

2024 学年第二学期徐汇区初三年级数学学科 期终学习能力诊断卷参考答案和评分标准

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)

1. D; 2. C; 3. A; 4. B; 5. D; 6. B.

二、填空题：(本大题共 12 题，满分 48 分)

7. $x=8$; 8. $x \neq -3$; 9. $\begin{cases} x=2, \\ y=-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-6 \end{cases}$; 10. $m \geq -\frac{1}{4}$; 11. $m < 0$;

12. (4,6); 13. $\frac{1}{3}$; 14. $(10\sqrt{3}-10)$; 15. $\vec{b}-\vec{a}$; 16. $\frac{4}{5}$; 17. $\frac{1}{5}$; 18. $2\sqrt{5}-2$.

三、(本大题共 7 题，第 19、20、21、22 题每题 10 分，第 23、24 题每题 12 分，第 25 题 14 分，满分 78 分)

19. 解：原式 $= \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)^2}{x+1} = x-1$

当 $x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$ 时，原式 $= \sqrt{2}+1-1 = \sqrt{2}$.

20. 解：由不等式①得 $3x \leq 9$ ；解得 $x \leq 3$ ；
由不等式②得 $2x+10 < 3x+12$ ；解得 $x > -2$ ；
所以，原不等式组的解集是 $-2 < x \leq 3$.
图略.

21. 解：(1) $60 \div 20\% = 300$ (个)；

(2) $300 \times 40\% = 120$ (个)；图略；

(3) $50x + 30y + 20(300 - x - y) = 8200$ ；即 $y = 220 - 3x$.

22. 解：(1) 小杰的作法正确.

$\therefore MN \parallel AB$, $MN = AB$,

$\therefore$ 四边形 $ABNM$ 是平行四边形； $\therefore BN = AM$ ；

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形， $\therefore AB \parallel CD$, $AB = CD$, $\angle ABC = 90^\circ$ ；

$\therefore MN \parallel CD$, $MN = CD$ ；

$\therefore$ 四边形 $MNCD$ 是平行四边形； $\therefore CN = DM$ ；

设 MN 与 BC 交于点 O ，又 $MN \parallel AB$ ， $\therefore \angle MOC = \angle ABC = 90^\circ$ ；

$\therefore MN \perp BC$.

$\therefore$ 四边形 $BMCN$ 就是所求的四边形.

(2) 问题：如图，点 M 是菱形 $ABCD$ 内一点，求作一个四边形，使得四边形的四边分别等于 AM 、 BM 、 CM 、 DM ，并且两条对角线相等.

解：作法 1、过点 M 作 $MN \parallel AB$ 并截取 $MN = AB$ ；

2、分别联结 BN 、 CN .

∴ 四边形 $MBNC$ 就是所求作的四边形.

23. 证明: (1) ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = AD = BC = CD, \quad \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ;$$

$$\therefore EF \parallel BD, \quad \therefore \frac{BF}{AB} = \frac{DE}{AD}; \quad \therefore BF = DE;$$

$$\text{又 } BG = BC, \quad \therefore GB = CD;$$

$$\text{又 } \angle GBA + \angle ABC = 180^\circ, \quad \therefore \angle GBA = 90^\circ = \angle CDE;$$

$$\therefore \triangle GBF \cong \triangle CDE; \quad \therefore GF = CE.$$

(2) 由 (1) $\triangle GBF \cong \triangle CDE$, $\therefore \angle G = \angle ECD$;

$$\text{又 } \angle ECD + \angle GCH = \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GHC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ;$$

$$\text{又 } BG = BC, \quad \therefore BH = BG = \frac{1}{2}GC;$$

$$\text{在 } \triangle CFB \text{ 和 } \triangle GCH \text{ 中, } \angle G = \angle C, \quad \angle GBF = \angle GHC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CFB \sim \triangle GCH;$$

$$\therefore \frac{GB}{GH} = \frac{GF}{GC}; \quad \text{即 } GB \cdot GC = GH \cdot GF;$$

$$\text{又 } BH = BG = \frac{1}{2}GC, \quad \therefore 2BH^2 = GH \cdot GF.$$

24. 解: (1) 由题意, 得 $n = 4$, $m = 2$; $\therefore A(-2, 4)$ 、 $B(2, 1)$;

$$\text{由题意, 得 } \begin{cases} 4a - 2b - 2 = 4, \\ 4a + 2b - 2 = 1 \end{cases}, \quad \text{解得 } \begin{cases} a = \frac{9}{8}, \\ b = -\frac{3}{4} \end{cases};$$

$$\therefore \text{抛物线的表达式为 } y = \frac{9}{8}x^2 - \frac{3}{4}x - 2.$$

(2) 设 AB 与 y 轴的交点为 M . 可得 $M(0, \frac{5}{2})$;

∵ 点 D 在 y 轴上, 以点 A 、 B 、 O 、 D 为顶点的四边形是矩形;

1° 当点 D 在直线 AB 的下方时, 以点 A 、 B 、 O 、 D 为顶点的四边形不是矩形, 不合题意;

2° 当点 D 在直线 AB 的上方时, 由题意, 可得 $DM = OM = AM = BM = \frac{5}{2}$; $\therefore D(0, 5)$;

过点 D 作 $DN \perp AC$ 于 N , 过点 A 作 $AG \perp OD$ 于 G .

$$\text{由题意, 得 } C(0, -2), \quad \therefore AC = 2\sqrt{10}, \quad AG = 2, \quad CD = 7;$$

$$\text{在 } Rt\triangle AGC \text{ 中, } \angle AGC = 90^\circ, \quad \therefore \sin C = \frac{AG}{AC} = \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10};$$

$$\text{在 } Rt\triangle DNC \text{ 中, } \angle DNC = 90^\circ, \quad \sin C = \frac{DN}{CD};$$

$$\therefore DN = CD \cdot \sin C = 7 \times \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{7\sqrt{10}}{10}; \quad \therefore \text{点 } D \text{ 到直线 } AC \text{ 的距离是 } \frac{7\sqrt{10}}{10}.$$

(3) 过点 A 作 $AF \parallel CE$, 并截取 $AF = \sqrt{34}$, 作 $FG \parallel OE$ 交 y 轴于 G .

由题意, 得点 $E(\frac{10}{3}, 0)$, $\therefore OE = \frac{10}{3}$, $OC = 2$; $\therefore \tan \angle OEC = \frac{3}{5}$;

易得 $\tan \angle AFG = \frac{3}{5}$; $\therefore$ 可得点 $F(-7, 1)$; $\therefore FB \parallel OE$;

作线段 FB 的垂直平分线交直线 CE 于点 Q , 可知点 Q 的横坐标为 $-\frac{5}{2}$;

又可得直线 CE 的表达式为: $y_{CE} = \frac{3}{5}x - 2$;

$\therefore$ 点 Q 的纵坐标为 $-\frac{7}{2}$; $\therefore$ 点 $Q(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2})$;

过点 A 作 $AP \parallel FQ$ 交直线 CE 于 P . 易得四边形 $AFQP$ 是平行四边形;

$\therefore AP = FQ$, $PQ = AF = \sqrt{34}$, 又 $BQ = FQ$, $\therefore AP = BQ$;

过点 P 作 $PH \parallel OE$ 交线段 FB 的垂直平分线于 H .

可知 $\tan \angle HPQ = \frac{3}{5}$; $\therefore$ 可得点 $P(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$.

25. 解: (1) $\because AC \perp AB$, $\therefore \angle BAC = 90^\circ$;

$$\therefore AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8;$$

过点 O_1 作 $O_1G \perp CE$ 于点 G . $\therefore \angle O_1GC = 90^\circ = \angle BAC$;

$$\therefore O_1G \parallel AB; \quad \therefore \frac{O_1G}{BC} = \frac{CG}{AC}; \quad \because \text{点 } E \text{ 是 } AC \text{ 的中点}, \quad CE = \frac{1}{2}AC = 4;$$

$$\text{又 } O_1G \perp CE, \quad \therefore CG = \frac{1}{2}CE = 2; \quad \therefore \frac{O_1G}{10} = \frac{2}{8}, \quad \text{解得 } r = O_1G = \frac{5}{2}.$$

(2) ① i) 当点 O_1 与点 C 重合时, 点 O_2 是 AC 的中点, 此时 $\odot O_2$ 的半径为 4;

又点 O_2 到 AD 的距离为 $\frac{12}{5} < 4$, $\therefore$ 圆 O_2 与直线 AD 相交;

又 $O_2B = 2\sqrt{13} > 4$, $\therefore$ 圆 O_2 与边 AL 必有公共点;

ii) 当点 O_1 与点 C 不重合时, 作 $O_1G \perp EC$ 于 G . 可得 $O_2G = \frac{1}{2}AC = 4$;

$$\therefore O_1O_2 > O_2A; \quad \therefore \text{点 } A \text{ 在 } \odot O_2 \text{ 内}; \quad \text{又 } O_1O_2 = \sqrt{16 + \frac{9}{25}r^2};$$

$$O_2B = \sqrt{36 + (4 + \frac{4}{5}r)^2} > \sqrt{16 + \frac{9}{25}r^2} = O_1O_2; \quad \therefore \text{点 } B \text{ 在 } \odot O_2 \text{ 外};$$

$\therefore$ 圆 O_2 与边 AL 必有公共点; $\therefore 0 < r \leq 5$.

② $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AD = BC = 10$;

过 AD 的中点 P 作 $PQ \perp AC$ 于 Q . 可得 $PQ \parallel CD$; $\therefore$ 点 Q 是边 AC 的中点;

$\therefore$ 在 $Rt\triangle PQO_2$ 中, $O_2P = \sqrt{(\frac{4}{5}r)^2 + 9}$; 由① $O_1O_2 = \sqrt{16 + \frac{9}{25}r^2}$;

又 $\odot O_2$ 经过边 AD 的中点 P , $\therefore O_2P = O_1O_2$;

即 $\sqrt{(\frac{4}{5}r)^2 + 9} = \sqrt{16 + \frac{9}{25}r^2}$, 解得 $r = \pm 5$ (负值舍去);

$\therefore$ 点 O_1 是边 BC 的中点; 此时点 O_2 与点 A 重合; $\odot O_2$ 和 $\odot O_1$ 的半径都是 5;

设 $\odot O_2$ 和 $\odot O_1$ 的交点分别为点 M 、 N (点 M 在左),

$\therefore O_1M = O_1N = 5$, $O_2M = O_2N = 5$, $\therefore O_2M = O_2N = O_1M = O_1N$;

$\therefore$ 四边形 O_2MO_1N 是菱形;

又 $O_2O_1 = O_1M = O_2M$, $\therefore \angle O_2MO_1 = 60^\circ$;

设菱形 O_2MO_1N 对角线交于点 H , $\therefore HM = \frac{1}{2}MN$, $MN \perp O_1O_2$,

在 $Rt\triangle O_1HM$ 中, $HM = 5 \cos 30^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2}$;

$\therefore MN = 5\sqrt{3}$. 即 $\odot O_2$ 与 $\odot O_1$ 的公共弦长 $5\sqrt{3}$.