于点 M , 交 AE 的延长线于点 N , 交 AC 于点 P . 已知 $AD = 8, CD = 5$.



(1) 在 $\triangle ABE, \triangle AEC, \triangle APN$ 中,

①写出与 $\triangle AMN$ 一定相似的三角形, 并选一对说明理由;

②写出与 $\triangle AMN$ 不一定相似的三角形, 如果它与 $\triangle AMN$ 相似, 求出它们的相似比.

(2) 如果 $AE = EN$, 求 $\angle B$ 的正弦值.

【答案】 (1) $\triangle ABE$ 与 $\triangle MAN$ 不一定相似, 相似比为 $25:32$ 或 $24:25$

$$(2) \frac{4\sqrt{3}+3}{10} \text{ 或 } \frac{4\sqrt{3}-3}{10}$$

【解析】

【分析】 (1) ①根据平行四边形的性质和平行线定理得 $AE \perp AD$, 利用等量代换得 $\angle NMA = \angle CAE$, $\angle N = \angle ACE$, 即可证明; ②由题意得 $\triangle ABE$ 与 $\triangle MAN$ 不一定相似, 当 $\triangle ABE \sim \triangle NMA$ 时, 得

$$\triangle ABE \sim \triangle CAE, \text{ 结合勾股定理得 } AB^2 - BE^2 = BE \cdot (8 - BE), \text{ 求得 } BE = \frac{25}{8}, \text{ 进而求得 } AE = \frac{5\sqrt{39}}{8},$$

由相似三角形的性质和等量代换得 $\angle BAC = 90^\circ$, 求得 $AC = \sqrt{39}$, 进而求得 $AP = \frac{\sqrt{39}}{2}$, 再由

$\triangle ABE \sim \triangle NPA$, 求得 $NA = \frac{4\sqrt{39}}{5}$, 即可求解; 当 $\triangle BAE \sim \triangle NMA$ 时, 由相似三角形的性质和等腰三角形的判定可得 $AB = AC = 5$, 进而得 $AP = \frac{5}{2}$, 再由等腰三角形的性质和勾股定理求得 $AE = 3$, 由

$\triangle BAE \sim \triangle NAP$, 得 $NA = \frac{25}{6}$, 进而求解即可;

(2) 连接 CN , 根据垂直平分线的性质得 $AC = CN = AN$, 由等边三角形的性质得 $\angle ACE = 30^\circ$, 设 $AE = x$, 则 $AC = 2x$, 利用勾股定理求得 $CE = \sqrt{3}x$, 进而得 $BE = 8 - \sqrt{3}x$, 利用勾股定理列方程求得

$$x = \frac{4\sqrt{3} \pm 3}{2}, \text{ 进而求解即可.}$$

【小问 1 详解】

解: ① $\triangle AEC \sim \triangle MAN$, 理由如下:

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore AE \perp BC,$$

$$\therefore AE \perp AD,$$

$$\text{又} \because MN \perp AC,$$

$$\therefore \angle N + \angle NMA = 90^\circ, \quad \angle N + \angle CAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NMA = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle MAN = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AEC \sim \triangle MAN,$$

$$\triangle APN \sim \triangle MAN, \text{ 理由如下:}$$

$$\therefore \angle N + \angle CAE = 90^\circ, \quad \angle CAE + \angle ACE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle N = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle NPA = \angle CEA = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle APN \sim \triangle AEC;$$

$$\textcircled{2} \triangle ABE \text{ 与 } \triangle MAN \text{ 不一定相似, 当 } \triangle ABE \sim \triangle NMA \text{ 时,}$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CAE,$$

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{BE}{AE} = \frac{AB}{AC},$$

$$\therefore AE^2 = CE \cdot BE = BE \cdot (8 - BE),$$

$$\text{又} \because AE^2 = AB^2 - BE^2,$$

$$\therefore AB^2 - BE^2 = BE \cdot (8 - BE),$$

$$\therefore AD = 8, CD = 5,$$

$$\therefore 5^2 - BE^2 = BE \cdot (8 - BE),$$

$$\therefore BE = \frac{25}{8},$$

$$\therefore AE = \sqrt{5^2 - \left(\frac{25}{8}\right)^2} = \frac{5\sqrt{39}}{8},$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CAE,$$

$$\therefore \angle B = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle B + \angle BAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle CAE = 90^\circ, \text{ 即 } \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{39},$$

$$\therefore AP = \frac{\sqrt{39}}{2},$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle NPA,$$

$$\therefore \frac{BE}{AP} = \frac{AB}{NA}, \text{ 即 } \frac{\frac{25}{8}}{\frac{\sqrt{39}}{2}} = \frac{5}{NA},$$

$$\therefore NA = \frac{4\sqrt{39}}{5},$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle NMA,$$

$$\therefore \frac{AE}{NA} = \frac{\frac{5\sqrt{39}}{8}}{\frac{4\sqrt{39}}{5}} = \frac{25}{32},$$

当 $\triangle BAE \sim \triangle NMA$ 时,

$$\therefore \triangle BAE \sim \triangle CAE \sim \triangle NAP,$$

$$\therefore \angle B = \angle N = \angle ACE,$$

$$\therefore AB = AC = 5,$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BC = 4,$$

$$\therefore AE = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\therefore MN \text{ 垂直平分 } AC,$$

$$\therefore AP = \frac{1}{2}AC = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \triangle BAE \sim \triangle NAP,$$

$$\therefore \frac{AB}{NA} = \frac{AE}{AP}, \text{ 即 } \frac{5}{NA} = \frac{3}{\frac{5}{2}},$$

$$\therefore NA = \frac{25}{6},$$

$$\therefore \triangle BAE \sim \triangle NMA,$$

$$\therefore \frac{BE}{NA} = \frac{4}{\frac{25}{6}} = \frac{24}{25},$$

$\therefore \triangle ABE$ 与 $\triangle MAN$ 不一定相似，如果它与 $\triangle AMN$ 相似，相似比为 25:32 或 24:25；

【小问 2 详解】

解：连接 CN ，

$$\because AE \perp BC, \quad AE = EN,$$

$$\therefore AC = CN,$$

$$\because NM \text{ 垂直平分 } AC,$$

$$\therefore AN = CN,$$

$$\therefore AC = CN = AN,$$

$\therefore \triangle ANC$ 是等边三角形，

$$\because AE \perp BC,$$

$$\therefore \angle ACE = 30^\circ,$$

设 $AE = x$ ，则 $AC = 2x$ ，

$$\therefore CE = \sqrt{3}x,$$

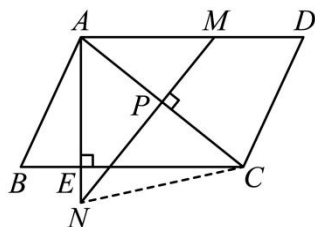
$$\therefore BE = 8 - \sqrt{3}x,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中， $x^2 + (8 - \sqrt{3}x)^2 = 5^2$ ，

$$\text{解得 } x = \frac{4\sqrt{3} \pm 3}{2},$$

$$\text{当 } AE = \frac{4\sqrt{3} + 3}{2} \text{ 时, } \sin \angle B = \frac{AE}{AB} = \frac{\frac{4\sqrt{3} + 3}{2}}{5} = \frac{4\sqrt{3} + 3}{10},$$

$$\text{当 } AE = \frac{4\sqrt{3} - 3}{2} \text{ 时, } \sin \angle B = \frac{AE}{AB} = \frac{\frac{4\sqrt{3} - 3}{2}}{5} = \frac{4\sqrt{3} - 3}{10}.$$



【点睛】本题考查相似三角形的性质与判定、垂直平分线的性质、勾股定理、锐角三角函数、平行四边形的性质、解一元二次方程、等边三角形的判定与性质、直角三角形的性质，熟练掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键。

