

2024 学年第二学期徐汇区学习能力诊断卷

初三数学 试卷

2025.4

(时间 100 分钟 满分 150 分)

考生注意：

1. 本试卷含三个大题，共 25 题；答题时，考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答，在草稿纸、本试卷上答题一律无效；
2. 除第一、二大题外，其余各题如无特别说明，都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的】

1. 下列运算中，计算正确的是

(A) $a^2 + a^3 = a^5$; (B) $a^2 \cdot a^3 = a^6$; (C) $(a^2)^3 = a^5$; (D) $(ab)^2 = a^2b^2$.

2. 将抛物线 $y = 2x^2 - 1$ 向左平移 2 个单位，再向上平移 2 个单位后所得抛物线的表达式是

(A) $y = 2(x - 2)^2 + 1$; (B) $y = 2(x - 2)^2 - 3$;

(C) $y = 2(x + 2)^2 + 1$; (D) $y = 2(x + 2)^2 - 3$.

3. 已知正比例函数 $y = kx (k \neq 0)$ 的图像与反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图像交于 A 、 B 两点，

如果点 A 的坐标是 $(1, 1)$ ，那么点 B 的坐标是

(A) $B(-1, -1)$; (B) $B(-1, 1)$; (C) $B(1, -1)$; (D) $B(1, 1)$.

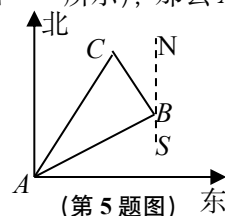
4. 下列调查中，最适宜采用普查方式的是

(A) 对全国初中学生视力状况的调查; (B) 对某科学通讯卫星上一种零部件的调查;
(C) 对一批节能灯管使用寿命的调查; (D) 对动画电影《哪吒 2》的观影情况的调查.

5. 一次游学活动中，小杰从营地 A 出发，沿北偏东 60° 方向走了 $500\sqrt{3}$ 米到达 B 处，然后再沿北偏西 30° 方向走了 500 米到达目的地 C 处(如图 所示)，那么 A 、 C 两地的距离是

(A) $1000\sqrt{3}$ 米; (B) 1500 米;

(C) $500\sqrt{6}$ 米; (D) 1000 米.



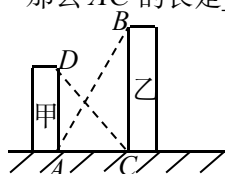
(第 5 题图)

6. 某校组织学生步行到科技展览馆参观，学校与展览馆相距 6 千米，返回时由于步行速度比去时每小时少 1 千米，结果时间比去时多用了半小时，那么学生返回时步行速度是

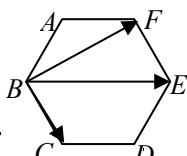
(A) 2 千米/小时; (B) 3 千米/小时; (C) 4 千米/小时; (D) 5 千米/小时.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

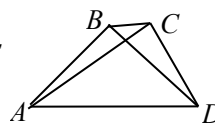
7. 方程 $\sqrt{x+1} = 3$ 的根是 ▲ .
8. 函数 $y = -\frac{2}{x+3}$ 的定义域是 ▲ .
9. 方程组 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ x - 2y = 6 \end{cases}$ 的解是 ▲ .
10. 如果关于 x 的方程 $x^2 - x - m = 0$ 有两个实数根, 那么 m 的取值范围是 ▲ .
11. 若抛物线 $y = mx^2 - 4mx + 1$ 在直线 $x = 2$ 右侧部分是下降的, 则 m 的取值范围是 ▲ .
12. 如果抛物线 $y = x^2 - 3x + 2$ 上的点 $A(-1, 6)$ 和 B 关于它的对称轴对称, 那么点 B 的坐标是 ▲ .
13. 已知三张外观完全相同的卡片正面分别标有数字 1、2、3, 从反面朝上的三种卡片中随机抽出两张, 那么这两张卡片上的数字恰好都小于 3 的概率是 ▲ .
14. 如图, 甲、乙两楼的楼间距 AC 为 10 米, 小杰在甲楼楼底 A 处测得乙楼楼顶 B 的仰角为 60° , 在乙楼楼底 C 处测得甲楼楼顶 D 的仰角为 45° , 那么乙楼比甲楼高 ▲ 米 (结果保留根号).
15. 如图, 正六边形 $ABCDEF$ 中, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BE} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{BF}$ ▲ (用含 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示).
16. 如图, 梯形 $ABCD$ 中, $BC \parallel AD$, $AC \perp BD$, $AC = 4$, $BD = 3$, 那么 $\sin \angle BDA$ 的值是 ▲ .
17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是边 AC 的中点, 点 E 在边 BC 上, $CE = 2BE$, AE 和 BD 交于点 O , 那么 $\triangle BOE$ 和四边形 $OECD$ 的面积比是 ▲ .
18. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $BC = 2$, 将矩形 $ABCD$ 绕着点 C 顺时针旋转得矩形 $A'B'CD'$, $B'C$ 恰好落在对角线 AC 上, 联结 $A'A$, 如果 $A'C$ 与边 AD 相交, 且 $\angle A'CB = \angle A'AC$, 那么 AC 的长是 ▲ .



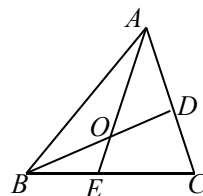
(第 14 题图)



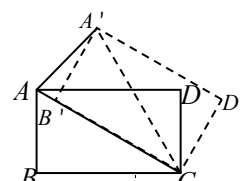
(第 15 题图)



(第 16 题图)



(第 17 题图)



(第 18 题图)

三、(本大题共 7 题, 第 19—22 题每题 10 分; 第 23、24 题每题 12 分; 第 25 题 14 分; 满分 78 分)

19. (本题满分 10 分)

先化简, 再求值: $(1 + \frac{2}{x-1}) \div \frac{x+1}{x^2-2x+1}$, 其中 $x = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

20. (本题满分 10 分)

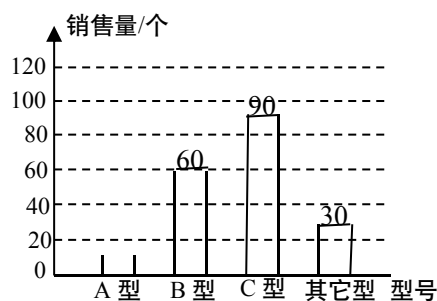
解不等式组: $\begin{cases} 2(x-3) + x \leq 3, \\ \frac{x+5}{3} < \frac{x}{2} + 2, \end{cases}$ 并在数轴上把解集表示出来.

21. (本题满分 10 分)

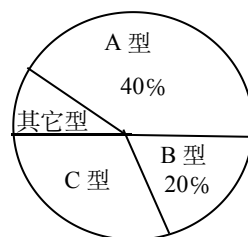
某文具商店为了了解 3 月份计算器的销售情况, 对 3 月份各种型号计算器的销售情况进行调查, 并将调查的结果绘制成如图 1、图 2 所示的两幅不完整的统计图.

各型号计算器销售量条形统计图

各型号计算器销售量扇形统计图



(第 21 题图 1)



(第 21 题图 2)

- 根据图中提供的信息, 求 3 月份各种型号计算器的销售总量;
- 求 3 月份 A 型计算器的销售量, 并将条形统计图补充完整;
- 该店 4 月份准备只购进 A、B、C 三种型号的计算器, 总数量和 3 月份各型号计算器销售的总量相同, 结果恰好用完进货款 8200 元, 设购进 A 型计算器 x 个、B 型计算器 y 个, 求 y 关于 x 的函数关系式. 其中, 三种型号的计算器的进价如下表:

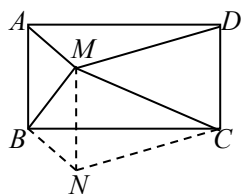
	A 型	B 型	C 型
进价 (单位: 元/个)	50	30	20

22. (本题满分 10 分)

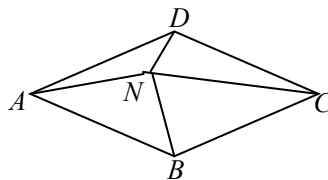
“数学探究小组”研究如下问题: 如图 1, 点 M 是矩形 $ABCD$ 内一点, 求作一个四边形, 使得四边形的四边分别等于 AM 、 BM 、 CM 、 DM , 并且两条对角线互相垂直.

小组成员小杰提出了如下的作法: 1. 过点 M 作 $MN \parallel AB$ 并截取 $MN = AB$; 2. 分别联结 BN 、 CN . 那么四边形 $MBNC$ 就是所求作的四边形.

- 请判断小杰的作法是否正确, 并说明理由;
- 如图 2, 点 N 是菱形 $ABCD$ 内一点, 请根据上述信息提出一个类似问题, 并予以解决 (只需写出作法或画出图形、结论, 不必说明理由).



(第 22 题图 1)



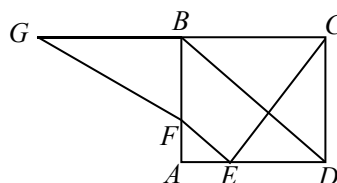
(第 22 题图 2)

23. (本题满分 12 分)

如图, BD 是正方形 $ABCD$ 的对角线, 点 E 、 F 分别在边 AD 、 AB 上, $EF \parallel BD$, 延长 CB 到 G , 且 $BG = BC$, 联结 GF 、 CE .

- 求证: $GF = CE$;
- 延长 GF 交 CE 于点 H , 联结 BH ,

求证: $2BH^2 = GH \cdot GF$.



(第 23 题图)

24. (本题满分 12 分)

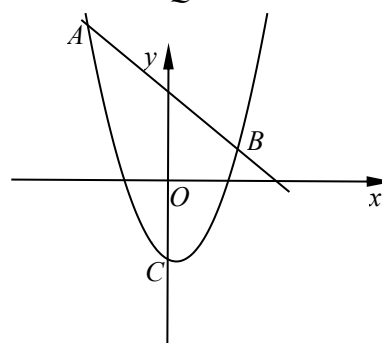
如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 2$ 与 y 轴交于点 C , 与直线

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ 交于点 $A(-2, n)$ 和 $B(m, 1)$.

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 已知点 D 在 y 轴上, 当以点 A 、 B 、 O 、 D 为顶点的四边形是矩形时, 求点 D 到直线 AC 的距离;

(3) 设直线 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ 与 x 轴交于点 E , 已知点 P 、 Q 在直线 CE 上且在直线 AB 的下方 (点 P 在点 Q 的右侧), 如果 $PQ = \sqrt{34}$, $BQ = AP$, 求点 P 、 Q 的坐标.



(第 24 题图)

25. (本题满分 14 分)

如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AC \perp AB$, $AB = 6$, $BC = 10$, 点 O_1 是边 BC 上的动点, 以点

O_1 为圆心、 O_1C 为半径的圆交边 AC 于点 E . 设 $O_1C = r$.

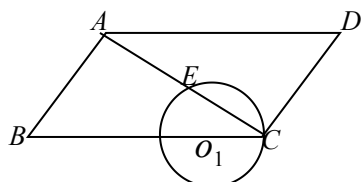
(1) 当点 E 是边 AC 的中点时, 求 r 的值;

(2) 已知点 O_2 是线段 AE 的中点 (规定: 当点 E 与点 A 重合时, 点 O_2 也与点 A 重合),

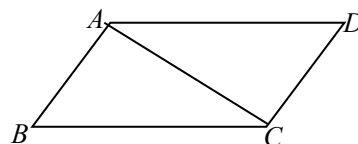
以点 O_2 为圆心、 O_1O_2 为半径作 $\odot O_2$.

① 当 $\odot O_2$ 与边 AD 有公共点时, 求 r 的取值范围;

② 如果 $\odot O_2$ 经过边 AD 的中点, 求此时 $\odot O_2$ 与 $\odot O_1$ 的公共弦长.



(第 25 题图)



(备用图)