

2023 学年第二学期徐汇区学习能力诊断卷

初三数学 试卷

(时间 100 分钟 满分 150 分)

考生注意：

1. 本试卷含三个大题，共 25 题；答题时，考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答，在草稿纸、本试卷上答题一律无效；
2. 除第一、二大题外，其余各题如无特别说明，都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的】

1. 下列实数中，有理数是（ ）

A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{4}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查实数的分类及算术平方根，熟练掌握实数的分类及算术平方根是解题的关键；根据实数的分类可进行排除选项.

【详解】解：∵ $\sqrt{4} = 2$ ，

∴ $\sqrt{4}$ 是有理数，而 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{6}$ 是无理数；

故选 B.

2. 下列单项式中，与单项式 $2a^2b^3$ 是同类项的是（ ）

A. $-ab^4$ B. $2a^3b^2$ C. $3b^3a^2$ D. $-2a^2b^2c$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了同类项的定义，根据字母相同，字母的指数也相同的项叫做同类项，进行判断即可.

【详解】解：与单项式 $2a^2b^3$ 是同类项的是 $3b^3a^2$ ；

故选 C.

3. 已知直线 $y = kx + b$ 经过第一、二、四象限，则直线 $y = bx + k$ 经过()

A. 第一、三、四象限

B. 第一、二、四象限

C. 第一、二、三象限

D. 第二、三、四象限

【答案】A

【解析】

【分析】根据图象在坐标平面内的位置关系确定 k , b 的取值范围, 从而求解.

【详解】解: 已知直线 $y = kx + b$ 经过第一、二、四象限,

则得到 $k < 0$, $b > 0$,

那么直线 $y = kx + b$ 经过第一、三、四象限.

故选: A.

【点睛】此题考查一次函数图象与系数的关系. 解题关键在于注意理解: 直线 $y = kx + b$ 所在的位置与 k 、 b 的符号有直接的关系. $k > 0$ 时, 直线必经过一、三象限; $k < 0$ 时, 直线必经过二、四象限; $b > 0$ 时, 直线与 y 轴正半轴相交; $b = 0$ 时, 直线过原点; $b < 0$ 时, 直线与 y 轴负半轴相交.

4. 如表记录了甲、乙、丙、丁四名跳高运动员最近几次选拔赛成绩的平均数与方差:

	甲	乙	丙	丁
平均数 (cm)	185	180	185	180
方差	3.6	3.6	7.4	8.1

根据表数据, 从中选择一名成绩好且发挥稳定的参加比赛, 应该选择 ()

A. 甲

B. 乙

C. 丙

D. 丁

【答案】A

【解析】

【分析】首先比较平均数, 平均数相同时选择方差较小的运动员参加.

【详解】 $\because \overline{x_{\text{甲}}} = \overline{x_{\text{丙}}} > \overline{x_{\text{乙}}} = \overline{x_{\text{丁}}}$,

$\therefore$ 从甲和丙中选择一人参加比赛,

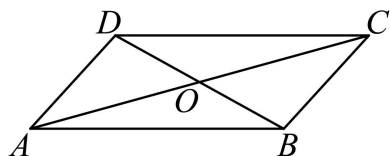
$\because S_{\text{甲}}^2 = S_{\text{乙}}^2 < S_{\text{丙}}^2 < S_{\text{丁}}^2$,

$\therefore$ 选择甲参赛,

故选 A.

【点睛】此题主要考查了平均数和方差的应用, 解题关键是明确平均数越高, 成绩越高, 方差越小, 成绩越稳定.

5. 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 如果添加一个条件使得 $\square ABCD$ 是矩形, 那么下列添加的条件中正确的是 ()



A. $\angle DAO + \angle ADO = 90^\circ$

B. $\angle DAC = \angle ACD$

C. $\angle DAC = \angle BAC$

D. $\angle DAB = \angle ABC$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题主要考查了矩形的判定, 菱形的判定, 根据判定定理逐项判断即可.

【详解】 $\because \angle DAO + \angle ADO = 90^\circ$,

$$\therefore \angle AOD = 90^\circ,$$

$$\therefore AC \perp BD,$$

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形.

则 A 不符合题意;

$$\because \angle DAC = \angle ACD,$$

$$\therefore AD = CD,$$

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形.

则 B 不符合题意;

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BAC.$$

$$\because \angle DAC = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle DAC,$$

$$\therefore AD = CD,$$

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形.

则 C 不符合题意;

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle ABC = 180^\circ.$$

$$\because \angle DAB = \angle ABC,$$

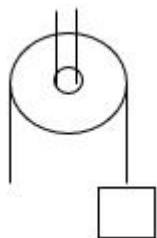
$$\therefore \angle BAD = 90^\circ,$$

∴ 平行四边形 $ABCD$ 是矩形.

则 D 正确.

故选: D.

6. 如图, 一个半径为 9cm 的定滑轮由绳索带动重物上升, 如果该定滑轮逆时针旋转了 120° , 假设绳索 (粗细不计) 与滑轮之间没有滑动, 那么重物上升的高度是 ()



A. $5\pi\text{ cm}$

B. $6\pi\text{ cm}$

C. $7\pi\text{ cm}$

D. $8\pi\text{ cm}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了弧长公式. 利用题意得到重物上升的高度为定滑轮中 120° 所对应的弧长, 然后根据弧长公式计算即可.

【详解】 解: 根据题意, 重物上升的高度为

$$\frac{120 \times \pi \times 9}{180} = 6\pi (\text{cm}).$$

故选: B.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 方程 $\sqrt{2x-1} = x$ 的解是_____.

【答案】 $x = 1$

【解析】

【分析】 根据一元二次方程和二次根式的性质求解即可;

【详解】 $\because \sqrt{2x-1} = x$,

$$\therefore 2x-1 = x^2,$$

$$\therefore (x-1)^2 = 0,$$

$$\therefore x_1 = x_2 = 1,$$

$$\because 2x-1 \geq 0,$$

$$\therefore x \geq \frac{1}{2},$$

$$\therefore x = 1;$$

故答案是 $x = 1$.

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程的求解和二次根式的性质，准确计算是解题的关键.

8. 不等式组 $\begin{cases} 2x-1 > 3 \\ 3x-2(x-3) > 1 \end{cases}$ 的解集是_____.

【答案】 $x > 2$

【解析】

【分析】 本题考查了一元一次不等式组的解法，熟练掌握一元一次不等式组的解法是解答本题的关键. 先分别解两个不等式，求出它们的解集，再求两个不等式解集的公共部分即可得到不等式组的解集.

【详解】 解: $\begin{cases} 2x-1 > 3 \textcircled{1} \\ 3x-2(x-3) > 1 \textcircled{2} \end{cases}$,

解①得: $x > 2$,

解②得: $x > -5$,

$\therefore$ 不等式组的解集是 $x > 2$.

9. 方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ 的解是_____.

【答案】 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查解二元二次方程组，一元二次方程，代入消元法，将方程组先转化为一元二次方程，再进行求解即可.

【详解】 解: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \textcircled{1} \\ x - 2y = 0 \textcircled{2} \end{cases}$

由②得: $x = 2y \textcircled{3}$;

把③代入①，得: $(2y)^2 + y^2 = 5$ ，解得: $y = \pm 1$,

$\therefore x = 2y = \pm 2$,

$\therefore$ 方程组的解为: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$;

故答案为: $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

10. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - mx - 1 = 0$ 根的情况是: 原方程_____实数根.

【答案】有两个不相等的

【解析】

【分析】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式, 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 若 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, 则方程有两个不相等的实数根, 若 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, 则方程有两个相等的实数根, 若 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, 则方程没有实数根, 据此求解即可.

【详解】 解: 由题意得, $\Delta = (-m)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = m^2 + 4 > 0$,

$\therefore$ 原方程有两个不相等的实数根,

故答案为: 有两个不相等的.

11. 如果二次函数 $y = 2x^2 - 4x + 1$ 的图像的一部分是上升的, 那么 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq 1$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次函数的性质, 掌握二次函数的性质是解题的关键. 根据函数解析式可得抛物线开口向上, 则当 x 在对称轴右侧时, 函数图像上升, 所以求出函数的对称轴即可求解.

【详解】 解: $\because y = 2x^2 - 4x + 1 = 2(x-1)^2 - 1$, 又抛物线开口向上,

$\therefore$ 当 $x < 1$ 时, y 随 x 的增大而减小, 图像下降; 当 $x \geq 1$ 时, y 随 x 的增大而增大, 图像上升;

$\because$ 二次函数 $y = 2x^2 - 4x + 1$ 的图像的一部分是上升的,

$\therefore x \geq 1$,

故答案为: $x \geq 1$.

12. 如果反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ 的图像经过点 $A(t, -2t)$, 那么 t 的值是_____.

【答案】 $\pm\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查反比例函数图像上的点, 将点 $A(t, -2t)$ 代入函数解析式, 求解即可.

【详解】 解: 由题意, 得: $t \cdot (-2t) = -4$,

解得： $t = \pm\sqrt{2}$ ；

故答案为： $\pm\sqrt{2}$.

13. 如果从长度分别为 2、4、6、7 的四条线段中随机抽取三条线段，那么抽取的三条线段能构成三角形的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 根据构成三角形的条件：两边之和大于第三边，两边之差小于第三边进行判断即可.

【详解】 $\because$ 从长度分别为 2、4、6、7 的四条线段中随机抽取三条线段

$\therefore$ 可能有：2、4、6；2、6、7；4、6、7；2、4、7 四种可能性

又 $\because$ 构成三角形的条件：两边之和大于第三边，两边之差小于第三边

$\therefore$ 符合条件的有：2、6、7；4、6、7 两种

故概率为： $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

故答案为： $\frac{1}{2}$

【点睛】 本题考查构成三角形的条件以及概率的计算，掌握构成三角形的三边之间的关系是解题关键.

14. 小杰沿着坡比 $i = 1:2.4$ 的斜坡，从坡底向上步行了 130 米，那么他上升的高度是_____米.

【答案】 50

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形的应用，解题的关键是掌握坡比的定义. 设坡度的高为 x 米，根据勾股定理列方程求解.

【详解】 解：设坡度的高为 x 米，则水平距离为 $2.4x$ 米，

$\therefore x^2 + (2.4x)^2 = 130^2$,

解得： $x = 50$,

故答案为： 50.

15. 某校为了了解学生家长对孩子用手机的态度问题，随机抽取了 100 名家长进行问卷调查，每位学生家长只有一份问卷，且每份问卷仅表明一种态度（这 100 名家长的问卷真实有效），将这 100 份问卷进行回收整理后，绘制了如图 1、图 2 所示的两幅不完整的统计图. 如果该校共有 2000 名学生，那么可以估计该校对手机持“严格管理”态度的家长_____人.

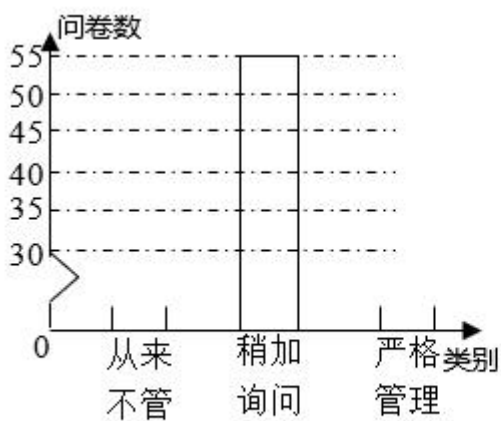


图 1

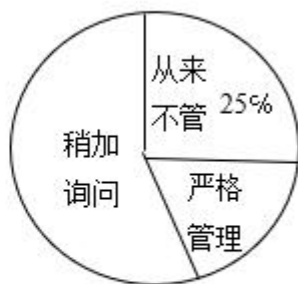


图 2

【答案】 400

【解析】

【分析】 本题考查了条形统计图，扇形统计图，用样本估计总体，解题的关键是数形结合. 先根据条形统计图计算出稍加询问的百分比，进而结合扇形统计图求出严格管理的百分比，最后利用样本估计总体即可求解.

【详解】 解： 稍加询问的百分比： $55 \div 100 = 0.55 = 55\%$ ，

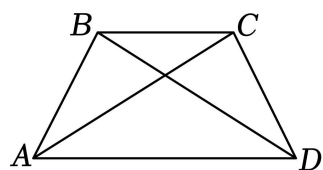
严格管理的百分比： $1 - 55\% - 25\% = 20\%$ ，

持“严格管理”态度的家长人数： $2000 \times 20\% = 400$ （人），

故答案为： 400 .

16. 如图，梯形 $ABCD$ 中， $BC \parallel AD$ ， $AB = CD$ ， AC 平分 $\angle BAD$ ， 如果 $AD = 2AB$ ， $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ，

那么 $\overrightarrow{AC}$ 是_____（用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示）.



【答案】 $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了角平分线的定义，平行线的性质，向量的运算，解题的关键是熟练掌握这些知识. 根据角平分线的定义，平行线的性质，推出 $AB = BC$ ，结合 $AD = 2BC$ ，可得 $BC = \frac{1}{2}AD$ ，最后根据

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ ，即可求解.

【详解】 解： 设 $\angle BAC = \alpha$ ，

$\because AC$ 平分 $\angle BAD$ ，

$$\therefore \angle BAC = \angle CAD = \alpha,$$

$$\because BC \parallel AD,$$

$$\therefore \angle BCA = \angle DAC = \alpha,$$

$$\therefore \angle BCA = \angle BAC,$$

$$\therefore AB = BC,$$

$$\because AD = 2AB,$$

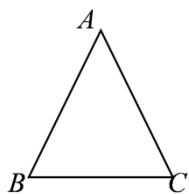
$$\therefore AD = 2BC,$$

$$\therefore BC = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

故答案为: $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 6$, $BC = 4$. 已知点 D 是边 AC 的中点, 将 $\triangle ABC$ 沿直线 BD 翻折, 点 C 落在点 E 处, 联结 AE , 那么 AE 的长是_____.



【答案】 $\frac{10\sqrt{17}}{17}$ $\frac{10}{17}\sqrt{17}$

【解析】

【分析】 本题考查勾股定理与折叠问题, 平行线分线段成比例, 如图, E 为点 C 关于 BD 的对称点, 过点 A 作 $AM \perp BC$, 过点 D 作 $DN \perp BC$, 则 $AM \parallel DN$, 联结 AE , 可知 $\frac{AD}{CD} = \frac{MN}{CN} = 1$, 得 $CN = MN = 1$, 进而根据勾股定理可得 $DN = 2\sqrt{2}$, $BD = \sqrt{17}$, 再由 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot DN = \frac{1}{2}BD \cdot OC$, 得 $CE = 2OC = \frac{16\sqrt{34}}{17}$, 结合 $DE = DC$, $AD = CD$, 可知 $AE \perp CE$, 再根据勾股定理即可求解, 根据折叠的性质得 $AE \perp CE$ 是解决问题的关键.

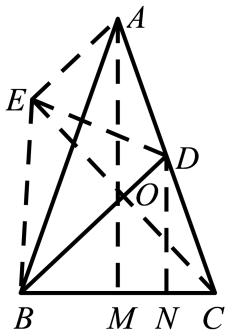
【详解】 解: 如图, E 为点 C 关于 BD 的对称点, 过点 A 作 $AM \perp BC$, 过点 D 作 $DN \perp BC$, 则 $AM \parallel DN$, 联结 AE ,

$$\therefore BM = CM = \frac{1}{2}BC = 2,$$

$$\because \text{点 } D \text{ 是边 } AC \text{ 的中点, 即 } AD = CD = \frac{1}{2}AC = 3,$$

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{MN}{CN} = 1, \text{ 则 } N \text{ 为 } CM \text{ 的中点, 即 } CN = MN = 1,$$

$$\therefore DN = \sqrt{CD^2 - CN^2} = 2\sqrt{2}, \quad BD = \sqrt{BN^2 + DN^2} = \sqrt{17},$$



$\therefore E$ 为点 C 关于 BD 的对称点,

$\therefore CE \perp BD$, 且 $OC = OE$, $DE = DC$,

$$\text{则 } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot DN = \frac{1}{2} BD \cdot OC,$$

$$\therefore OC = \frac{DN \cdot BC}{BD} = \frac{2\sqrt{2} \times 4}{\sqrt{17}} = \frac{8\sqrt{34}}{17}, \text{ 则 } CE = 2OC = \frac{16\sqrt{34}}{17},$$

$\therefore DE = DC$, $AD = CD$,

$\therefore \angle DAE = \angle DEA$, $\angle DEC = \angle DCE$,

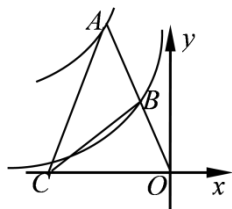
又 $\therefore \angle DAE + \angle DEA + \angle DEC + \angle DCE = 180^\circ$,

$\therefore \angle DEA + \angle DEC = 90^\circ$, 即 $AE \perp CE$,

$$\therefore AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \frac{10\sqrt{17}}{17},$$

故答案为: $\frac{10\sqrt{17}}{17}$.

18. 如图, 点 A 是函数 $y = -\frac{8}{x} (x < 0)$ 图象上一点, 连接 OA 交函数 $y = -\frac{1}{x} (x < 0)$ 图象于点 B , 点 C 是 x 轴负半轴上一点, 且 $AC = AO$, 连接 BC , 那么 $\triangle ABC$ 的面积是_____.



【答案】 $8 - 2\sqrt{2}$ 或 $-2\sqrt{2} + 8$

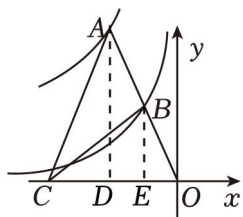
【解析】

【分析】 过点 A , B 分别作 x 轴的垂线, 垂足分别为 D , E , 反比例函数比例系数的几何意义得 $S_{\triangle OAD} = 4$,

$S_{\triangle OBE} = 0.5$, 证 $\triangle OAD \sim \triangle OBE$ 得 $\frac{S_{\triangle OAD}}{S_{\triangle OBE}} = \left(\frac{OA}{OB}\right)^2$, 由此得 $OA = 2\sqrt{2}OB$, 证得 $S_{\triangle ABC} = (2\sqrt{2} - 1)S_{\triangle OBC}$, 然后

根据等腰三角形的性质得 $S_{\triangle AOC} = 2S_{\triangle OAD} = 8$ ，则 $S_{\triangle ABC} + S_{\triangle OBC} = 8$ ，由此得 $S_{\triangle OBC} = 2\sqrt{2}$ ，进而可得 $\triangle ABC$ 的面积.

【详解】解：过点 A ， B 分别作 x 轴的垂线，垂足分别为 D ， E ，如下图所示：



$\because$ 点 A 是函数 $y = -\frac{8}{x} (x < 0)$ 图象上一点，点 B 是反比例函数 $y = -\frac{1}{x} (x < 0)$ 图象上的点，

根据反比例函数比例系数的几何意义得： $S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$ ， $S_{\triangle OBE} = \frac{1}{2} \times 1 = 0.5$ ，

$\because AD \perp x$ 轴， $BE \perp x$ 轴，

$\therefore AD \parallel BE$ ，

$\therefore \triangle OAD \sim \triangle OBE$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle OAD}}{S_{\triangle OBE}} = \left(\frac{OA}{OB} \right)^2,$$

$$\therefore \left(\frac{OA}{OB} \right)^2 = \frac{4}{0.5} = 8,$$

$$\therefore OA = 2\sqrt{2}OB,$$

$$\therefore AB = OA - OB = 2\sqrt{2}OB - OB = (2\sqrt{2} - 1)OB,$$

$$\text{即 } \frac{AB}{OB} = 2\sqrt{2} - 1,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle OBC}} = \frac{AB}{OB} = 2\sqrt{2} - 1,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = (2\sqrt{2} - 1)S_{\triangle OBC},$$

$\because AC = AO$ ， $AD \perp x$ 轴，

$$\therefore OD = CD,$$

$$\therefore S_{\triangle AOC} = 2S_{\triangle OAD} = 8,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} + S_{\triangle OBC} = 8,$$

$$\text{即 } (2\sqrt{2} - 1)S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OBC} = 8,$$

$$\therefore S_{\triangle OBC} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOC} - S_{\triangle OBC} = 8 - 2\sqrt{2}.$$

故答案为: $8 - 2\sqrt{2}$.

【点睛】此题主要考查了反比例函数比例系数的几何意义, 相似三角形的判定和性质, 理解反比例函数比例系数的几何意义, 熟练掌握相似三角形的判定和性质是解决问题的关键.

三、(本大题共 7 题, 第 19—22 题每题 10 分; 第 23、24 题每题 12 分; 第 25 题 14 分; 满分 78 分)

19. 计算: $\sqrt{8} - |1 - \sqrt{2}| + \pi^0 - 2^{\frac{1}{2}}.$

【答案】 2

【解析】

【分析】本题考查了实数的混合运算, 解题的关键是掌握实数的混合运算法则. 先计算零指数幂、化简二次根式、绝对值, 再算加减即可.

【详解】解: 原式 $= 2\sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) + 1 - \sqrt{2}$
 $= \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 + 1$
 $= 2.$

20. 解方程: $\frac{x+2}{x-2} - \frac{16}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$

【答案】 $x = -5$

【解析】

【分析】本题考查了解分式方程和解一元二次方程, 解题的关键是熟练掌握解分式方程和解一元二次方程的方法和步骤. 先去分母, 将分式方程化为整式方程, 再进行求解即可.

【详解】解: $\frac{x+2}{x-2} - \frac{16}{x^2-4} = \frac{1}{x+2},$

$$(x+2)^2 - 16 = x-2,$$

$$x^2 + 4x + 4 - 16 = x - 2,$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0,$$

$$(x+5)(x-2) = 0,$$

$$x+5=0, x-2=0,$$

$$x_1=-5, x_1=2,$$

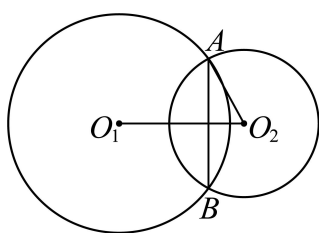
检验, 当 $x=-5$ 时, $x^2-4 \neq 0$,

$\therefore x=-5$ 是原方程的解,

当 $x=2$ 时, $x^2-4=0$,

$\therefore x=2$ 不是原方程的解.

21. 如图, $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于点 A, B , 连接 AB, O_1O_2, AO_2 , 已知 $AB=48, O_1O_2=50, AO_2=30$.



(1) 求 $\odot O_1$ 的半径长;

(2) 试判断以 O_1O_2 为直径的 $\odot P$ 是否经过点 B , 并说明理由.

【答案】 (1) 40

(2) 以 O_1O_2 为直径的 $\odot P$ 经过点 B , 见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查了圆的相关性质, 相似三角形的判定与性质, 线段垂直平分线的性质等知识, 解题的关键是灵活运用这些知识.

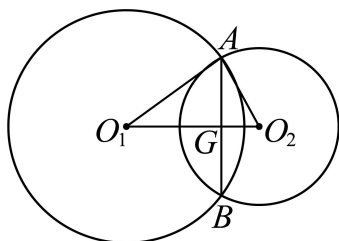
(1) 连接 AO_1 , 设 O_1O_2 与 AB 的交点为 G , 根据题意可得 $AG = \frac{1}{2}AB = 24$, $O_1O_2 \perp AB$, 在 $\text{Rt}\triangle AGO_2$ 中, 根据勾股定理求出 GO_2 , 进而求出 GO_1 , 在 $\text{Rt}\triangle AGO_1$ 中, 根据勾股定理求出 AO_1 , 即可求解;

(2) 根据题意并结合 (1) 可得 $\frac{AO_2}{O_1O_2} = \frac{GO_2}{AO_2}$, 可证明 $\triangle O_1AO_2 \sim \triangle AGO_2$, 得到 $\angle O_1AO_2 = \angle AGO_2 = 90^\circ$,

取 O_1O_2 的中点 P , 连接 AP, BP , 推出 $AP = PO_1$, 结合 O_1O_2 垂直平分 AB , 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 连接 AO_1 , 设 O_1O_2 与 AB 的交点为 G .



$\because \odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于点 A 、 B ， $AB = 48$ ，

$$\therefore AG = \frac{1}{2}AB = 24, \quad O_1O_2 \perp AB,$$

在 $\text{Rt}\triangle AGO_2$ 中， $\angle AGO_2 = 90^\circ$ ，

$$\therefore GO_2 = \sqrt{AO_2^2 - AG^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18;$$

$$\therefore GO_1 = O_1O_2 - GO_2 = 50 - 18 = 32,$$

在 $\text{Rt}\triangle AGO_1$ 中， $\angle AGO_1 = 90^\circ$ ，

$$\therefore AO_1 = \sqrt{GO_1^2 + AG^2} = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40;$$

即 $\odot O_1$ 的半径长为 40；

【小问 2 详解】

以 O_1O_2 为直径的 $\odot P$ 经过点 B 。

$$\therefore \frac{AO_2}{O_1O_2} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}, \quad \frac{GO_2}{AO_2} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{AO_2}{O_1O_2} = \frac{GO_2}{AO_2}, \quad \text{又 } \angle AO_2G = \angle O_1O_2A,$$

$$\therefore \triangle O_1AO_2 \sim \triangle AGO_2,$$

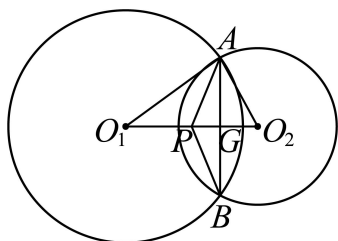
$$\therefore \angle O_1AO_2 = \angle AGO_2 = 90^\circ,$$

取 O_1O_2 的中点 P ，连接 AP 、 BP ，

$$\therefore AP = PO_1,$$

又 O_1O_2 垂直平分 AB ， $BP = AP = PO_1$ ，

$\therefore$ 以 O_1O_2 为直径的 $\odot P$ 经过点 B 。



22. A 市“第××届中学生运动会”期间，甲校租用两辆小汽车（设每辆车的速度相同）同时出发送 8 名学生到比赛场地参加运动会，每辆小汽车限坐 4 人（不包括司机），其中一辆小汽车在距离比赛场地 15 千米的地方出现故障，此时离截止进场的时刻还有 42 分钟，这时唯一可利用的交通工具是另一辆小汽车，已知这辆车的平均速度是每小时 60 千米，人步行的平均速度是每小时 5 千米（上、下车时间忽略不计）。

（1）如果该小汽车先送 4 名学生到达比赛场地，然后再回到出故障处接其他学生，请你判断他们能否在截止进场的时刻前到达？并说明理由；

（2）试设计一种运送方案，使所有参赛学生能在截止进场的时刻前到达比赛场地，并说明方案可行性的理由。

【答案】（1）不能，见解析

（2）见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查一元一次方程的应用，解题的关键是理解题意；

（1）根据题意分别求出单程送达比赛场地的时间和另外送 4 名学生的时间，进而问题可求解；

（2）设汽车与另外 4 名学生相遇所用时间为 t 小时，根据题意可得 $5t + 60t = 15 - 1.25$ ，进而求解即可。

【小问 1 详解】

解：他们不能在截止进场的时刻前到达比赛场地。

$\therefore$ 单程送达比赛场地的时间是： $15 \div 60 = 0.25$ （小时） = 15（分钟）；

$\therefore$ 送完另 4 名学生的时间是： $15 \times 3 = 45$ （分钟） > 42 （分钟）；

$\therefore$ 他们不能在截止进场的时刻前到达比赛场地。

【小问 2 详解】

解：先将 4 名学生用车送达比赛场地，另外 4 名学生同时步行前往比赛场地，

汽车到比赛场地后返回到与另外 4 名学生的相遇处再载他们到比赛场地。（用这种方案送这 8 名学生到达比赛场地共需时间约为 40.4 分钟）。理由如下：

先将 4 名学生用车送达比赛场地的时间是： $15 \div 60 = 0.25$ （小时） = 15（分钟），

此时另外 4 名学生步行路程是： $5 \times 0.25 = 1.25$ （千米）；

设汽车与另外 4 名学生相遇所用时间为 t 小时。

则 $5t + 60t = 15 - 1.25$;

解得 $t = \frac{11}{52}$ (小时) $= \frac{165}{13}$ (分钟);

从相遇处返回比赛场地所需的时间也是 $\frac{165}{13}$ (分钟);

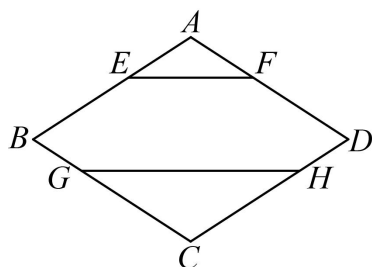
所以, 送这 8 名学生到达比赛场地共需时间为:

$15 + \frac{165}{13} \times 2 \approx 40.4$ (分钟);

又 $40.4 < 42$;

所以, 用这种方案送这 8 名学生能在截止进场的时刻前到达比赛场地.

23. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, 点 E 、 G 、 H 、 F 分别在边 AB 、 BC 、 CD 、 DA 上, $AE = AF$, $CG = CH$, $CG \neq AE$.



(1) 求证: $EF \parallel GH$;

(2) 分别连接 EG 、 FH , 求证: 四边形 $EGHF$ 是等腰梯形.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

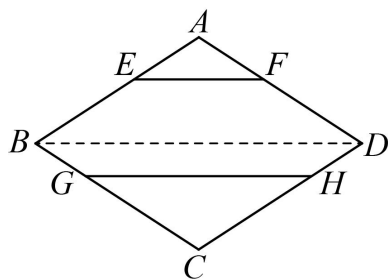
【分析】本题考查了菱形的性质, 等腰梯形的判定

(1) 连结 BD , 可得 $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD}$, $\frac{CG}{CB} = \frac{CH}{CD}$, 进而即可得到结论;

(2) 欲证明四边形 $EGHF$ 是等腰梯形, 只需推知 $EF \neq GH$ $EF \parallel GH$, $EG = FH$, 即可.

【小问 1 详解】

证明: 连结 BD .



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AB = AD = BC = CD;$$

$$\text{又 } AE = AF, \quad CG = CH,$$

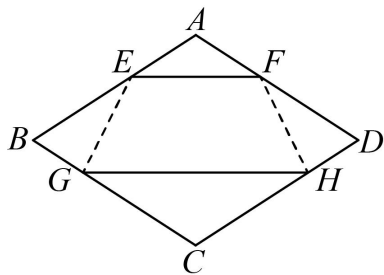
$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD}, \quad \frac{CG}{CB} = \frac{CH}{CD};$$

$$\therefore EF \parallel BD, \quad GH \parallel BD;$$

$$\therefore EF \parallel GH.$$

【小问 2 详解】

证明：连接 EG, FH



$$\because EF \parallel BD,$$

$$\therefore \frac{EF}{BD} = \frac{AE}{AB};$$

$$\because GH \parallel BD,$$

$$\therefore \frac{GH}{BD} = \frac{CG}{BC};$$

$$\text{又 } CG \neq AE,$$

$$\therefore EF \neq GH;$$

$$\text{又 } EF \parallel GH,$$

$\therefore$ 四边形 $EGHF$ 是梯形;

$$\because AB - AE = AD - AF, \text{ 即 } BE = DF;$$

$$\text{又 } \because BC - CG = CD - CH, \text{ 即 } BG = DH;$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

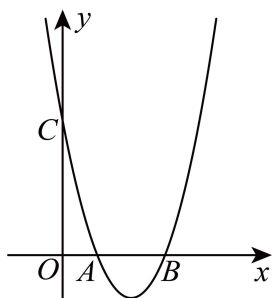
$$\therefore \angle B = \angle D;$$

$$\therefore \triangle BGE \cong \triangle DHF (\text{SAS});$$

$$\therefore EG = FH;$$

$\therefore$ 梯形 $EGHF$ 是等腰梯形.

24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 - 4ax + 4 (a > 0)$ 与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ 和点 B ，与 y 轴交于点 C 。



(1) 求该抛物线的表达式及点 B 的坐标;

(2) 已知点 $M(0, m)$, 联结 BC , 过点 M 作 $MG \perp BC$, 垂足为 G , 点 D 是 x 轴上的动点, 分别联结 GD 、 MD , 以 GD 、 MD 为边作平行四边形 $GDMN$.

① 当 $m = \frac{3}{2}$ 时, 且 $\square GDMN$ 的顶点 N 正好落在 y 轴上, 求点 D 的坐标;

② 当 $m \geq 0$ 时, 且点 D 在运动过程中存在唯一的位置, 使得 $\square GDMN$ 是矩形, 求 m 的值.

【答案】 (1) $y = \frac{4}{3}x^2 - \frac{16}{3}x + 4$; 点 $B(3, 0)$

(2) ① $D(\frac{6}{5}, 0)$; ② m 的值为 0 或 $\frac{3}{7}$

【解析】

【分析】 (1) 把点 A 的坐标代入表达式求出 a 的值即可得到函数表达式, 进而根据对称性求出点 B 的坐标;

(2) ① 在 $\text{Rt}\triangle CGM$ 中, $\angle CGM = 90^\circ$, 则 $\cos \angle MCG = \frac{CG}{CM}$; 得到 $CG = CM \cdot \cos \angle MCG = \frac{5}{2} \times \frac{4}{5} = 2$;

过点 G 作 $GH \perp OC$, 垂足为 H . 在 $\text{Rt}\triangle CGH$ 中, $\angle CHG = 90^\circ$, $GH = CG \cdot \sin \angle HCG = 2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$;

证明四边形 $GDOH$ 是矩形, 则 $OD = GH = \frac{6}{5}$; 即可得到答案; ② 根据 m 的取值分三种情况分别进行解答即可.

【小问 1 详解】

解: 把 $A(1, 0)$ 代入 $y = ax^2 - 4ax + 4 (a > 0)$,

得 $a - 4a + 4 = 0$,

解得 $a = \frac{4}{3}$;

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = \frac{4}{3}x^2 - \frac{16}{3}x + 4$;

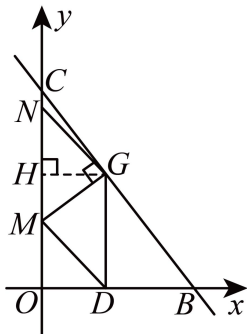
$\therefore$ 抛物线的对称轴是直线 $x = -\frac{-\frac{16}{3}}{2 \times \frac{4}{3}} = 2$, 抛物线 $y = ax^2 - 4ax + 4 (a > 0)$ 与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ 和点 B ,

$\therefore$ 点 $B(3, 0)$.

【小问 2 详解】

①由题意，得 $C(0,4)$ ， $M(0,\frac{3}{2})$ ，

$$\therefore CM = \frac{5}{2};$$



$\because$ 四边形 $GDMN$ 是平行四边形，

$$\therefore GD \parallel NM;$$

又点 N 在 y 轴上，

$$\therefore NM \perp OD,$$

$$\therefore GD \perp OD,$$

在 $\text{Rt}\triangle BOC$ 中， $\angle BOC = 90^\circ$ ，

$$\therefore BC = \sqrt{BO^2 + CO^2} = 5,$$

$$\therefore \cos \angle OCB = \frac{OC}{BC} = \frac{4}{5}, \quad \sin \angle OCB = \frac{OB}{BC} = \frac{3}{5};$$

在 $\text{Rt}\triangle CGM$ 中， $\angle CGM = 90^\circ$ ，

$$\therefore \cos \angle MCG = \frac{CG}{CM};$$

$$\therefore CG = CM \cdot \cos \angle MCG = \frac{5}{2} \times \frac{4}{5} = 2;$$

过点 G 作 $GH \perp OC$ ，垂足为 H 。

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle CGH \text{ 中， } \angle CHG = 90^\circ, \quad GH = CG \cdot \sin \angle HCG = 2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5};$$

$$\therefore \angle GDO = \angle DOH = \angle GHO = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $GDOH$ 是矩形，

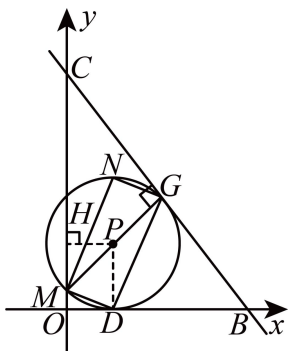
$$\therefore OD = GH = \frac{6}{5};$$

$$\therefore D(\frac{6}{5}, 0).$$

②当 $m \geq 0$ 时，根据 m 不同取值分三种情况讨论：

i 当 $m = 0$ 时，即点 M 与点 O 重合时，符合题意；

ii 当 $0 < m < 4$ 时, 如图情况符合题意, 取 MG 的中点 P , 以 MG 为直径作圆 P , 则 N, D 在圆上,



此时圆 P 和 x 轴有唯一切点 D , 符合题设条件,

则 $OH = PD = PM$,

$$\therefore MG = MC \cdot \sin \angle OCB = \frac{3}{5}(4-m) = 2PM,$$

由①知, $\angle CMG = \angle OCB$, 则 $\sin \angle CMG = \sin \angle OCB$,

$$\text{则 } MH = PM \sin \angle OCB = \frac{9}{50}(4-m),$$

$$\therefore OH = MH + OM = MH + m, \quad PM = OH,$$

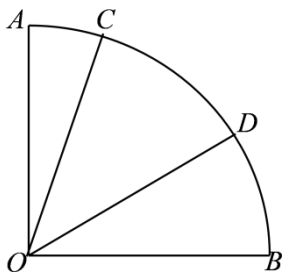
$$\therefore \frac{9}{50}(4-m) + m = \frac{3}{10}(4-m), \quad \text{解得 } m = \frac{3}{7};$$

iii 当 $m \geq 4$ 时, 可得 $OH > PM$, 所以符合题意的 m 不存在;

综合 i、ii、iii, 符合题意的 m 的值为 0 或 $\frac{3}{7}$.

【点睛】此题考查了二次函数的综合题, 考查了解直角三角形, 切线的性质、勾股定理、矩形的判定和性质、平行四边形的性质等知识, 分类讨论是解题的关键.

25. 如图, 在扇形 OAB 中, $OA = OB = 6\sqrt{2}$, $\angle AOB = 90^\circ$, 点 C, D 是弧 AB 上的动点 (点 C 在点 D 的上方, 点 C 不与点 A 重合, 点 D 不与点 B 重合), 且 $\angle COD = 45^\circ$.



(1) ①请直接写出弧 AC 、弧 CD 和弧 BD 之间的数量关系;

②分别连接 AC 、 CD 和 BD , 试比较 $AC + BD$ 和 CD 的大小关系, 并证明你的结论;

(2) AB 分别交 OC 、 OD 于点 M 、 N .

①当点 C 在弧 AB 上运动过程中, $AN \cdot BM$ 的值是否变化, 若变化请说明理由; 若不变, 请求 $AN \cdot BM$ 的值;

②当 $MN = 5$ 时, 求圆心角 $\angle DOB$ 的正切值.

【答案】(1) ① $\widehat{AC} + \widehat{BD} = \widehat{CD}$; ② $AC + BD > CD$, 证明见解析;

(2) ① $AN \cdot BM$ 的值不变, $AN \cdot BM = 72$; ② $\tan \angle DOB = \frac{1}{3}$ 或 $\tan \angle DOB = \frac{1}{2}$.

【解析】

【分析】(1) ①根据“同圆或等圆中, 相等的圆心角所对的弧相等”即可得到答案;

②在弧 CD 上取点 E 连接 OE , 使得 $\angle COE = \angle AOC$, 可得 $AC = CE$, 根据角的和差关系可得 $\angle DOE = \angle BOD$, 则 $BD = DE$, 即可得到答案;

(2) ①证明 $\triangle BMO \sim \triangle AON$, 即可得到答案;

②过点 O 在 OB 下方作 $\angle BOM' = \angle AOM$, 截取 $OM' = OM$, 连接 BM' 、 NM' , 证得 $\triangle OBM' \cong \triangle OAM$ (SAS), 可得 $\angle NBM' = \angle OBA + \angle OBM' = 90^\circ$, 进一步证得 $\triangle ONM' \cong \triangle OMN$ (SAS), 则可得 $MN^2 = AM^2 + BN^2 = 5^2$, 由勾股定理和线段的和差关系可得 $AM + BN = 7$, 联立解得 BN , 过点 N 作 $NF \perp OB$ 于点 F , 则 $NF = BF$, 利用勾股定理求得 NF , OF , 根据正切的概念计算即可.

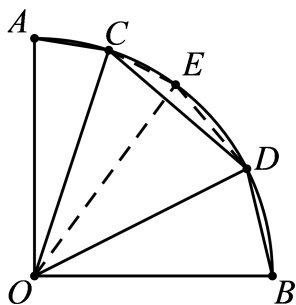
【小问1详解】

解: ① $\because \angle AOB = 90^\circ$, $\angle COD = 45^\circ$,

$\therefore \angle AOC + \angle BOD = \angle AOB - \angle COD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$,

$\therefore \widehat{AC} + \widehat{BD} = \widehat{CD}$;

② $AC + BD > CD$. 证明如下:



在弧 CD 上取点 E 连接 OE , 使得 $\angle COE = \angle AOC$,

$\therefore AC = CE$;

CE 、 DE 可得 $CE + DE > CD$;

$\because \angle COE + \angle DOE = 45^\circ$,

$\therefore \angle AOC + \angle BOD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$,

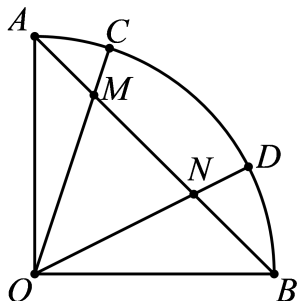
$$\therefore \angle DOE = \angle BOD;$$

$$\therefore BD = DE;$$

$$\therefore AC + BD > CD.$$

【小问2 详解】

解: ① $AN \cdot BM$ 的值不变, $AN \cdot BM = 72$.



$$\because OA = OB, \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA = 45^\circ;$$

$$\because \angle OMB = \angle OAB + \angle AOM = 45^\circ + \angle AOM, \angle AON = \angle COD + \angle AOM = 45^\circ + \angle AOM,$$

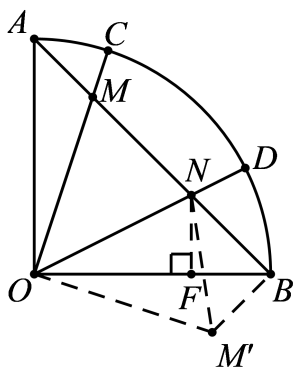
$$\therefore \angle OMB = \angle AON;$$

$$\therefore \triangle BMO \sim \triangle AON;$$

$$\therefore \frac{BM}{AO} = \frac{BO}{AN};$$

$$\therefore AN \cdot BM = AO \cdot BO = 6\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} = 72.$$

②如图,



过点 O 在 OB 下方作 $\angle BOM' = \angle AOM$, 截取 $OM' = OM$, 连接 BM' 、 NM' ,

$$\because AO = BO,$$

$$\therefore \triangle OBM' \cong \triangle OAM \text{ (SAS)},$$

$$\therefore BM' = AM, \angle OBM' = \angle OAB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle NBM' = \angle OBA + \angle OBM' = 90^\circ;$$

又 $\angle M'ON = 45^\circ = \angle COD$, $ON = ON$,

$\therefore \triangle ONM' \cong \triangle OMN$ (SAS),

$\therefore M'N = MN$,

$\therefore MN^2 = M'N^2 = BM'^2 + BN^2 = AM^2 + BN^2$;

$\because AM + BN = AB - MN = \sqrt{OA^2 + OB^2} - 5 = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + 6(\sqrt{2})^2} - 5 = 12 - 5 = 7$, $AM^2 + BN^2 = 5^2$;

解得 $BN = 3$ 或 $BN = 4$;

过点 N 作 $NF \perp OB$ 于点 F , 则 $\angle NFB = 90^\circ$,

$\because \angle ABO = 45^\circ$,

$\therefore \angle BNF = 45^\circ$,

$\therefore NF = BF$,

设 $BF = x$, 则 $OF = 6\sqrt{2} - x$,

当 $BN = 3$ 时,

在 $\text{Rt}\triangle NFB$ 中, $BF^2 + NF^2 = BN^2$, 即 $x^2 + x^2 = 9$,

解得: $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore OF = 6\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \tan \angle DOB = \frac{NF}{OF} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\frac{9\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{3}$;

当 $BN = 4$ 时,

在 $\text{Rt}\triangle NFB$ 中, $BF^2 + NF^2 = BN^2$, 即 $x^2 + x^2 = 16$,

解得: $x = 2\sqrt{2}$,

$\therefore OF = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

$\therefore \tan \angle DOB = \frac{NF}{OF} = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.

【点睛】 本题考查了弧、弦、圆心角的关系, 全等三角形的判定和性质, 等腰三角形的判定和性质, 相似三角形的判定和性质, 解直角三角形, 熟练掌握知识点并灵活运用是解题的关键.

名师教学 - 务实课程 - 注重教辅

淘宝搜索店铺：优尖升教育

客服微信：DEM2008

手机淘宝扫一扫：



ONLINE EDUCATION

为您的课程，我们一直在努力

最新资讯请认准“优尖升教育”，淘宝唯一一家，其他都是旧版

淘宝店铺网址：shop492842749.taobao.com

