

虹口区 2023 学年度初三年级第二次学生学习能力诊断练习

数学 练习卷

(满分 150 分, 考试时间 100 分钟)

注意:

1. 本练习卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 请务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本练习卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

[下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.]

1. 下列各数中, 无理数是 ()

A. $\frac{2}{11}$

B. 3.14159

C. $\sqrt{6}$

D. $1.\dot{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查的是对无理数定义的应用, 熟练掌握理解无理数的定义是解此题的关键. 根据无理数的定义 (无理数是指无限不循环小数) 判断即可.

【详解】解: A、 $\frac{2}{11}$ 是分数, 不是无理数, 故本选项错误;

B、3.14159 是小数, 不是无理数, 故本选项错误;

C、 $\sqrt{6}$ 是无理数, 故本选项正确;

D、 $1.\dot{2}$ 是循环小数, 不是无理数, 故本选项错误;

故选 C.

2. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 无实数根, 则实数 m 的取值范围是 ()

A. $m < 1$

B. $m \leq 1$

C. $m \geq 1$

D. $m > 1$

【答案】D

【解析】

【分析】根据一元二次方程判别式与根情况的关系, 列代数式求解即可.

【详解】解: 一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 无实数根,

则判别式 $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4m < 0$

解得 $m > 1$,

故选: D.

【点睛】此题考查了一元二次方程判别式与根情况的关系, 解题的关键是掌握相关基础知识, 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$, 当 $\Delta > 0$ 时有两个不相等的实数根, 当 $\Delta = 0$ 时, 有两个相等的实数根, 当 $\Delta < 0$ 时, 无实数根.

3. 已知二次函数 $y = -(x-4)^2$, 如果函数值 y 随自变量 x 的增大而减小, 那么 x 的取值范围是 ()

A. $x \geq 4$

B. $x \leq 4$

C. $x \geq -4$

D. $x \leq -4$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查二次函数的性质, 熟练掌握二次函数的增减性是解题关键. 根据二次函数 $y = -(x-4)^2$, 可得 $y = -(x-4)^2$ 函数图象开口向下, 对称轴为 $x = 4$, 函数值 y 随自变量 x 的增大而减小, 则 $x \geq 4$, 得以解答.

【详解】解: 二次函数 $y = -(x-4)^2$,

$\because -1 < 0$,

$\therefore y = -(x-4)^2$ 函数图象开口向下, 对称轴为 $x = 4$,

$\therefore x \geq 4$ 时, 函数值 y 随自变量 x 的增大而减小,

故选: A.

4. 下列事件中, 必然事件是 ()

A. 随机购买一张电影票, 座位号恰好是偶数

B. 抛掷一枚质地均匀的硬币, 落地后反面朝上

C. 在只装有 2 个黄球和 3 个白球的盒子中, 摸出一个球是红球

D. 在平面内画一个三角形, 该三角形的内角和等于 180°

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查的是必然事件、不可能事件、随机事件的概念. 必然事件指在一定条件下, 一定发生的事件. 不可能事件是指在一定条件下, 一定不发生的事件, 不确定事件即随机事件是指在一定条件下, 可能发生也可能不发生的事件. 根据事件发生的可能性大小判断.

【详解】解：A、随机购买一张电影票，座位号是偶数，是随机事件；

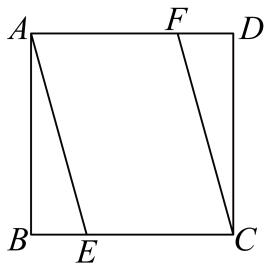
B、抛掷一枚质地均匀的硬币，反面朝下，是随机事件；

C、在只装有 2 个黄球和 3 个白球的盒子中，摸出一个球是红球，是不可能事件；

D、在平面内画一个三角形，该三角形的内角和等于 180° ，是必然事件；

故选 D.

5. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 分别在边 BC 和 AD 上， $BE = 2$ ， $AF = 6$ ，如果 $AE \parallel CF$ ，那么 $\triangle ABE$ 的面积为 ()



A. 6

B. 8

C. 10

D. 12

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了正方形的性质，平行四边形的性质与判定，先根据正方形的性质得到 $AD \parallel BC$ ， $AB = CD$ ， $\angle ABE = 90^\circ$ ，进而证明四边形 $AECF$ 是平行四边形，得到 $AF = CE = 6$ ，则 $AB = BC = BE + CE = 8$ ，最后根据三角形面积计算公式求解即可.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AD \parallel BC$ ， $AB = CD$ ， $\angle ABE = 90^\circ$ ，

$\therefore AE \parallel CF$ ，

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形，

$\therefore AF = CE = 6$ ，

$\therefore AB = BC = BE + CE = 8$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot BE = \frac{1}{2} \times 2 \times 8 = 8,$$

故选：B.

6. 在 $ABCD$ 中， $BC = 5$ ， $S_{\square ABCD} = 20$. 如果以顶点 C 为圆心， BC 为半径作 $\odot C$ ，那么 $\odot C$ 与边 AD 所在直线的公共点的个数是 ()

A. 3 个

B. 2 个

C. 1 个

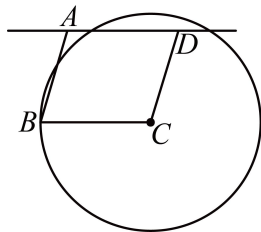
D. 0 个.

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的面积，直线与圆的位置关系 d 、 r 法则，熟练掌握法则是解题的关键．根据面积公式计算点 C 到 AD 的距离 d ，比较 d 与半径 BC 的大小判断即可．

【详解】解：如图，



$\therefore$ 在平行四边形 $ABCD$ 中， $BC = 5$ ， $S_{\square ABCD} = 20$ ，

设点 C 到 AD 的距离为 d ，

$\therefore$ 点 C 到 AD 的距离 $d = 20 \div 5 = 4$ ，

$\therefore 4 < 5 = BC$

$\therefore$ 直线 AD 与圆 C 相交，即有 2 个交点，

故选：B.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

【请将结果直接填入答题纸的相应位置】

7. 计算： $\sqrt[3]{-8} = \underline{\quad}$.

【答案】-2

【解析】

【分析】根据立方根的定义，求数 a 的立方根，也就是求一个数 x ，使得 $x^3 = a$ ，则 x 就是 a 的立方根．

【详解】 $\because (-2)^3 = -8$ ，

$\therefore \sqrt[3]{-8} = -2$ ，

故答案为：-2

8. 分解因式： $a^2 - 9b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(a+3b)(a-3b)$

【解析】

【分析】根据平方差公式因式分解即可求解．

【详解】解： $a^2 - 9b^2 = (a+3b)(a-3b)$

故答案为: $(a+3b)(a-3b)$.

【点睛】 本题考查了因式分解, 熟练掌握因式分解的方法是解题的关键.

9. 解不等式: $5x+2 \leq 3(2+x)$, 的解集为_____.

【答案】 $x \leq 2$

【解析】

【分析】 本题主要考查的是解一元一次不等式; 按照去括号、移项、合并同类项、系数化为 1 的步骤解一元一次不等式即可求解.

【详解】 解: $5x+2 \leq 3(2+x)$

去括号, $5x+2 \leq 6+3x$

移项, $5x-3x \leq 6-2$

合并同类项, $2x \leq 4$

化系数为 1, $x \leq 2$

故答案为: $x \leq 2$.

10. 函数 $y = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域是_____

【答案】 $x > -1$

【解析】

【分析】 定义域是指该函数的自变量的取值范围, 根据二次根号下被开方数 ≥ 0 ; 分式中分母不为 0; 即可解答.

【详解】 定义域是指该函数的自变量的取值范围,

二次根号下被开方数 ≥ 0 ; 分式中分母不为 0;

$\therefore x+1 > 0$

$\therefore x > -1$

故答案为 $x > -1$

11. 将抛物线 $y = (x-2)^2 + 1$ 先向右平移 3 个单位, 再向下平移 4 个单位后, 所得到的新抛物线的表达式为_____.

【答案】 $y = (x-5)^2 - 3$

【解析】

【分析】 本题主要考查的是二次函数的图象与几何变换, 要求熟练掌握平移的规律: 左加右减, 上加下减. 并

用规律求函数解析式. 根据平移规律“左加右减, 上加下减”写出新抛物线解析式.

【详解】解: 抛物线 $y = (x-2)^2 + 1$ 先向右平移 3 个单位, 再向下平移 4 个单位后, 所得到的新抛物线的表达式为 $y = (x-2-3)^2 + 1 - 4$, 即 $y = (x-5)^2 - 3$.

故答案为: $y = (x-5)^2 - 3$.

12. 在一个不透明袋子中, 装有 2 个红球和一些白球, 这些球除颜色外其他都一样, 如果从袋中随机摸出一个球是红球的概率为 0.25, 那么白球的个数是_____.

【答案】6

【解析】

【分析】本题考查了概率的定义. 解题的关键与难点在于理解概率的定义, 求出球的总数. 随机摸出一个球是红球的概率是 $0.25 = \frac{2}{n}$, 可以得到球的总个数, 进而得出白球的个数.

【详解】解: 设红、白球总共 n 个, 记摸出一个球是红球为事件 A ,

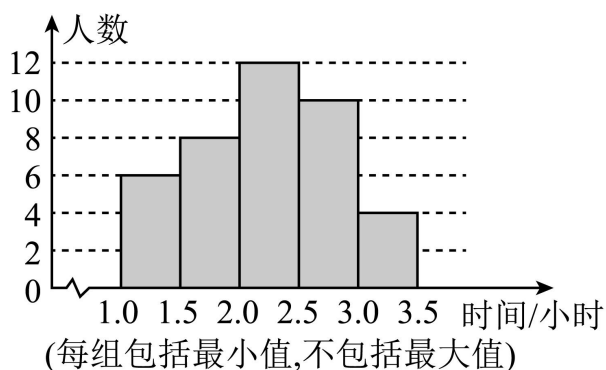
$$\therefore P(A) = 0.25 = \frac{2}{n}$$

$$\therefore n = 8,$$

$$\therefore \text{白球有 } 8 - 2 = 6 \text{ 个}$$

故答案为: 6.

13. 某校为了解该校 1200 名学生参加家务劳动的情况, 随机抽取 40 名学生, 调查了他们的周家务劳动时间并制作成频数分布直方图, 那么估计该校周家务劳动时间不少于 2 小时的学生大约有_____名.



【答案】780

【解析】

【分析】本题主要考查了用样本估计总体, 根据条形统计图获取信息是解题的关键. 根据条形统计图直接得出家务劳动时间不少于 2 小时的学生有 26 名, 进而估计该校 1200 名学生参加家务劳动时间不少于 2 小时的学生人数即可求解.

【详解】解：由题意得：被调查的 40 人中，家务劳动时间不少于 2 小时的学生有 26 名，

∴该校周家务劳动时间不少于 2 小时的学生大约有 $\frac{26}{40} \times 1200 = 780$ （名），

故答案为：780.

14. 一根蜡烛长 30 厘米，点燃后匀速燃烧，经过 50 分钟其长度恰为原长的一半. 在燃烧的过程中，如果设蜡烛的长为 y （厘米），燃烧的时间为 t （分钟），那么 y 关于 t 的函数解析式为_____（不写定义域）.

【答案】 $y = 30 - 0.3t$

【解析】

【分析】本题主要考查由实际问题列一次函数的解析式，解题的关键是理解题意. 根据题意先求出蜡烛燃烧的速度为 $15 \div 50 = 0.3$ （厘米/分），即可直接进行求解.

【详解】解：由题意可得：蜡烛长 30 厘米，经过 50 分钟其长度恰为原长的一半，

∴经过 50 分钟蜡烛燃烧的长度为 15 厘米，

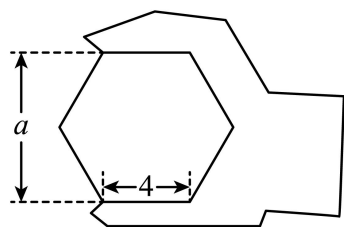
∴蜡烛燃烧的速度为 $15 \div 50 = 0.3$ （厘米/分），

蜡烛的长为蜡烛燃烧前长度减去燃烧的长度，

$$y = 30 - 0.3t,$$

故答案为： $y = 30 - 0.3t$.

15. 如图，正六边形螺帽的边长是 4cm，那么这个扳手的开口 a 的值是_____.

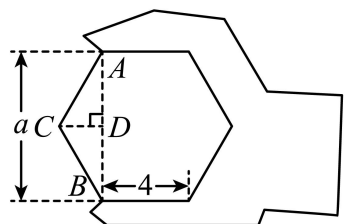


【答案】 $4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】本题考查解直角三角形，等腰三角形的性质，含 30° 角的直角三角形的性质. 由螺帽是正六边形，可得 $\triangle ACD$ 是含 30° 角的直角三角形，再根据 $AC = 4$ 即可求出 AD 和 AB .

【详解】解：如图，连接 AB ，则 $a = AB$ ，过点 C 作 $CD \perp AB$ 于 D



∵ 螺帽是正六边形

$$\therefore \angle ACB = 120^\circ$$

$$\because CD \perp AB, AC = BC$$

$$\therefore \angle ACD = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ, AD = BD$$

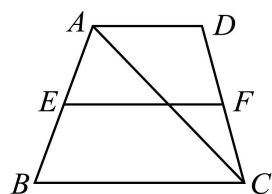
$$\because AC = 4$$

$$\therefore AD = \frac{\sqrt{3}}{2} AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore a = AB = 2AD = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

故答案为: $4\sqrt{3}$.

16. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $BC = 2AD$, 点 E 、 F 分别是边 AB 、 CD 的中点, 连接 AC , 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 那么用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{EF} =$ _____.



【答案】 $-\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查了平面向量的问题, 熟练掌握三角形法则是解题的关键, 根据梯形的中位线定理及向量的三角形法则解答即可.

【详解】 解: $\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b},$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\vec{a} + \vec{b},$$

$$\because AD \parallel BC, BC = 2AD,$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

∵ 点 E 、 F 分别是边 AB 、 CD 的中点,

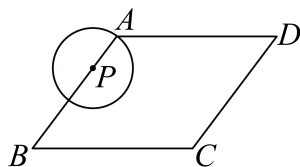
$$\therefore \overrightarrow{EA} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2} \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{DF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DC} = \frac{1}{4} \vec{a} + \frac{1}{4} \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = -\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} + \frac{1}{4} \vec{a} + \frac{1}{4} \vec{b} = -\frac{3}{4} \vec{a} + \frac{3}{4} \vec{b},$$

故答案为: $-\frac{3}{4} \vec{a} + \frac{3}{4} \vec{b}$.

17. 如图, 在 $ABCD$ 中, $AB=7$, $BC=8$, $\sin B = \frac{4}{5}$. 点 P 在边 AB 上, $AP=2$, 以点 P 为圆心, AP 为半径作 $\odot P$. 点 Q 在边 BC 上, 以点 Q 为圆心, CQ 为半径作 $\odot Q$. 如果 $\odot P$ 和 $\odot Q$ 外切, 那么 CQ 的长为_____.

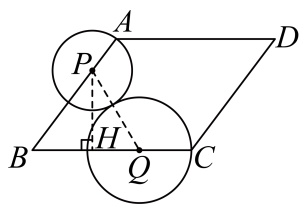


【答案】 $\frac{37}{14}$ 或 $2\frac{9}{14}$

【解析】

【分析】 本题考查的是圆和圆的位置关系、解直角三角形的知识, 作 $PH \perp BC$ 于点 H , 连接 PQ , 先求出 $PH=4$, $BH=3$, 设 $CQ=a$, 在 $\text{Rt}\triangle QPH$ 中, 根据勾股定理列方程即可解决.

【详解】 解: 作 $PH \perp BC$ 于点 H , 连接 PQ ,



$$\because AB=7, AP=2,$$

$$\therefore BP=7-2=5,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle BPH \text{ 中, } \sin B = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \frac{PH}{5} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore PH=4, BH=\sqrt{5^2-4^2}=3,$$

设 $CQ = a$,

Qe P 和 $\odot Q$ 外切, $\odot P$ 半径为 2,

$$\backslash PQ = a + 2,$$

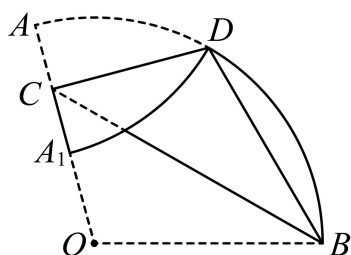
在 $\text{Rt}\triangle QPH$ 中, $PH = 4, HQ = 8 - 3 - a = 5 - a$,

$$\therefore 4^2 + (5 - a)^2 = (a + 2)^2,$$

$$\text{解得: } a = \frac{37}{14},$$

$$\text{故答案为: } \frac{37}{14}.$$

18. 如图, 在扇形 AOB 中, $\angle AOB = 105^\circ$, $OA = 8$, 点 C 在半径 OA 上, 将 $\triangle BOC$ 沿着 BC 翻折, 点 O 的对称点 D 恰好落在弧 AB 上, 再将弧 AD 沿着 CD 翻折至弧 A_1D (点 A_1 是点 A 的对称点), 那么 OA_1 的长为_____.

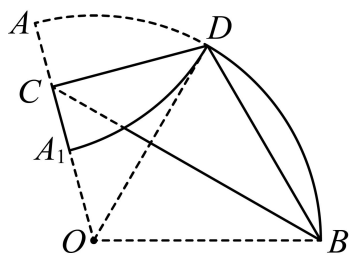


【答案】 $8\sqrt{2} - 8$

【解析】

【分析】 本题考查翻折性质, 圆的基本性质, 等边三角形判定与性质、勾股定理的应用, 连接 OD , 由翻折得 $OB = BD$, $AC = A_1C$, $\angle BOC = \angle BDC = 105^\circ$, 证出 $\triangle OBD$ 是等边三角形, 设 $AC = a$, 在 $\text{Rt}\triangle COD$ 中, 根据勾股定理列方程并解出 AC 进而求出结论.

【详解】 解: 连接 OD ,



由翻折得: $OB = BD$, $AC = A_1C$, $\angle BOC = \angle BDC = 105^\circ$, $OC = CD$,

$$\because OB = OD,$$

$\therefore \triangle OBD$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle OBD = 60^\circ,$$

$$\angle DOC = 360^\circ - 105^\circ - 105^\circ - 60^\circ = 90^\circ,$$

设 $AC = a$, 则 $OC = 8 - a = CD$, $A_1O = 8 - 2a$,

在 $\text{Rt}\triangle COD$ 中, $OC = CD = 8 - a$,

$$\therefore (8 - a)^2 + (8 - a)^2 = 8^2,$$

解得: $a_1 = 8 - 4\sqrt{2}$, $a_2 = 8 + 4\sqrt{2} > 8$ (舍去),

$$\therefore OA_1 = OA - 2AC = 8 - 2(8 - 4\sqrt{2}) = 8\sqrt{2} - 8,$$

故答案为: $8\sqrt{2} - 8$.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 先化简, 再求值: $\frac{m^2 - 2m + 1}{m^2 + 3m} \div \left(1 - \frac{4}{m + 3}\right)$, 其中 $m = \sqrt{2}$.

【答案】 $\frac{m-1}{m}, \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查分式的化简求值, 分母有理化, 掌握分式的基本性质与运算法则是解题的关键, 注意化简过程中能因式分解要先因式分解. 先算括号内的减法, 把除法变成乘法, 算乘法, 最后代入求值即可.

【详解】 解:
$$\begin{aligned} & \frac{m^2 - 2m + 1}{m^2 + 3m} \div \left(1 - \frac{4}{m + 3}\right) \\ &= \frac{(m-1)^2}{m(m+3)} \div \left(\frac{m+3}{m+3} - \frac{4}{m+3}\right) \\ &= \frac{(m-1)^2}{m(m+3)} \div \frac{m-1}{m+3} \\ &= \frac{(m-1)^2}{m(m+3)} \times \frac{m+3}{m-1} \\ &= \frac{m-1}{m}; \end{aligned}$$

当 $m = \sqrt{2}$ 时, $\frac{m-1}{m} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} 2x-y=6 \\ x^2-xy-2y^2=0 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=2 \end{cases}, \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-2 \end{cases}$$

【解析】

【分析】将第二个方程进行因式分解得到 $(x+y)(x-2y)=0$, 然后令因式 $x-2y$ 和因式 $x+y$ 分别为 0 即可求解.

【详解】解: 由题意可知:
$$\begin{cases} 2x-y=6 \textcircled{1} \\ x^2-xy-2y^2=0 \textcircled{2} \end{cases}$$

对方程②进行因式分解得: $(x+y)(x-2y)=0$

即 $x-2y=0$ 或 $x+y=0$

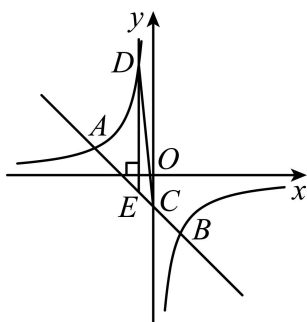
$\therefore$ 原方程组化为
$$\begin{cases} 2x-y=6 \\ x-2y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 2x-y=6 \\ x+y=0 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-2 \end{cases}$$

故原方程组的解为:
$$\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-2 \end{cases}.$$

【点睛】本题考查了因式分解的方法及二元方程组, 熟练掌握常见的二元一次方程组的解法是解决此类题的关键.

21. 如图, 一次函数图像在反比例函数图像相交于点 $A(m, 2)$ 和点 $B(2, -4)$, 与 y 轴交于点 C . 点 $D(-1, n)$ 在反比例函数图像上, 过点 D 作 x 轴的垂线交一次函数图像于点 E .



(1) 求反比例函数和一次函数的解析式;

(2) 求 $\triangle CDE$ 的面积.

【答案】(1) 反比例函数为 $y = -\frac{8}{x}$, 一次函数解析式 $y = -x - 2$

(2) $\frac{9}{2}$

【解析】

【分析】此题考查了反比例函数综合题, 涉及的知识有: 待定系数法确定反比例函数和一次函数解析式, 三角形面积.

(1) 利用待定系数法求解即可;

(2) 先分别求出 C 、 D 、 E 的坐标, 进而利用三角形面积公式解答即可.

【小问 1 详解】

解: 设反比例函数为 $y = \frac{k}{x}$,

把点 $B(2, -4)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 得, $k = -4 \times 2 = -8$,

$\therefore$ 反比例函数为 $y = -\frac{8}{x}$,

把点 $A(m, 2)$, 点 $D(-1, n)$ 代入 $y = -\frac{8}{x}$, 得

$$2 = -\frac{8}{m}, \quad n = -\frac{8}{-1} = 8,$$

$$\therefore m = -4, \quad n = 8,$$

$\therefore$ 点 $A(-4, 2)$, 点 $D(-1, 8)$,

设一次函数解析式 $y = cx + d$,

把点 $A(-4, 2)$, 点 $B(2, -4)$ 代入得

$$\begin{cases} -4 = 2c + d \\ 2 = -4c + d \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} c = -1 \\ d = -2 \end{cases},$$

$\therefore$ 一次函数解析式 $y = -x - 2$;

【小问 2 详解】

$\because$ 一次函数解析式 $y = -x - 2$,

$\therefore C(0, -2)$,

把点 $D(-1, n)$ 代入 $y = -\frac{8}{x}$, 得 $n = -\frac{8}{-1} = 8$,

$\therefore n = 8$,

$\therefore$ 点 $D(-1, 8)$,

$\because DE \perp x$ 轴,

$\therefore$ 点 E 的横坐标为 -1 ,

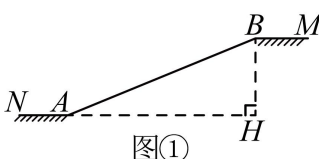
把 $x = -1$ 代入 $y = -x - 2$ 得 $y = 1 - 2 = -1$,

$\therefore E(-1, -1)$,

$\therefore DE = 1 + 8 = 9$,

$\therefore S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} DE \cdot 1 = \frac{1}{2} \times 9 \times 1 = \frac{9}{2}$.

22. 根据以下素材, 完成探索任务.

探究斜坡上两车之间距离	
素材 1	图①是某高架入口的横断面示意图. 高架路面用 BM 表示, 地面用 AN 表示, 斜坡用 AB 表示. 已知 $BM \parallel AN$, 高架路面 BM 离地面的距离 BH 为 25 米, 斜坡 AB 长为 65 米.  图①
素材 2	如图②, 矩形 $ECKG$ 为一辆大巴车的侧面示意图, CK 长为 10 米, EC 长为 3.5 米. 如图③, 该大巴车遇堵车后停在素材 1 中的斜坡上, 矩形 $ECKG$ 的顶点 K 与点 B 重合, 点 B 与指示路牌底端 P 点之间的距离 BP 为 6.5 米, 且 $BP \perp BM$. 小张驾驶一辆小轿车跟随大巴车行驶, 小张的眼睛到斜坡的距离 FD 为 1 米.

$\because ABH \sim PBO, O = H = 90^\circ, BP$ 为 6.5 米,

$$\cos \angle PBO = \frac{BO}{6.5} = \cos \angle ABH = \frac{25}{65},$$

解得: $BO = 2.5$ 米,

$$PO = \sqrt{6.5^2 - 2.5^2} = 6 \text{ 米},$$

$$\therefore PQ = 6 - 1 = 5 \text{ 米}, RQ = CO = 10 + 2.5 = 12.5 \text{ 米},$$

$\because EC \perp AB, PQ \perp AB,$

$\therefore ER \parallel PQ,$

$\therefore \triangle FER \sim \triangle FPQ,$

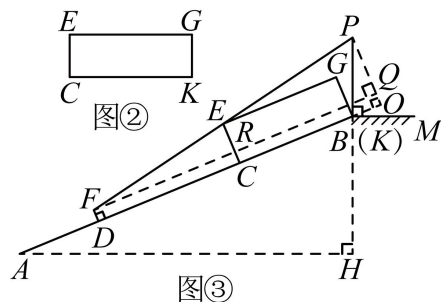
$$\frac{ER}{PQ} = \frac{FR}{FQ},$$

$$\frac{2.5}{5} = \frac{FR}{FR + 12.5},$$

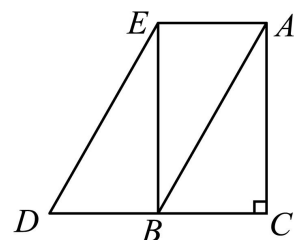
解得: $FR = 12.5,$

经检验, $FR = 12.5$ 是原方程的解,

$\therefore CD = FR = 12.5$ 米.



23. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 延长 CB 至点 D , 使得 $DB = CB$, 过点 A 、 D 分别作 $AE \parallel BC$, $DE \parallel BA$, AE 与 DE 相交于点 E , 连接 BE .



(1) 求证: $BE \perp CD$;

(2) 连接 AD 交 BE 于点 F ，连接 CE 交 AD 于点 G 。如果 $\angle FBA = \angle ADB$ ，求证： $AG = \frac{\sqrt{2}}{3} AB$ 。

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】本题考查平行四边形的判定与性质，矩形的判定与性质，勾股定理等，解题的关键是掌握平行四边形和矩形的判定方法。

(1) 先证四边形 $AEDB$ 是平行四边形，得出 $AE = CB$ 从而证出四边形 $AEBC$ 是矩形，即可证明结论；

(2) 设 $EF = BF = a$ ，算出 $AE = \sqrt{2}a$ ，证明 $\triangle AEG \sim \triangle DCG$ ，求出 $AG = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$ ， $AB = \sqrt{6}a$ 进而

证出结论；

【小问 1 详解】

证明： $\because AE \parallel BD$ ， $DE \parallel BA$ ，

$\therefore$ 四边形 $AEDB$ 是平行四边形，

$\therefore AE = BD$ ，

$\because BD = CB$ ，

$\therefore AE = CB$ ，

又 $\because AE \parallel BD$ ，点 D 在 CB 的延长线上，

$\therefore AE \parallel CB$ ，

$\therefore$ 四边形 $AEBC$ 是平行四边形，

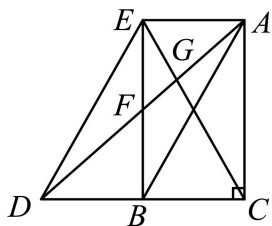
又 $\because \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $AEBC$ 是矩形，

$\therefore BE \perp CD$ ；

【小问 2 详解】

解：如图，



$\therefore$ 四边形 $AEDB$ 是平行四边形，

$$\backslash EF = BF, AF = DF,$$

$$\text{设 } EF = BF = a,$$

$$\therefore \angle FBA = \angle ADB,$$

$$\backslash \tan \angle FBA = \tan \angle ADB,$$

$$\backslash \frac{AE}{BE} = \frac{BF}{BD},$$

$$\therefore AE = BD,$$

$$\backslash AE^2 = 2a^2,$$

$$\therefore AE = \sqrt{2}a,$$

$$\backslash BD = BC = AE = \sqrt{2}a,$$

$$\therefore AE \parallel CD,$$

$$\backslash \triangle AEG \sim \triangle DCG,$$

$$\backslash \frac{AE}{CD} = \frac{AG}{DG} = \frac{1}{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle DBF$ 中,

$$DF = \sqrt{a^2 + (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{3}a,$$

$$\backslash AD = 2\sqrt{3}a,$$

$$\backslash AG = \frac{2\sqrt{3}a}{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$AB = \sqrt{(2a)^2 + (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{6}a,$$

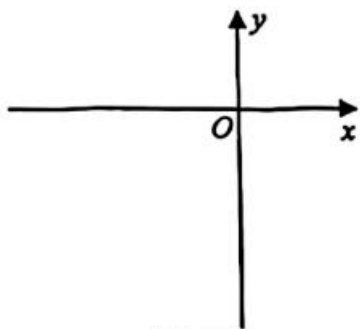
$$\backslash \frac{AG}{AB} = \frac{\frac{2\sqrt{3}a}{3}}{\sqrt{6}a} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\backslash AG = \frac{\sqrt{2}}{3}AB.$$

24. 新定义: 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (其中 $abc \neq 0$), 我们把抛物线 $y = cx^2 + ax + b$ 称为

$y = ax^2 + bx + c$ 的“轮换抛物线”. 例如: 抛物线 $y = 2x^2 + 3x + 1$ 的“轮换抛物线”为 $y = x^2 + 2x + 3$.

已知抛物线 $C_1: y = 4mx^2 + (4m-5)x + m$ 的“轮换抛物线”为 C_2 ，抛物线 C_1 、 C_2 与 y 轴分别交于点 E 、 F ，点 E 在点 F 的上方，抛物线 C_2 的顶点为 P 。



备用图

- (1) 如果点 E 的坐标为 $(0,1)$ ，求抛物线 C_2 的表达式；
- (2) 设抛物线 C_2 的对称轴与直线 $y = 3x + 8$ 相交于点 Q ，如果四边形 $PQEF$ 为平行四边形，求点 E 的坐标；
- (3) 已知点 $M(-4, n)$ 在抛物线 C_2 上，点 N 坐标为 $(-2, -7\frac{1}{2})$ ，当 $\triangle PMN \sim \triangle PEF$ 时，求 m 的值。

【答案】(1) $y = x^2 + 4x - 1$

(2) $E(0, -\frac{2}{3})$

(3) $m = -1$ 或 $\frac{17}{32}$

【解析】

【分析】 本题考查的是二次函数综合题，重点考查二次函数的性质、平行四边形性质及相似三角形性质，

- (1) 将点 $E(0,1)$ 代入表达式，求出 m 的值，根据“轮换抛物线”定义写出即可；
- (2) 根据轮换抛物线定义得出抛物线 C_2 表达式及点 E 、 F 坐标，并求出 P 、 Q 坐标，根据平行四边形性质得出 $PQ = EF$ 列方程并解出 m 值，进而解决问题；
- (3) 先求 $M(-4, 4m-5)$ ，结合求出的点 P 、 E 、 F 坐标得出 PN^2 及 PF^2 ，根据相似三角形性质得出关于 m 的方程，解方程即可解决。

【小问 1 详解】

解：抛物线 $C_1: y = 4mx^2 + (4m-5)x + m$ 与 y 轴交于点 E 坐标为 $(0,1)$ ，

当 $x=0$, $y=1$ 代入, 得 $m=1$,

$$\backslash 4m-5=-1,$$

$\therefore$ 抛物线 C_1 表达式为 $y=4x^2-x+1$,

$\therefore$ 抛物线 C_1 的“轮换抛物线”为 C_2 表达式为 $y=x^2+4x-1$;

【小问2详解】

解: 抛物线 C_1 : $y=4mx^2+(4m-5)x+m$,

当 $x=0$ 时, $y=m$, 即与 y 轴交点为 $E(0, m)$,

$\therefore$ 抛物线 C_1 : $y=4mx^2+(4m-5)x+m$ 的“轮换抛物线”为 C_2 ,

$\therefore$ 抛物线 C_2 表达式为 $y=mx^2+4mx+(4m-5)$,

同理抛物线 C_2 与 y 轴交点为 $F(0, 4m-5)$,

抛物线 C_2 对称轴为直线 $x=-\frac{4m}{2m}=-2$,

当 $x=-2$ 时, $y=-5$,

$\therefore$ 抛物线 C_2 的顶点坐标为 $P(-2, -5)$,

当 $x=-2$ 时, $y=3x+8=2$,

$\therefore$ 抛物线 C_2 的对称轴与直线 $y=3x+8$ 交点 $Q(-2, 2)$,

$\therefore$ 点 E 在点 F 的上方,

$$\backslash m > 4m-5,$$

解得: $m < \frac{5}{3}$,

$$\backslash EF = m - (4m-5) = 5-3m,$$

$\therefore$ 四边形 $PQEF$ 为平行四边形,

$$\backslash PQ = EF, \text{ 即 } 2 - (-5) = 5 - 3m,$$

解得: $m = -\frac{2}{3}$,

$$\therefore E\left(0, -\frac{2}{3}\right);$$

【小问3 详解】

解: $\because$ 点 $M(-4, n)$ 在抛物线 C_2 上,

当 $x = -4$ 时, $y = mx^2 + 4mx + (4m - 5) = 4m - 5$, 即 $M(-4, 4m - 5)$,

$\because$ 点 N 坐标为 $\left(-2, -7\frac{1}{2}\right)$, $P(-2, -5)$, $E(0, m)$, $F(0, 4m - 5)$,

$$\therefore PN^2 = (-2+2)^2 + \left(-5+7\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}, \quad PF^2 = (-2)^2 + (4m-5+5)^2 = 4+16m^2,$$

$$\therefore S_{\triangle PEF} = \frac{1}{2} EF \cdot |x_P| = \frac{1}{2} (5-3m) \cdot 2 = 5-3m,$$

$$S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} PN \cdot |x_M - x_P| = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{4} \cdot (-2+4) = \frac{5}{2},$$

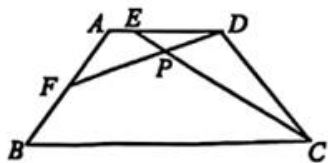
$\therefore \triangle PMN \sim \triangle PEF$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle PEF}}{S_{\triangle PMN}} = \left(\frac{PF}{PN}\right)^2 = \frac{PF^2}{PN^2}$$

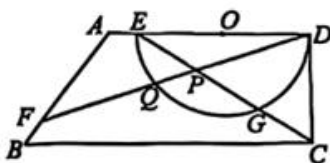
$$\therefore \frac{5-3m}{\frac{5}{2}} = \frac{4+16m^2}{\frac{25}{4}},$$

$$\text{解得: } m_1 = -1, m_2 = \frac{17}{32}.$$

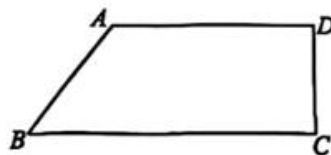
25. 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 点 E 在射线 DA 上, 点 F 在射线 AB 上, 连接 CE 、 DF 相交于点 P , $\angle EPF = \angle ABC$.



图①



图②



备用图

(1) 如图①, 如果 $AB = CD$, 点 E 、 F 分别在边 AD 、 AB 上. 求证: $\frac{AF}{DE} = \frac{DF}{CE}$;

(2) 如图②, 如果 $AD \perp CD$, $AB = 5$, $BC = 10$, $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$. 在射线 DA 的下方, 以 DE 为直径

作半圆 O , 半圆 O 与 CE 的另一个交点为点 G . 设 DF 与弧 EG 的交点为 Q .

①当 $DE = 6$ 时, 求 EG 和 AF 的长;

②当点 Q 为弧 EG 的中点时, 求 AF 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) ① $EG = \frac{18\sqrt{13}}{13}$; $AF = \frac{21}{5}$; ② 15

【解析】

【分析】(1) 根据等腰梯形的性质可得 $\angle B = \angle DCB = \angle DCE + \angle BCE$, $\angle A = \angle EDC$, $\angle DEC = \angle BCE$, 根据三角形的外角性质得出 $\angle FPE = \angle CED + \angle EDP$, 进而可得 $\angle ADF = \angle DCE$, 即可证明 $\triangle ADF \sim \triangle DCE$, 根据相似三角形的性质, 即可求解;

(2) ①同 (1) 证明 $\triangle ADF \sim \triangle PDE$, 如图所示, 过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M , 连接 DG , 得出

$\cos \angle DEC = \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\sin \angle DEC = \frac{2\sqrt{13}}{13}$, 解直角三角形, 分别求得 EG , EP , 进而根据相似三角形的性质求得 AF 的长;

②根据题意画出图形, 根据垂径定理得出 $OQ \perp EQ$, 根据题意可设 $\angle EPF = \angle ABC = \alpha$,

$\angle ODQ = \angle OQD = \beta$, 则 $\alpha + \beta = 90^\circ$, 得出 $\tan \alpha = \frac{4}{3}$, $\tan \beta = \frac{3}{4}$, 设 $FR = 12a$, 则 $AR = 9a$, 则 $AF = 15a$, 在 $\text{Rt}\triangle DFR$ 中, 得出 $DR = 16a$, 根据 $AD = DR - AR = 16a - 9a = 7a$ 得出 $a = 1$, 即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = CD$,

$\therefore \angle B = \angle DCB = \angle DCE + \angle BCE$, $\angle A = \angle EDC$, $\angle DEC = \angle BCE$,

又 $\because \angle FPE = \angle CED + \angle EDP$, $\angle EPF = \angle ABC$

$\therefore \angle ADF = \angle DCE$

$\therefore \triangle ADF \sim \triangle DCE$,

$\therefore \frac{AF}{DE} = \frac{DF}{CE}$;

【小问 2 详解】

解: $\because \angle EPF = \angle ABC$, $\angle DPC = \angle EPF$

$\therefore \angle FPC + \angle DPC = 180^\circ$, 则 $\angle FPC + \angle B = 180^\circ$

$\therefore \angle ECB + \angle PFB = 180^\circ$

$\therefore \angle ECB = \angle AFD$

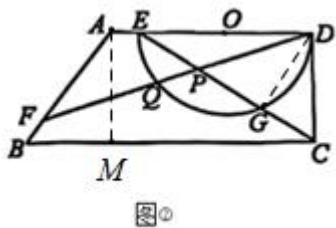
$\therefore AD \parallel BC$

$\therefore \angle ECB = \angle DEC$

又 $\because \angle EDP = \angle FDA$

$\therefore \triangle ADF \sim \triangle PDE$,

如图所示, 过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M, 连接 DG,



$$\because AB = 5, \cos \angle ABC = \frac{3}{5}$$

$$\therefore BM = 3, \text{ 则 } AM = 4, \sin \angle ABC = \frac{AM}{AB} = \frac{4}{5},$$

$$\because AD \parallel BC, AD \perp CD$$

$$\therefore CD = AM = 4$$

$$\because BC = 10$$

$$\therefore AD = MC = BC - BM = 10 - 3 = 7$$

$$\text{又 } \because DE = 6$$

$$\therefore AE = 1,$$

在 $\text{Rt}\triangle EDC$ 中, $ED = 6, CD = 4$

$$\therefore EC = \sqrt{ED^2 + CD^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$$

$$\therefore \cos \angle DEC = \frac{DE}{EC} = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \sin \angle DEC = \frac{DC}{EC} = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$\because ED$ 为直径

$$\therefore \angle DGE = 90^\circ$$

$$\therefore EG = ED \times \cos \angle DEC = 6 \times \frac{3\sqrt{13}}{13} = \frac{18\sqrt{13}}{13}, DG = ED \sin \angle DEC = 6 \times \frac{2\sqrt{13}}{13} = \frac{12\sqrt{13}}{13}$$

$$\therefore PD = \frac{DG}{\sin \angle DPG} = \frac{DG}{\sin \angle ABC} = \frac{\frac{12\sqrt{13}}{13}}{\frac{4}{5}} = \frac{15\sqrt{13}}{13}, PG = PD \cos \angle DPG = \frac{3}{5} \times \frac{15\sqrt{13}}{13} = \frac{9\sqrt{13}}{13}, \text{ 则}$$

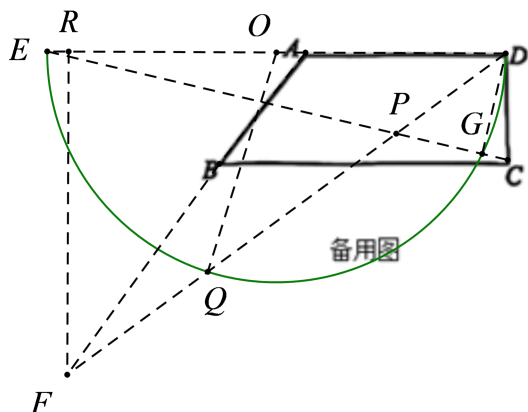
$$EP = EG - PG = \frac{9\sqrt{13}}{13},$$

$$\because \triangle ADF \sim \triangle PDE$$

$$\therefore \frac{AF}{PE} = \frac{AD}{PD}$$

$$\therefore AF = \frac{AD \cdot PE}{PD} = \frac{7 \times \frac{9\sqrt{13}}{13}}{\frac{15\sqrt{13}}{13}} = \frac{21}{5}$$

②过点 F 作 $FR \perp AD$ 于点 R ,



$$\because \widehat{EQ} = \widehat{GQ}$$

$$\therefore OQ \perp EQ$$

$$\because OQ = OD$$

$$\therefore \angle ODQ = \angle OQD$$

设 $\angle EPF = \angle ABC = \alpha$, $\angle ODQ = \angle OQD = \beta$, 则 $\alpha + \beta = 90^\circ$

$$\because \cos \angle DPG = \cos \angle EPF = \cos \angle ABC = \frac{3}{5}, \text{ 则 } \frac{PG}{PD} = \frac{3}{5}$$

设 $PG = 3k, PD = 5k$, 则 $GD = 4k$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{4}{3}, \tan \beta = \frac{3}{4}$$

$$\because AD \parallel BC$$

$$\therefore \angle RAF = \alpha$$

设 $FR = 12a$, 则 $AR = 9a$,

$$\therefore AF = 15a,$$

$$\text{在 Rt}\triangle DFR \text{ 中, } \tan \beta = \frac{RF}{DR} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore DR = 16a$$

$$\text{又} \because AD = DR - AR = 16a - 9a = 7a = 7$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore AF = 15$$

【点睛】 本题考查了解直角三角形，等腰梯形的性质，相似三角形的性质与判定，垂径定理，熟练掌握以上知识是解题的关键.



名师教学 · 务实课程 · 注重教辅

淘宝搜索店铺：优尖升教育
客服微信：DEM2008

手机淘宝扫一扫：
扫描二维码逛本店

ONLINE EDUCATION
为您的课程，我们一直在努力

最新资讯请认准“优尖升教育”，淘宝唯一一家，其他都是旧版
淘宝店铺网址：shop492842749.taobao.com