

浦东新区 2023 学年度第二学期初三年级模拟考试

数学试卷

考生注意：

1. 本试卷共 25 题，试卷满分 150 分，考试时间 100 分钟.
2. 答题时，考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答，在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
3. 除第一、二大题外，其余各题如无特别说明，都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题：（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的，选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列实数中，无理数是（ ）

- A. 0 B. $\sqrt{16}$ C. π D. $\frac{23}{7}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了无理数，算术平方根的含义，解答本题的关键掌握无理数的三种形式：①开方开不尽的数，②无限不循环小数，③含有 π 的数. 根据无理数的定义，“无限不循环的小数是无理数”逐个分析判断即可.

【详解】解： $\sqrt{16} = 4$ ，

在 $\sqrt{16}$ ， π ，0， $\frac{23}{7}$ 中，

$\sqrt{16}$ ，0， $\frac{23}{7}$ 是有理数， π 是无理数，

故选：C.

2. 下列计算中，结果等于 a^{2m} 的是（ ）

- A. $a^m + a^m$ B. $a^m \cdot a^2$ C. $(a^m)^m$ D. $(a^m)^2$

【答案】D

【解析】

【分析】直接利用合并同类项法则、同底数幂的乘法运算法则、幂的乘方运算法则分别计算得出答案.

【详解】解：A、 $a^m + a^m = 2a^m$ ，故此选项不合题意；

B、 $a^m \cdot a^2 = a^{m+2}$ ，故此选项不合题意；

C、 $(a^m)^m = a^{m^2}$ ，故此选项不合题意；

D、 $(a^m)^2 = a^{2m}$ ，故此选项符合题意.

故选: D.

【点睛】此题考查的是幂的运算性质和合并同类项，掌握合并同类项法则、同底数幂的乘法运算法则、幂的乘方运算法则是解决此题的关键.

3. 直线 $y=-x+1$ 经过的象限是 ()

A. 第一、二、三象限

B. 第一、二、四象限

C. 第二、三、四象限

D. 第一、三、四象限

【答案】 B

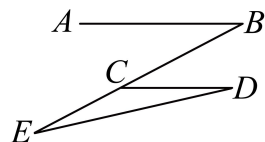
【解析】

【详解】 $\because y=-x+1$ 中 $k=-1, b=1$

$\therefore$ 它是递增的一次函数，与 x 、 y 轴的交点分别是 $(1,0)$ 、 $(0, 1)$

$\therefore$ 它的图象经过第一、二、四象限

4. 如图， $AB \parallel CD$ ， $\angle D = 13^\circ$ ， $\angle B = 28^\circ$ ，那么 $\angle E$ 等于 ()



A. 13°

B. 14°

C. 15°

D. 16°

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查的是平行线的性质，三角形的外角的性质，先证明 $\angle BCD = \angle B = 28^\circ$ ，再利用三角形的外角的性质可得答案.

【详解】 解: $\because AB \parallel CD$ ， $\angle B = 28^\circ$ ，

$\therefore \angle BCD = \angle B = 28^\circ$ ，

$\because \angle D = 13^\circ$ ，

$\therefore \angle BED = \angle BCD - \angle D = 28^\circ - 13^\circ = 15^\circ$ ，

故选 C

5. 下列命题中，真命题是 ()

A. 对角线相等的四边形是平行四边形

B. 对角线相等的平行四边形是矩形

C. 对角线互相垂直的四边形是菱形

D. 对角线互相垂直且相等的四边形是正方形

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了平行四边形的判定，矩形的判定，菱形的判定，正方形的判定，解题的关键是熟练掌握相关判定定理. 根据平行四边形的判定，矩形的判定，菱形的判定，正方形的判定即可进行解答.

【详解】解：A、对角线互相平分的四边形是平行四边形，故A不符合题意；

B、对角线相等的平行四边形是矩形，故B符合题意；

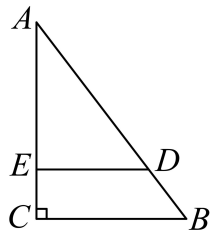
C、对角线互相垂直的平行四边形是菱形，故C不符合题意；

D、对角线互相垂直且相等的平行四边形是正方形，故D不符合题意；

故选：B.

6. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $BC = 3$. 点 D 在边 AB 上，且 $\frac{BD}{AD} = \frac{1}{3}$ ， $DE \parallel BC$

交边 AC 于点 E ，那么以 E 为圆心， EC 为半径的 $\odot E$ 和以 D 为圆心， BD 为半径的 $\odot D$ 的位置关系是 ()



A. 外离

B. 外切

C. 相交

D. 内含

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查的是两圆的位置关系，相似三角形的判定与性质，勾股定理的应用，先求解 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5$ ，再证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，求解 $BD = \frac{5}{4}$ ， $CE = AC - AE = 1$ ，再结合两圆的位置关系可得答案.

【详解】解： $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $BC = 3$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5,$$

$$\because \frac{BD}{AD} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{3}{4}, \quad BD = \frac{5}{4},$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DE}{3} = \frac{3}{4} = \frac{AE}{4},$$

$$\therefore DE = \frac{9}{4}, \quad AE = 3,$$

$$\therefore CE = AC - AE = 1,$$

$$\therefore CE + BD = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4} = DE,$$

$\therefore$ 以 E 为圆心, EC 为半径的 $\odot E$ 和以 D 为圆心, BD 为半径的 $\odot D$ 的位置关系是外切.

故选 B

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 分解因式: $a^2 - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(a+1)(a-1)$.

【解析】

【分析】 利用平方差公式分解因式即可得到答案

【详解】 解: $a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$.

故答案为: $(a+1)(a-1)$

【点睛】 本题考查的是利用平方差公式分解因式, 掌握利用平方差公式分解因式是解题的关键.

8. 化简 $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{1-x}$ 的结果是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 1

【解析】

【分析】 原式变形后, 利用同分母分式的减法法则计算即可得到结果.

【详解】 解: $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{1-x} = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1$.

故答案为: 1.

【点睛】 此题考查了分式的加减法, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

9. 方程 $\sqrt{x+2} = x$ 的根是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 先把方程两边平方, 使原方程化为整式方程 $x+2 = x^2$, 解此一元二次方程得到 $x_1 = 2$, $x_2 = -1$,

结合二次根式的性质, 去掉增根, 即可得到答案.

【详解】方程两边平方得： $x+2=x^2$

$$\therefore x_1=2, \quad x_2=-1$$

$$\because \sqrt{x+2} \geq 0$$

$$\therefore \sqrt{x+2}=x \geq 0$$

$\therefore x_2=-1$ 不符合题意，故舍去

$\therefore$ 原方程的根为 $x=2$

故答案为： $x=2$ 。

【点睛】本题考查了一元二次方程、二次根式的知识；解题的关键是熟练掌握一元二次方程、二次根式的性质，从而完成求解。

10. 如果方程 $x^2-6x+m=0$ 没有实数根，那么 m 的取值范围是_____。

【答案】 $m > 9$

【解析】

【分析】利用判别式的意义得到 $\Delta = (-6)^2 - 4m < 0$ ，然后解不等式即可。

【详解】根据题意得 $\Delta = (-6)^2 - 4m < 0$ ，

解得 $m > 9$ ；

故答案为： $m > 9$ 。

【点睛】本题考查了根的判别式：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta=b^2-4ac$ 有如下关系：当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的两个实数根；当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的两个实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根。

11. 从一副 52 张没有大小王的扑克牌中任意抽取一张牌，抽到梅花的概率是_____。

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】直接利用概率公式计算。

【详解】解：任意抽取一张牌，抽到梅花的概率 $= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ 。

故答案为 $\frac{1}{4}$ 。

【点睛】此题考查概率的简单计算，只要找出总数和可能发生的事件的量相除即可。

12. 沿着 x 轴的正方向看, 如果抛物线 $y = (k-1)x^2 + 1$ 在 y 轴左侧的部分是上升的, 那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < 1$

【解析】

【分析】 本题考查的是抛物线的增减性, 利用抛物线的对称轴的左侧的部分是上升的可得抛物线开口向下, 再建立不等式解题即可.

【详解】 解: $\because$ 抛物线 $y = (k-1)x^2 + 1$ 在对称轴左侧的部分是上升的,

$\therefore$ 抛物线开口向下,

$\therefore k-1 < 0$, 解得 $k < 1$.

故答案为: $k < 1$.

13. 正五边形的中心角的度数是_____.

【答案】 72° .

【解析】

【分析】 根据正多边形的圆心角定义可知: 正 n 边形的圆中心角为 $\frac{360^\circ}{n}$, 则代入求解即可.

【详解】 解: 正五边形的中心角为: $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

故答案为 72° .

【点睛】 此题考查了正多边形的中心角的知识. 题目比较简单, 注意熟记定义.

14. 如果梯形的下底长为 7, 中位线长为 5, 那么其上底长为_____.

【答案】 3

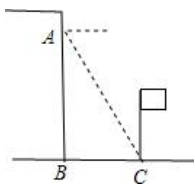
【解析】

【分析】 本题考查的是梯形中位线定理, 掌握梯形的中位线定理是解题的关键. 根据梯形的中位线定理得: 下底 = 中位线长的 2 倍 - 上底可得答案.

【详解】 解: 根据梯形的中位线定理得, 上底 = $2 \times 5 - 7 = 10 - 7 = 3$.

故答案为: 3.

15. 小丽在大楼窗口 A 测得校园内旗杆底部 C 的俯角为 α 度, 窗口离地面高度 $A = h$ (米), 那么旗杆底部与大楼的距离 $BC =$ _____ 米 (用 α 的三角比和 h 的式子表示)



【答案】 $\frac{h}{\tan \alpha}$

【解析】

【分析】 根据题意可得， $\angle ACB = \alpha$ ， $AB = h$ ，然后利用三角函数求出 BC 的长度.

【详解】 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

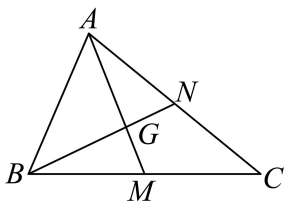
$\because \angle ACB = \alpha$ ， $AB = h$ ，

$$\therefore BC = \frac{AB}{\tan \alpha} = \frac{h}{\tan \alpha}.$$

故答案为 $\frac{h}{\tan \alpha}$.

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用，解答本题的关键是根据俯角构造直角三角形，利用三角函数的知识求解.

16. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中，中线 AM 、 BN 相交于点 G ，设 $\overrightarrow{AG} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BG} = \vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{BC}$ 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示为_____.



【答案】 $\vec{a} + 2\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查了三角形的重心，三角形法则等知识. 解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用. 根据重心的性质可得 $AG = 2GM$ ， $BC = 2BM$ ，利用三角形法则求出 $\overrightarrow{BM}$ ，进而可得结果.

【详解】 解： $\because$ 中线 AM 、 BN 交于点 G ，

$$\therefore AG = 2GM, \quad BC = 2BM,$$

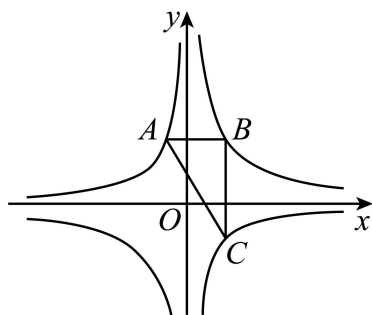
$$\therefore GM = \frac{1}{2}AG,$$

$$\therefore \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GM}, \quad \text{即 } \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM} = \vec{a} + 2\vec{b}.$$

故答案为： $\vec{a} + 2\vec{b}$.

17. 如图, 点 A 、 C 在反比例函数 $y = -\frac{1}{x}$ 的图象上, 点 B 在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上, 且 $AB \parallel x$ 轴, $BC \parallel y$ 轴, 那么 $\triangle ABC$ 的面积等于_____.



【答案】 $\frac{9}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了反比例函数的图象和性质, 掌握反比例函数图象上点的坐标特征是解题关键. 设点 $A\left(-a, \frac{1}{a}\right)$, 根据 $AB \parallel x$ 轴, 且点 B 在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上, 得出 $B\left(2a, \frac{1}{a}\right)$, 进而得到 $AB = 3a$, 根据 $BC \parallel y$ 轴, 点 C 在反比例函数 $y = -\frac{1}{x}$ 的图象上, 得到 $C\left(2a, -\frac{1}{2a}\right)$, 进而得到 $BC = \frac{3}{2a}$, 最后利用三角形面积公式即可求解.

【详解】 解: $\because$ 点 A 在反比例函数 $y = -\frac{1}{x}$ 的图象上,

设点 $A\left(-a, \frac{1}{a}\right)$,

$\because AB \parallel x$ 轴,

$\therefore$ 点 B 的纵坐标为 $\frac{1}{a}$,

$\because$ 点 B 在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上,

$\therefore B\left(2a, \frac{1}{a}\right)$,

$\therefore AB = 2a - (-a) = 3a$,

$\because BC \parallel y$ 轴,

$\therefore$ 点 C 的横坐标为 $2a$,

$\because$ 点 C 在反比例函数 $y = -\frac{1}{x}$ 的图象上,

$\therefore C\left(2a, -\frac{1}{2a}\right)$,

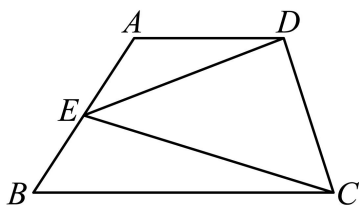
$\therefore BC = \frac{1}{a} - \left(-\frac{1}{2a}\right) = \frac{3}{2a}$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \times 3a \times \frac{3}{2a} = \frac{9}{4},$$

故答案为: $\frac{9}{4}$

18. 定义: 四边形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 AB 上, 连接 DE 、 EC , 如果 $\triangle DEC$ 的面积是四边形 $ABCD$ 面积的一半, 且 $\triangle BEC$ 的面积是 $\triangle ADE$ 及 $\triangle DCE$ 面积的比例中项, 我们称点 E 是四边形 $ABCD$ 的边 AB 上的一个面积黄金分割点.

已知: 如图, 四边形 $ABCD$ 是梯形, 且 $AD \parallel BC$, $BC > AD$, 如果点 E 是它的边 AB 上的一个面积黄金分割点, 那么 $\frac{BC}{AD}$ 的值是_____.



【答案】 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】设 $S_{\triangle CDE} = S$, $S_{\triangle ADE} = S_1$, $S_{\triangle BEC} = S_2$, 结合题意可得: $S = S_1 + S_2$, $S_2^2 = SS_1$, 可得 $S_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} S_1$,

如图, 过 E 作 $EK \parallel AD$ 交 CD 于 K , 过 D 作 $DH \perp BC$ 于 H , 交 EK 于 T , 证明 EM 是 $\triangle ABN$ 的中位线, 同理可得: $\frac{DK}{DC} = \frac{1}{2}$, 证明 EK 是梯形中位线, 可得 $DT = TH$, 从而可得答案.

【详解】解: 设 $S_{\triangle CDE} = S$, $S_{\triangle ADE} = S_1$, $S_{\triangle BEC} = S_2$,

$\therefore$ 结合题意可得: $S = S_1 + S_2$, $S_2^2 = SS_1$,

$$\therefore S_2^2 = S_1(S_1 + S_2),$$

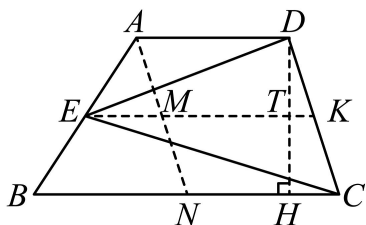
$$\therefore S_2^2 - S_1S_2 - S_1^2 = 0, \quad (S_2 > S_1)$$

$$\therefore S_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} S_1, \quad S = \frac{3+\sqrt{5}}{2} S_1,$$

如图, 过 E 作 $EK \parallel AD$ 交 CD 于 K , 过 D 作 $DH \perp BC$ 于 H , 交 EK 于 T ,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore AD \parallel EK \parallel BC$, $DH \perp EK$,



$$\therefore S = S_{\triangle DEK} + S_{\triangle CEK} = \frac{1}{2} EK \times (DT + TH) = \frac{1}{2} EK \times DH,$$

$$\therefore S_{\text{梯形}ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) \times DH = 2S = EK \times DH,$$

$$\therefore AD + BC = 2EK,$$

过 A 作 $AN \parallel CD$ 交 EK 于 M ,

$\therefore$ 四边形 $ANCD$, $AMKD$, $MNCK$ 是平行四边形,

$$\therefore AD = MK = NC,$$

$$\therefore AD + BC = BN + 2CN = 2EM + 2MK,$$

$$\therefore BN = 2EM,$$

$$\therefore EK \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle AEM \sim \triangle ABN,$$

$$\therefore \frac{AM}{AN} = \frac{AE}{AB} = \frac{EM}{BN} = \frac{1}{2},$$

$\therefore EM$ 是 $\triangle ABN$ 的中位线,

$$\text{同理可得: } \frac{DK}{DC} = \frac{1}{2},$$

$\therefore EK$ 是梯形中位线,

$$\therefore DT = TH,$$

$$\therefore \frac{BC}{AD} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2};$$

$$\text{故答案为: } \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

【点睛】 本题考查的是新定义的含义，三角形的中位线的判定与性质，相似三角形的判定与性质，一元二次方程的解法，理解题意是解本题的关键.

三、解答题：(本大题共 7 题，满分 78 分)

$$19. \text{ 计算: } \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + |2 - \sqrt{3}| + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 27^{\frac{1}{3}}.$$

$$\text{【答案】 } 7 - \sqrt{2}$$

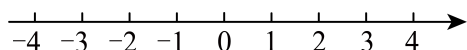
【解析】

【分析】 本题考查的是负整数指数幂的运算，分母有理化，求解立方根，先分母有理化，化简绝对值，计算负整数指数幂，立方根，再合并即可.

【详解】 解: $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+|2-\sqrt{3}|+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+27^{\frac{1}{3}}$

$$=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+2-\sqrt{3}+2+3$$
$$=\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}+5$$
$$=7-\sqrt{2};$$

20. 解不等式组: $\begin{cases} 4x-2(x-1)<4 \\ \frac{x-1}{2}\leq\frac{2x}{3} \end{cases}$, 并把解集在数轴上表示出来.



【答案】 $-3\leq x<1$, 画图见解析

【解析】

【分析】 本题考查的是一元一次不等式组的解法，掌握解法步骤是解本题的关键，先分别解不等式组中的两个不等式，再把解集在数轴上表示，利用数轴确定解集的公共部分即可.

【详解】 解: $\begin{cases} 4x-2(x-1)<4 \textcircled{1} \\ \frac{x-1}{2}\leq\frac{2x}{3} \textcircled{2} \end{cases}$,

由①得: $4x-2x+2<4$,

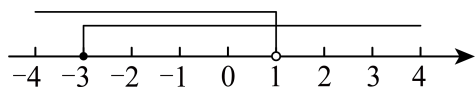
$\therefore 2x<2$,

解得: $x<1$,

由②得: $3x-3\leq 4x$,

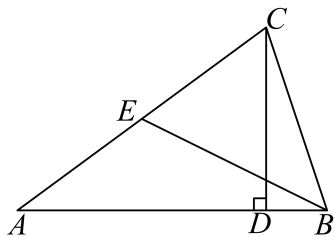
解得: $x\geq -3$;

在数轴上表示不等式的解集如下:



$\therefore$ 不等式组的解集为: $-3\leq x<1$.

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, CD 是边 AB 上的高. 已知 $AB = AC$, $BC = \sqrt{10}$, $\tan \angle BAC = \frac{3}{4}$.



- (1) 求 AD 的长;
 (2) 如果点 E 是边 AC 的中点, 连接 BE , 求 $\cot \angle ABE$ 的值.

【答案】(1) $AD = 4$

(2) $\cot \angle ABE = 2$

【解析】

【分析】 本题考查的是等腰三角形的性质, 勾股定理的应用, 锐角三角函数的应用, 掌握锐角三角函数的定义是解本题的关键;

(1) 由 $\tan \angle BAC = \frac{3}{4}$ 可设 $CD = 3x$, 则 $AD = 4x$, 则 $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 5x$, $BD = 5x - 4x = x$, 再利用勾股定理求解 x , 从而可得答案;

(2) 如图, 过 E 作 $EH \perp AB$ 于 H , 由 (1) 得: $AD = 4$, $CD = 3$, $AB = AC = 5$, 利用等面积法求解 $EH = \frac{3}{2}$, 可得 $AH = \sqrt{AE^2 - EH^2} = 2$, 可得 $BH = 5 - 2 = 3$, 再结合余切的定义可得答案.

【小问 1 详解】

解: $\because \tan \angle BAC = \frac{3}{4}$,

$$\therefore \frac{CD}{AD} = \frac{3}{4},$$

$\therefore$ 设 $CD = 3x$, 则 $AD = 4x$,

$$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 5x,$$

$\because AB = AC$,

$$\therefore AB = AC = 5x,$$

$$\therefore BD = 5x - 4x = x,$$

$\because BC = \sqrt{10}$, CD 是边 AB 上的高,

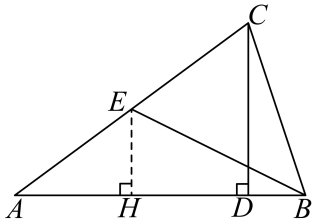
$$\therefore x^2 + (3x)^2 = 10,$$

解得: $x = 1$ (负根舍去),

$$\therefore AD = 4x = 4;$$

【小问 2 详解】

如图，过 E 作 $EH \perp AB$ 于 H ，



$\therefore$ 由 (1) 得: $AD = 4$, $CD = 3$, $AB = AC = 5$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 = \frac{15}{2},$$

$\therefore E$ 为 AC 的中点,

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \times 5 \times EH = \frac{1}{2} \times \frac{15}{2}, \quad AE = CE = \frac{5}{2},$$

$$\therefore EH = \frac{3}{2}, \quad AH = \sqrt{AE^2 - EH^2} = 2,$$

$$\therefore BH = 5 - 2 = 3,$$

$$\therefore \cot \angle ABE = \frac{BH}{EH} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2.$$

22. 某校六年级 200 名学生参加了环保知识竞赛，已知竞赛得分都是整数，满分 100 分。随机抽取了部分学生的竞赛成绩作为一个样本，数据整理后分成 6 个小组，画出竞赛成绩的频数分布直方图，如图 1 所示（每个小组可包括最小值，不包括最大值），同时画出竞赛成绩等第的扇形统计图，如图 2 所示（设竞赛成绩为 a 分， $0 \leq a < 60$ 为不合格、 $60 \leq a < 80$ 为合格， $80 \leq a < 90$ 为良好， $90 \leq a \leq 110$ 为优秀）。根据图中的信息回答下列问题：

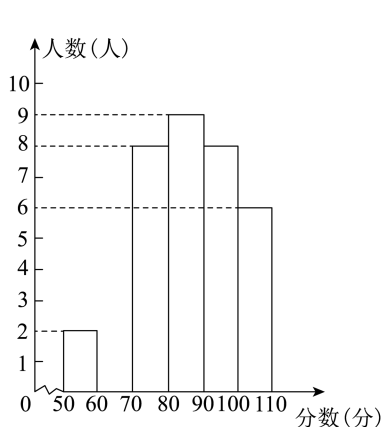


图1

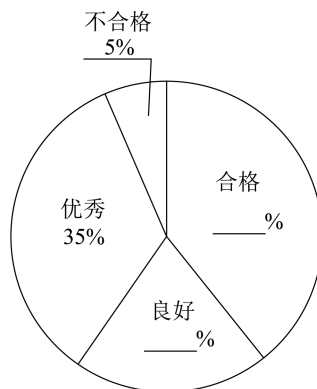


图2

- (1) 估计六年级参赛学生中成绩为良好的学生有_____人；请把图 1 补画完整、补齐图 2 中缺失的数据；
- (2) 小明对统计图进行了研究，得出了如下结论：

- ①中位数一定落在 80 分—90 分这一组内;
- ②众数一定落在 80 分—90 分这一组内;
- ③仍有不合格的学生, 该校环保知识宣传需进一步加强;
- ④从这两个统计图中能准确求出样本的平均数.

上述结论中错误的是_____ (填序号).

(3) 估计本次六年级参赛学生中荣获优秀的共有 m 人. 学校“环保社团”决定: 这 m 名学生都光荣的成为学校的小小环保“宣传员”, 从中选派 x 人帮助本年级参赛得分 60 分以下的学生普及环保知识. 经计算, x 与 $(m-x)$ 的积恰好等于样本容量的 15 倍. 你认为 x 的值取多少比较合理, 为什么?

【答案】 (1) 45 人, 补全图形见解析

(2) ②④ (3) $x=10$ 合理;

【解析】

【分析】 (1) 由总人数乘以样本优秀率即可得到答案, 再求解样本容量及 $60 \leq a < 70$ 的人数, 再求解扇形图中的各百分比补全图形即可;

(2) 根据中位数, 众数, 样本平均数的含义可得答案;

(3) 根据 x 与 $(m-x)$ 的积恰好等于样本容量的 15 倍建立方程求解 x , 结合得分 60 分以下的学生有 $200 \times 5\% = 10$ 可得答案.

【小问 1 详解】

解: $\because (6+8) \div 35\% = 40,$

$\therefore 40 - 2 - 8 - 9 - 8 - 6 = 7,$

$\therefore 200 \times \frac{9}{40} = 45,$

六年级参赛学生中成绩为良好的学生有 45 人;

$\therefore$ 良好占 $9 \div 40 = 22.5\%,$

$\therefore$ 合格占 $1 - 22.5\% - 35\% - 5\% = 37.5\%$

补全条形图如下:

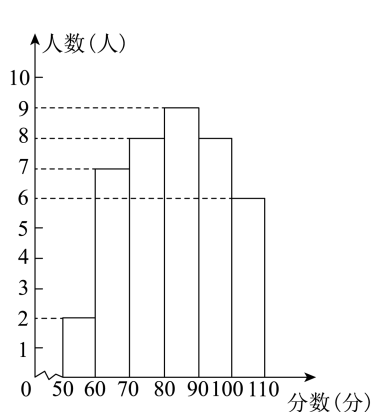


图1

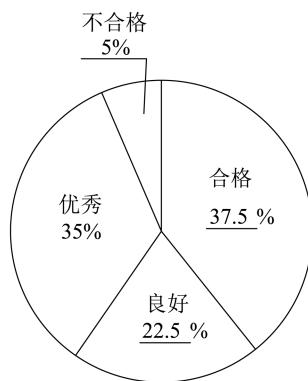


图2

【小问 2 详解】

由 40 个数据，第 20 个，第 21 个数据落在 80 分—90 分这一组，故①正确；

众数是出现次数最多的数据，不一定落在 80 分—90 分这一组内，故②不正确；

仍有不合格的学生，该校环保知识宣传需进一步加强；故③正确；

从这两个统计图中不能准确求出样本的平均数，故④不正确；

∴ 上述结论中错误的是②④；

【小问 3 详解】

由 (1) 得： $m = 200 \times 35\% = 70$ ，样本容量为 40，

$$\therefore x(70 - x) = 40 \times 15,$$

$$\text{整理得： } x^2 - 70x + 600 = 0,$$

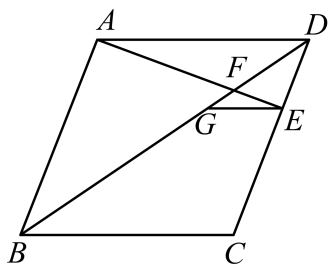
$$\text{解得： } x_1 = 10, \quad x_2 = 60,$$

$$\therefore \text{得分 60 分以下的学生有 } 200 \times 5\% = 10,$$

$$\therefore x = 10 \text{ 合理；}$$

【点睛】 本题考查的是从扇形图与条形图中获取信息，中位数，众数的含义，样本容量的概念，一元二次方程的解法，掌握以上基础知识是解本题的关键；

23. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中，点 E 是边 DC 上的任意一点（不与点 D 、 C 重合）， AE 交对角线 BD 于 F ，过点 E 作 $EG \parallel BC$ 交 BD 于点 G 。



$$(1) \text{ 求证： } DF^2 = FG \cdot BF;$$

(2) 当 $BD \cdot DF = 2AD \cdot DE$ 时, 求证: $AE \perp DC$.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查了相似三角形的性质与判断, 菱形的性质:

(1) 证明 $\triangle ADF \sim \triangle EGF$, 得到 $\frac{AF}{EF} = \frac{DF}{FG}$, 证明 $\triangle ABF \sim \triangle EDF$ 得到 $\frac{AF}{EF} = \frac{BF}{DF}$, 则可得 $\frac{DF}{FG} = \frac{BF}{DF}$,

即 $DF^2 = FG \cdot BF$;

(2) 如图所示, 连接 AC 交 BD 于 O , 由菱形的性质得到 $AC \perp BD$, $BD = 2OD$, $\angle ADB = \angle CDB$, 则 $\angle AOD = 90^\circ$, 证明 $\frac{AD}{DF} = \frac{OD}{DE}$, 进而证明 $\triangle ADO \sim \triangle FDE$, 即可得到 $\angle FED = \angle AOD = 90^\circ$, 即

$AE \perp DC$.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$,

$\therefore EG \parallel BC$,

$\therefore AD \parallel EG$,

$\therefore \triangle ADF \sim \triangle EGF$,

$$\therefore \frac{AF}{EF} = \frac{DF}{FG},$$

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore \triangle ABF \sim \triangle EDF$,

$$\therefore \frac{AF}{EF} = \frac{BF}{DF},$$

$$\therefore \frac{DF}{FG} = \frac{BF}{DF},$$

$\therefore DF^2 = FG \cdot BF$;

【小问 2 详解】

证明: 如图所示, 连接 AC 交 BD 于 O ,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AC \perp BD, \quad BD = 2OD, \quad \angle ADB = \angle CDB,$$

$$\therefore \angle AOD = 90^\circ,$$

$$\therefore BD \cdot DF = 2AD \cdot DE,$$

$$\therefore 2OD \cdot DF = 2AD \cdot DE,$$

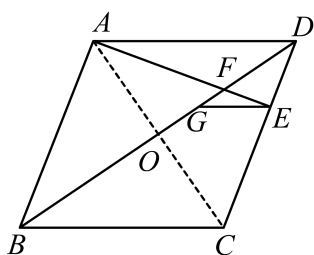
$$\therefore \frac{AD}{DF} = \frac{OD}{DE},$$

$$\text{又} \because \angle ADO = \angle FDE,$$

$$\therefore \triangle ADO \sim \triangle FDE,$$

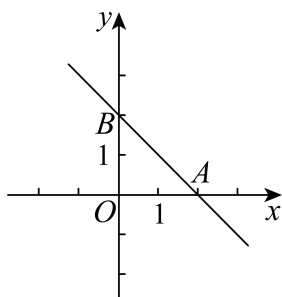
$$\therefore \angle FED = \angle AOD = 90^\circ,$$

$$\therefore AE \perp DC.$$



24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 $y = -x + 2$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、点 B , 抛物线

$C_1: y = -x^2 + bx + c$ 经过点 A 、 B 两点, 顶点为点 C .



(1) 求 b 、 c 的值;

(2) 如果点 D 在抛物线 C_1 的对称轴上, 射线 AB 平分 $\angle CAD$, 求点 D 的坐标;

(3) 将抛物线 C_1 平移, 使得新抛物线 C_2 的顶点 E 在射线 BA 上, 抛物线 C_2 与 y 轴交于点 F , 如果 $\triangle BEF$ 是等腰三角形, 求抛物线 C_2 的表达式.

【答案】 (1) $b = 1, c = 2$;

(2) $D\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$$(3) \quad y = -\left(x - \sqrt{2} + 1\right)^2 - \sqrt{2} + 3 \text{ 或 } y = -(x-1)^2 + 1$$

【解析】

【分析】(1) 由待定系数法即可求解；

(2) 证明 $\triangle DD'H$ 为等腰直角三角形，则点 D' 在 AC 上，点 D' 代入 AC 的解析式，即可求解；

(3) 分情况讨论：当 $BE = BF$ 时，列出方程，即可求解；当 $BE = EF$ 或 $BF = EF$ 时，同理可解。

【小问 1 详解】

解：把 $x=0$ 代入 $y=-x+2$ 得 $y=2$ ，

$\therefore$ 点 B 坐标是 $(0, 2)$ ，

把 $y=0$ 代入 $y=-x+2$ ，得 $x=2$ ，

$\therefore$ 点 A 坐标是 $(2, 0)$ ，

将点 A 、 B 坐标代入 $y=-x^2+bx+c$ ，得
$$\begin{cases} c=2 \\ 0=-2^2+2b+c \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} b=1 \\ c=2 \end{cases}$$

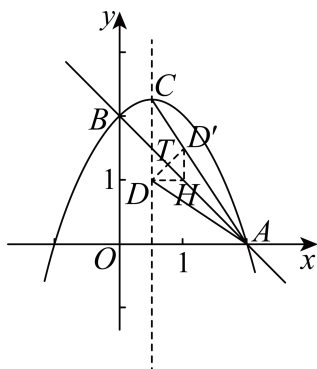
$\therefore$ 抛物线的表达式是 $y=-x^2+x+2$ 。

【小问 2 详解】

由 (1) 知，抛物线的表达式为 $y=-x^2+x+2$ ，则其对称轴为直线 $x=\frac{1}{2}$ ，

$\therefore C\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ ，

作点 D 关于直线 AB 的对称点 D' ， DD' 交 AB 于点 T ，



$\therefore AB$ 平分 $\angle CAD$ ，

∴ 由轴对称的性质可得: $DT = D'T$,

过点 D 作 x 轴的平行线交 AB 于点 H, 连接 $D'H$,

$$\because A(2,0), B(0,2),$$

$$\therefore \angle OAB = 45^\circ, \text{ 则 } \angle DHB = 45^\circ,$$

则 $\triangle DTH$ 为等腰直角三角形,

由轴对称的性质可得: $\triangle D'TH$ 为等腰直角三角形,

∴ $\triangle DD'H$ 为等腰直角三角形, 则点 D' 在 AC 上,

$$\text{设点 } D\left(\frac{1}{2}, m\right),$$

$$\text{当 } y = m = -x + 2, \text{ 则 } x = 2 - m,$$

$$\therefore H(2 - m, m),$$

$$\therefore DH = 2 - m - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - m = D'H,$$

$$\therefore \text{点 } D'\left(2 - m, \frac{3}{2}\right),$$

设直线 AC 为 $y = ax + n$,

$$\therefore \begin{cases} 2a + n = 0 \\ \frac{1}{2}a + n = \frac{9}{4} \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ n = 3 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 AC 的表达式 } y = -\frac{3}{2}x + 3,$$

$$\text{将点 } D' \text{ 代入上式得: } \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}(2 - m) + 3,$$

$$\text{解得: } m = 1, \text{ 则点 } D\left(\frac{1}{2}, 1\right);$$

【小问 3 详解】

$$\text{设点 } E(m, -m + 2) (m > 0),$$

$$\text{则抛物线的表达式为: } y = -(x - m)^2 - m + 2,$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = -(x - m)^2 - m + 2 = -m^2 - m + 2,$$

$$\text{即点 } F(0, -m^2 - m + 2), \text{ 而 } B(0, 2),$$

$$\therefore BF = \sqrt{(-m^2 - m + 2 - 2)^2} = m^2 + m, \quad BE = \sqrt{m^2 + (-m + 2 - 2)^2} = \sqrt{2}m,$$

$$FE = \sqrt{m^2 + (-m^2)^2} = \sqrt{m^2 + m^4},$$

$$\text{当 } BE = BF \text{ 时, 则 } m^2 + m = \sqrt{2}m,$$

$$\text{解得: } m = 0 \text{ (舍去) 或 } m = \sqrt{2} - 1,$$

$$\text{则抛物线的表达式为: } y = -(x - \sqrt{2} + 1)^2 - \sqrt{2} + 3;$$

$$\text{当 } BE = EF \text{ 或 } BF = EF \text{ 时, 则 } \sqrt{2}m = \sqrt{m^2 + m^4} \text{ 或 } m^2 + m = \sqrt{m^2 + m^4},$$

$$\text{解得: } m = 1 \text{ (不合题意的值已舍去),}$$

$$\text{即抛物线的表达式为: } y = -(x - 1)^2 + 1,$$

$$\text{综上, 抛物线的表达式为: } y = -(x - 1)^2 + 1 \text{ 或 } y = -(x - \sqrt{2} + 1)^2 - \sqrt{2} + 3.$$

【点睛】 本题考查的是二次函数综合运用, 涉及到点的对称性、等腰三角形的性质, 一元二次方程的解法等, 分类求解是解题的关键.

25. 已知: $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于 A 、 B 两点, 线段 O_1O_2 的延长线交 $\odot O_2$ 于点 C , CA 、 CB 的延长线分别交 $\odot O_1$ 于点 D 、 E .

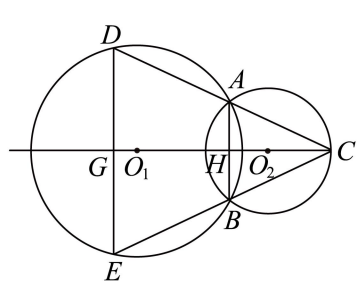


图1

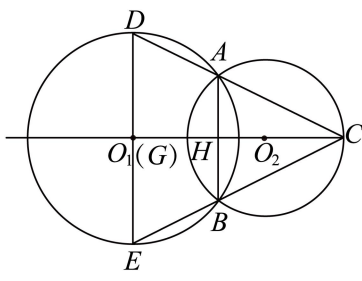


图2

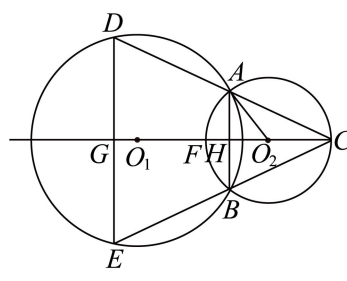


图3

(1) 连接 AB 、 DE , AB 、 DE 分别与连心线 O_1O_2 相交于点 H 、点 G , 如图 1, 求证: $AB \parallel DE$;

(2) 如果 $O_1O_2 = 5$.

①如图 2, 当点 G 与 O 重合, $\odot O_1$ 的半径为 4 时, 求 $\odot O_2$ 的半径;

②连接 AO_2 、 BD , BD 与连心线 O_1O_2 相交于点 F , 如图 3, 当 $BD \parallel AO_2$, 且 $\odot O_2$ 的半径为 2 时, 求 O_1G 的长.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) ① 3; ② $\frac{7}{4}$

【解析】

【分析】(1) 先证明 $CA = CB$ ，可得 $\angle CAB = \angle CBA$ ，再证明 $\angle CAB = \angle D$ ，可得 $AB \parallel DE$ ；

(2) ① 如图，连接 AO_1 ， AO_2 ， AE ， AH ，证明 A, H, E 三点共线，证明

$\angle O_2AH + \angle O_1AH = \angle O_1AD + \angle O_1AH = 90^\circ$ ，再利用勾股定理求解即可；② 如图，连接 O_1A ， O_1D ， O_1B ，

证明 $\triangle CAO_2 \sim \triangle CO_1A$ ，可得 $AC = AO_1 = \sqrt{14}$ ，证明 $O_1H = CH = \frac{7}{2}$ ，求解 $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ ，

证明 $\triangle CAH \sim \triangle CDG$ ，再利用相似三角形的性质与勾股定理求解即可。

【小问 1 详解】

证明： $\because O_1O_2 \perp AB$ ， $AH = BH$ ，

$\therefore CA = CB$ ，

$\therefore \angle CAB = \angle CBA$ ，

$\because \angle CAB + \angle DAB = 180^\circ = \angle DAB + \angle E$ ，

$\therefore \angle CAB = \angle E$ ，

同理： $\angle CBA = \angle D$ ，

$\therefore \angle CAB = \angle D$ ，

$\therefore AB \parallel DE$ ；

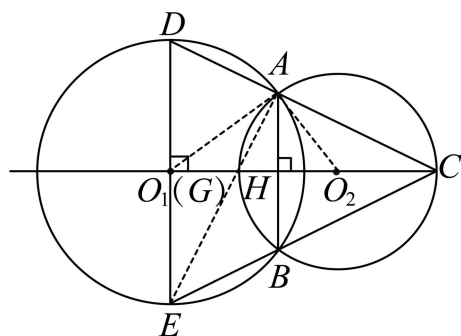
【小问 2 详解】

① 如图，连接 AO_1 ， AO_2 ， AE ， AH ，

$\because DE$ 为 $\odot O_1$ 的直径，

$\therefore \angle EAD = 90^\circ = \angle EAC = \angle HAC$ ，

$\therefore A, H, E$ 三点共线，



$$\because AB \parallel DE, \quad AB \perp O_1C,$$

$$\therefore DE \perp O_1C,$$

$$\therefore \angle AHO_2 + \angle AHO_1 = 180^\circ = \angle D + \angle AHO_1,$$

$$\therefore \angle AHO_2 = \angle D,$$

$$\because O_1A = O_1D, \quad O_2A = O_2H,$$

$$\therefore \angle D = \angle O_1AD, \quad \angle O_2AH = \angle O_2HA,$$

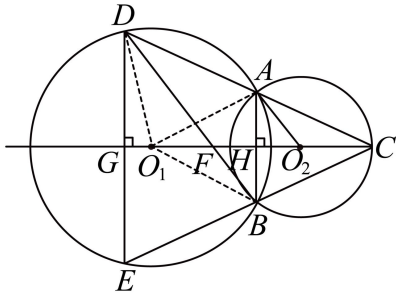
$$\therefore \angle O_1AD = \angle O_2AH,$$

$$\therefore \angle O_2AH + \angle O_1AH = \angle O_1AD + \angle O_1AH = 90^\circ,$$

$$\because O_1A = 4, \quad O_1O_2 = 5,$$

$$\therefore O_2A = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3;$$

②如图, 连接 O_1A , O_1D , O_1B ,



$$\therefore AO_2 \parallel DF,$$

$$\therefore \angle CAO_2 = \angle CDF,$$

$$\because AB \perp GC, \quad O_1A = O_2B,$$

$$\therefore \angle AO_1H = \angle BO_1H,$$

$$\because \angle AO_2B = 2\angle ADB,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle AO_1H,$$

$$\therefore \angle CAO_2 = \angle AO_1C,$$

$$\therefore \angle ACO_2 = \angle ACO_1,$$

$$\therefore \triangle CAO_2 \sim \triangle CO_1A,$$

$$\therefore \frac{CA}{CO_1} = \frac{CO_2}{CA} = \frac{AO_2}{AO_1},$$

$$\therefore AO_2 = CO_2 = 2, \quad O_1O_2 = 5,$$

$$\therefore CA = \sqrt{2 \times (2+5)} = \sqrt{14}, \quad AO_1 = \sqrt{14},$$

$$\therefore AC = AO_1 = \sqrt{14}, \text{ 而 } AB \perp CG, \quad CO_2 = 2+5=7,$$

$$\therefore O_1H = CH = \frac{7}{2},$$

$$\therefore AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

$$\therefore AB \parallel DE,$$

$$\therefore \triangle CAH \sim \triangle CDG,$$

$$\therefore \frac{AH}{DG} = \frac{CH}{CG}, \text{ 设 } DG = m, \quad O_1G = n,$$

$$\therefore \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{m} = \frac{\frac{7}{2}}{7+n},$$

$$\therefore m = \sqrt{7} + \frac{\sqrt{7}}{7}n,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle DGO_1 \text{ 中, } DO_1^2 = DG^2 + GO_1^2,$$

$$\therefore m^2 + n^2 = (\sqrt{14})^2,$$

$$\therefore \left(\sqrt{7} + \frac{\sqrt{7}}{7}n \right)^2 + n^2 = 14,$$

$$\text{整理得: } 8n^2 + 14n - 49 = 0,$$

$$\text{解得: } n = \frac{7}{4} \text{ 或 } n = -\frac{7}{2} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore O_1G = \frac{7}{4}.$$

【点睛】 本题考查的是两圆的位置关系，勾股定理的应用，等腰三角形的判定与性质，一元二次方程的解法，相似三角形的判定与性质，平行线的判定，本题难度大，作出合适的辅助线是解本题的关键.