

上海市宝山区 2023 学年第二学期期中考试九年级

数学试卷

考生注意:

1. 本试卷共25题.
2. 试卷满分150分. 考试时间100分钟.
3. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
4. 除第一、二大题外, 其余各题如无特殊说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 二次根式 $\sqrt{x-1}$ 有意义, 则 x 的取值范围是 (▲)
(A) $x > 0$; (B) $x \geq 0$; (C) $x > 1$; (D) $x \geq 1$.
2. 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2 - x - m = 0$ 有两个相等的实数根, 那么实数 m 的值是 (▲)
(A) -1 ; (B) $-\frac{1}{4}$; (C) $\frac{1}{4}$; (D) 1 .
3. 下列函数中, y 的值随 x 值的增大而减小的是 (▲)
(A) $y = 2x^2 + 1$; (B) $y = -2x^2 + 1$; (C) $y = x + 1$; (D) $y = -x + 1$.
4. 先后两次抛掷同一枚质地均匀的硬币, 两次都是正面向上的概率是 (▲)
(A) $\frac{1}{4}$; (B) $\frac{1}{3}$; (C) $\frac{1}{2}$; (D) $\frac{1}{6}$.
5. 上海发布微信公众号可查询到上海市实时空气质量状况. 下面是三月某一周连续七天的空气质量指数(AQI): 28, 26, 26, 37, 33, 40, 117, 这组数据的下列统计量中, 能比较客观地反映这一周空气质量平均水平的是 (▲)
(A) 平均数; (B) 中位数; (C) 众数; (D) 方差.
6. 如图 1, $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 5$, $\tan B = \frac{1}{2}$, 如果以点 C 为圆心, 半径为 R 的 $\odot C$ 与线段 AB 有两个交点, 那么 $\odot C$ 的半径 R 的取值范围是 (▲)

- (A) $2 < R \leq \sqrt{5}$; (B) $2 \leq R \leq \sqrt{5}$;

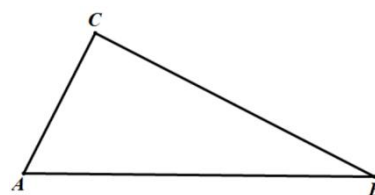


图 1

(C) $\sqrt{5} \leq R \leq 2\sqrt{5}$; (D) $0 < R \leq \sqrt{5}$.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 计算: $a^6 \div a^2 = \underline{\hspace{1cm}} \blacktriangle$.

8. 因式分解: $m^2 - 3m = \underline{\hspace{1cm}} \blacktriangle$.

9. 不等式 $\frac{x-1}{2} < 0$ 的解集是 $\underline{\hspace{1cm}} \blacktriangle$.

10. 方程 $\sqrt{2-x} = -x$ 的解是 $\underline{\hspace{1cm}} \blacktriangle$.

11. 我国天文学家算出了仙女星系“体重”. 仙女星系是距离银河系最近的大型漩涡星系, 是研究星系形成和演化的绝佳案例. 计算得到仙女星系质量约为 11400 亿倍太阳质量. 把数据 11400 亿用科学记数法表示应是 $\underline{\hspace{1cm}} \blacktriangle$.

12. 某厂生产了 1000 只灯泡. 为了解这 1000 只灯泡的使用寿命, 从中随机抽取了 50 只灯泡进行检测, 结果有 28 只灯泡的使用寿命超过了 2500 小时, 那么估计这 1000 只灯泡中使用寿命超过 2500 小时的灯泡的数量为 $\underline{\hspace{1cm}} \blacktriangle$ 只.

13. 《孙子算经》记载了这样一个题目: 今有木, 不知长短. 引绳度之, 余绳四尺五寸; 屈绳量之, 不足一尺. 木长几何? 其大意是: 用一根绳子去量一根长木, 绳子还剩余 4.5 尺; 将绳子对折再量长木, 长木多出 1 尺. 那么长木的长度为 $\underline{\hspace{1cm}} \blacktriangle$ 尺.

14. 如图 2, 街心花园有 A 、 B 、 C 三座小亭子, A 、 C 两亭被池塘隔开, A 、 B 、 C 三亭所在的点不共线. 设 AB 、 BC 的中点分别为 M 、 N . 如果 $MN=3$ 米, 那么 $AC=\underline{\hspace{1cm}} \blacktriangle$ 米.

15. 如图 3, 正六边形 $ABCDEF$, 连接 OE 、 OD , 如果 $\overrightarrow{OD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OE} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{AB} = \underline{\hspace{1cm}} \blacktriangle$.

16. 为传承海派文化, 社区准备举办沪剧爱好者观摩演出活动. 把某场馆的一个正方形区域改造成一个由矩形和半圆形组成的活动场地 (如图 4), 矩形 $ABCD$ 是观众观演区, 阴影部分是舞台, CD 是半圆 O 的直径, 弦 EF 与 CD 平行. 已知 EF 长 8 米, 舞台区域最大深度为 2 米, 如果每平方米最多可以坐 3 名观众, 那么观演区可容纳 $\underline{\hspace{1cm}} \blacktriangle$ 名观众.

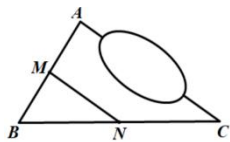


图 2

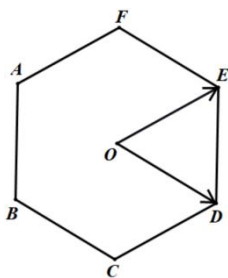


图 3

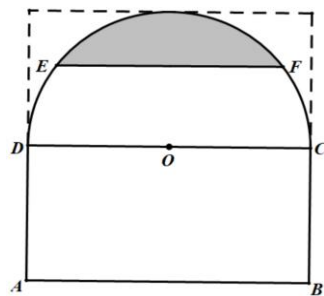


图 4

17. 如图 5，边长分别为 5，3，2 的三个正方形拼接在一起，它们的一边在同一直线上，那

么图中阴影三角形①和②的面积之比 $\frac{S_1}{S_2}$ 的比值为_____.

18. 如图 6，菱形 $ABCD$ 的边长为 5， $\cos B = \frac{4}{5}$ ， E 是边 CD 上一点（不与点 C 、 D 重合），把 $\triangle ADE$ 沿着直线 AE 翻折，如果点 D 落在菱形一条边的延长线上，那么 CE 的长为_____.

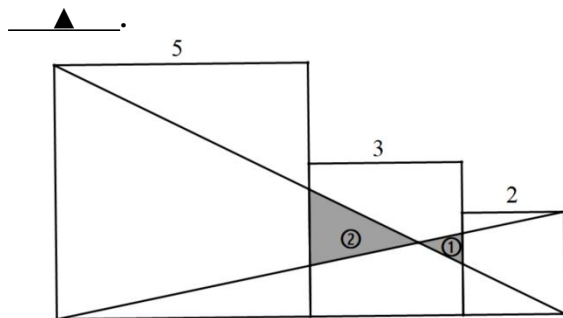


图 5

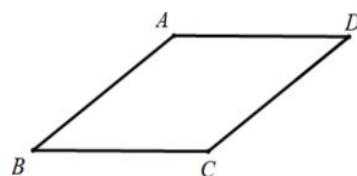


图 6

三、解答题：（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. （本题满分 10 分）计算： $8^{\frac{2}{3}} - (\sqrt{2} - 1)^{-1} - |\sqrt{8} - 3|$.

20. （本题满分 10 分）解方程： $\frac{3}{x+1} = \frac{1}{2x} + 1$.

21. （本题满分 10 分，第(1)小题满分 5 分，第(2)小题满分 5 分）

如图 7，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = x + 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B ，与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像交于点 $C(2, m)$.

(1) 求反比例函数的解析式；

(2) 过点 C 作 x 轴的平行线 l ，如果点 D 在直线 l 上，且 $CD=3$ ，求 $\triangle ABD$ 的面积.

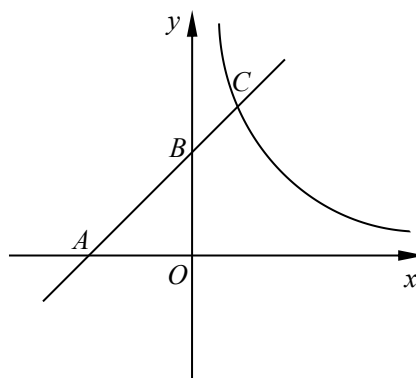


图 7

22. (本题满分 10 分)

小明家院内靠墙安装了一个遮阳篷 (如图 8), 图 9 是它的侧面示意图, 遮阳篷长 $AC = 6$ 米, 与水平面的夹角为 17.5° , 靠墙端 A 离地高度 $AB = 5$ 米, 已知该地区冬至正午太阳光照入射角 $\angle CDF = 36.9^\circ$, 夏至正午太阳光照入射角 $\angle CEF = 82.4^\circ$, 因此, 点 D 、 E 之间的区域是一年四季中阳光不一定照射到的区域, 求该区域深度 DE 的长. (结果精确到 0.1 米)

参考数据: $\sin 17.5^\circ \approx 0.3$, $\cos 17.5^\circ \approx 0.95$, $\tan 17.5^\circ \approx 0.32$;
 $\sin 36.9^\circ \approx 0.6$, $\cos 36.9^\circ \approx 0.8$, $\tan 36.9^\circ \approx 0.75$;
 $\sin 82.4^\circ \approx 0.99$, $\cos 82.4^\circ \approx 0.13$, $\tan 82.4^\circ \approx 7.5$.



图 8

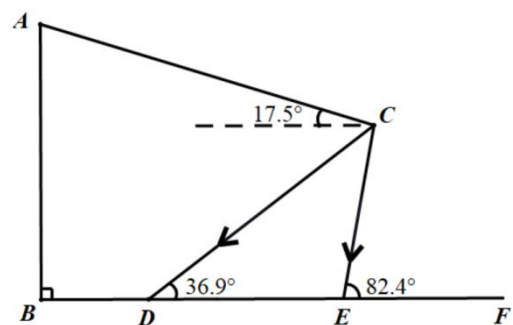


图 9

23. (本题满分 12 分, 第(1)小题满分 6 分, 第(2)小题满分 6 分)

如图 10, 在 $\odot O$ 中, 直径 AB 垂直于弦 CD , 垂足为点 E , 联结 AC 、 DO , 延长 DO 交 AC 于点 F .

- (1) 求证: $AF^2 = OF \cdot DF$;
- (2) 如果 $CD = 8$, $BE = 2$, 求 OF 的长.

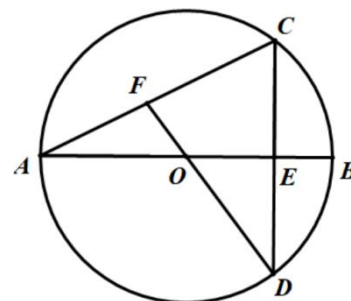


图 10

24. (本题满分 12 分, 第(1)小题满分 4 分,第(2)小题满分 4 分, 第(3)小题满分 4 分)

在平面直角坐标系 xOy 中 (如图 11), 已知开口向下的抛物线 $y = ax^2 - 2x + 4$ 经过点 $P(0, 4)$, 顶点为 A .

(1) 求直线 PA 的表达式;

(2) 如果将 $\triangle POA$ 绕点 O 逆时针旋转 90° , 点 A 落在抛物线上的点 Q 处, 求抛物线的表达式;

(3) 将 (2) 中得到的抛物线沿射线 PA 平移, 平移后抛物线的顶点为 B , 与 y 轴交于点 C . 如果 $PC = \sqrt{2}AB$, 求 $\tan \angle PBC$ 的值.

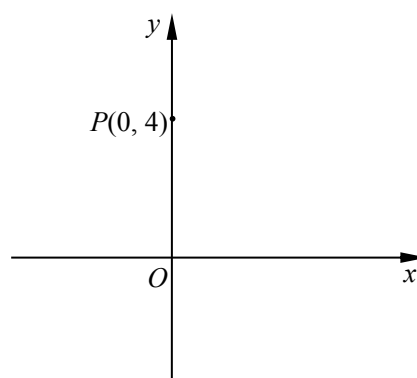


图 11

25. (本题满分 14 分, 第(1)小题①满分 4 分, 第(1)小题②满分 4 分, 第(2)小题满分 6 分)

已知 AB 是半圆 O 的直径, C 是半圆 O 上不与 A 、 B 重合的点, 将弧 AC 沿直线 AC 翻折, 翻折所得的弧交直径 AB 于点 D , E 是点 D 关于直线 AC 的对称点.

(1) 如图 12, 点 D 恰好落在点 O 处.

① 用尺规作图在图 12 中作出点 E (保留作图痕迹),

联结 AE 、 CE 、 CD , 求证: 四边形 $ADCE$ 是菱形;

② 联结 BE , 与 AC 、 CD 分别交于点 F 、 G , 求 $\frac{FG}{BE}$ 的值;

(2) 如果 $AB = 10$, $OD = 1$, 求折痕 AC 的长.

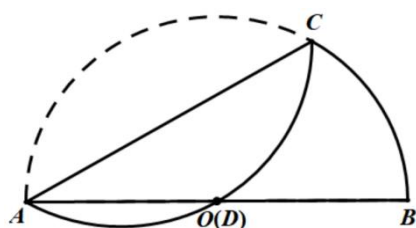
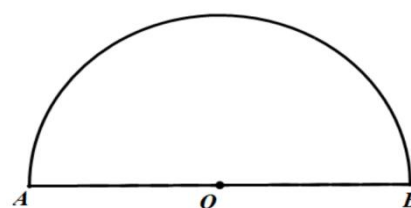


图 12



备用图

上海市宝山区 2023 学年第二学期期中考试九年级

数学试卷

考生注意：

1. 本试卷共25题.
2. 试卷满分150分. 考试时间100分钟.
3. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
4. 除第一、二大题外, 其余各题如无特殊说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 二次根式 $\sqrt{x-1}$ 有意义, 则 x 的取值范围是 (▲)

(A) $x > 0$; (B) $x \geq 0$; (C) $x > 1$; (D) $x \geq 1$.

【答案】D

【分析】本题考查二次根式有意义的条件, 即被开方数要 ≥ 0 .

【详解】由题意得,

$$x-1 \geq 0$$

$$\therefore x \geq 1$$

所以答案选 D

2. 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2 - x - m = 0$ 有两个相等的实数根, 那么实数 m 的值是 (▲)

(A) -1 ; (B) $-\frac{1}{4}$; (C) $\frac{1}{4}$; (D) 1 .

【答案】B

【分析】本题考查一元二次方程根的情况, 根据一元二次方程判别式与根情况的关系, 列代数式求解即可.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根;

当 $\Delta = 0$ ，方程有两个相等的实数根；

当 $\Delta < 0$ ，方程没有实数根.

【详解】

$\because$ 一元二次方程 $x^2 - x - m = 0$ 有两个相等的实数根

$$\therefore \Delta = 0$$

$$\therefore 1 + 4m = 0$$

$$\therefore m = -\frac{1}{4}$$

$\therefore$ 答案选 B

3. 下列函数中， y 的值随 x 值的增大而减小的是 (▲)

$$(A) \ y = 2x^2 + 1; \quad (B) \ y = -2x^2 + 1; \quad (C) \ y = x + 1; \quad (D) \ y = -x + 1.$$

【答案】D

【分析】本题考查一次函数，二次函数的图像与性质

【详解】

A 选项，二次函数，在对称轴左侧，函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小，右侧不满足题意，故 A 错；

B 选项，二次函数，开口向下，在对称轴左侧，函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大，不满足题意，故 B 错；

C 选项，一次函数， $k > 0$ ，函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大，故 C 错；

D 选项，一次函数， $k < 0$ ，函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小，故 D 正确。

正确答案为 D

4. 先后两次抛掷同一枚质地均匀的硬币，两次都是正面向上的概率是 (▲)

- (A) $\frac{1}{4}$; (B) $\frac{1}{3}$; (C) $\frac{1}{2}$; (D) $\frac{1}{6}$.

【答案】A

【分析】本题考查学生对概率的理解掌握情况

【详解】抛掷同一枚质地均匀的硬币，每次正面向上的概率都为 $\frac{1}{2}$ ，

那么先后两次抛掷同一枚质地均匀的硬币，两次都是正面向上的概率是 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

正确答案为 A

5. 上海发布微信公众号可查询到上海市实时空气质量状况.下面是三月某一周连续七天的空气质量指数(AQI): 28, 26, 26, 37, 33, 40, 117, 这组数据的下列统计量中, 能比较客观地反映这一周空气质量平均水平的是 (▲)

- (A) 平均数; (B) 中位数; (C) 众数; (D) 方差.

【答案】B

【分析】本题考查学生对统计的一些概念的理解

【详解】根据中位数的定义先确定从小到大或者从大到小排列, 所以中位数能比较客观地反映这一周空气质量平均水平;

标准差: 方差的算数平方根叫做这组数据的标准差, 用“s”表示, 即

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]}$$

方差、标准差都反映一组数据波动大小;

平均数: 一般地, 如果有 n 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 那么, $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ 叫做这 n 个数的平均数;

众数: 在一组数据中, 出现次数最多的数据叫做这组数据的众数.

根据定义, 容易得到答案为 B

6. 如图 1, $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AB=5$, $\tan B = \frac{1}{2}$, 如果以点 C 为圆心, 半径为 R 的 $\odot C$

与线段 AB 有两个交点, 那么 $\odot C$ 的半径 R 的取值范围是

(▲)

(A) $2 < R \leq \sqrt{5}$;

(B) $2 \leq R \leq \sqrt{5}$;

(C) $\sqrt{5} \leq R \leq 2\sqrt{5}$;

(D) $0 < R \leq \sqrt{5}$.

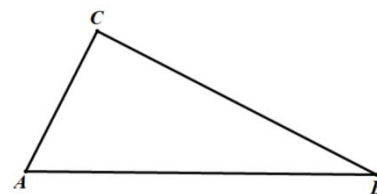


图 1

【答案】A

【分析】

【详解】

过 C 作 $CD \perp AB$, 交 AB 于点 D ,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$\because \angle C=90^\circ, AB=5, \tan B = \frac{1}{2}$$

$$BC=2\sqrt{5} \quad AC=\sqrt{5}$$

$\therefore$

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中,

由等面积, 得 $CD=2$

$\therefore$ 以点 C 为圆心, 半径为 R 的 $\odot C$ 与线段 AB 有两个交点

$\therefore R > CD$, 且 $R \leq AC$

$$\therefore 2 < R \leq \sqrt{5}$$

正确答案为 A

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 计算: $a^6 \div a^2 = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

【答案】 a^4

【分析】 本题考查同底数幂的除法法则。同底数幂相除, 底数不变, 指数相减。

【详解】

$$a^6 \div a^2 = a^4$$

所以答案为 a^4

8. 因式分解: $m^2 - 3m = \underline{\hspace{1cm} \blacktriangle \hspace{1cm}}$.

【答案】 $m(m-3)$

【分析】 本题考查因式分解中的提公因式

【详解】 代数式提出 m , 即得到答案 $m(m-3)$

9. 不等式 $\frac{x-1}{2} < 0$ 的解集是 $\underline{\hspace{1cm} \blacktriangle \hspace{1cm}}$.

【答案】 $x < 1$

【分析】 本题考查解不等式

【详解】 原不等式可以化为

$$x - 1 < 0$$

$$\therefore x < 1$$

所以答案为 $x < 1$

10. 方程 $\sqrt{2-x} = -x$ 的解是 $\underline{\hspace{1cm} \blacktriangle \hspace{1cm}}$.

【答案】 $x = -2$

【分析】 本题考查无理方程的解法, 及验根

【详解】 由题意, 得 $x \leq 0$

两边平方得 $2-x = x^2$

解得 $x_1 = 1, x_2 = -2$

经检验得 $x_1 = 1$ 为增根, 舍去

所以方程的解是 $x = -2$

11. 我国天文学家算出了仙女星系“体重”.仙女星系是距离银河系最近的大型漩涡星系,是研究星系形成和演化的绝佳案例.计算得到仙女星系质量约为 11400 亿倍太阳质量.把数据 11400 亿用科学记数法表示应是_____▲_____.

【答案】 1.14×10^{12}

【分析】本题考查科学记数法 $a \times 10^n$ ($1 \leq a < 10$) 的表示方法,解题的关键是正确表示 a 和 n 的值.由科学记数法的表示方法,表示出 a 和 n 的值,得到答案.

【详解】答案为 1.14×10^{12}

12. 某厂生产了 1000 只灯泡.为了解这 1000 只灯泡的使用寿命,从中随机抽取了 50 只灯泡进行检测,结果有 28 只灯泡的使用寿命超过了 2500 小时,那么估计这 1000 只灯泡中使用寿命超过 2500 小时的灯泡的数量为_____▲_____只.

【答案】 560

【分析】本题考查概率统计的基本知识点,需要熟练掌握

【详解】设 1000 只灯泡中使用寿命超过 2500 小时的灯泡的数量为 x 只,

由题意,可以列比例式

$$28:50 = x:1000$$

解得 $x=560$

所以答案为 560

13. 《孙子算经》记载了这样一个题目:今有木,不知长短.引绳度之,余绳四尺五寸;屈绳量之,不足一尺.木长几何?其大意是:用一根绳子去量一根长木,绳子还剩余 4.5 尺;将绳子对折再量长木,长木多出 1 尺.那么长木的长度为_____▲_____尺.

【答案】 6.5

【分析】 本题考查学生设未知数，建立等量关系，及解方程的能力

【详解】 设绳子的长度为 $2x$ ，则长木的长度分别为 $2x-4.5, x+1$ ，

$$\therefore 2x-4.5=x+1$$

$$\therefore x=5.5$$

$$x+1=6.5$$

即长木的长度为 6.5 尺。

14. 如图 2，街心花园有 A 、 B 、 C 三座小亭子， A 、 C 两亭被池塘隔开， A 、 B 、 C 三亭所在的点不共线.设 AB 、 BC 的中点分别为 M 、 N .如果 $MN=3$ 米，那么 $AC=$ ▲ 米.

【答案】 6

【分析】 本题考查中位线的性质知识点及应用

【详解】

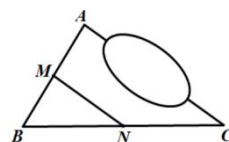


图 2

A, B, C 组成三角形，在 $\triangle ABC$ 中， MN 为中位线，

$$AC=2MN=6$$

所以答案为 6

15. 如图 3，正六边形 $ABCDEF$ ，连接 OE 、 OD ，如果 $\overrightarrow{OD}=\vec{a}$ ， $\overrightarrow{OE}=\vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{AB}=\underline{\hspace{1cm}\text{▲}\hspace{1cm}}$.

【答案】 $\vec{a}-\vec{b}$

【分析】

【详解】

$\because$ 正六边形 $ABCDEF$

$\therefore AB \parallel DE$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$$

$$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OD} = \vec{a} - \vec{b}$$

$\therefore$ 答案为 $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$

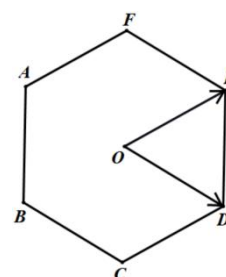


图 3

16. 为传承海派文化, 社区准备举办沪剧爱好者观摩演出活动. 把某场馆的一个正方形区域改造成一个由矩形和半圆形组成的活动场地 (如图 4), 矩形 $ABCD$ 是观众观演区, 阴影部分是舞台, CD 是半圆 O 的直径, 弦 EF 与 CD 平行. 已知 EF 长 8 米, 舞台区域最大深度为 2 米, 如果每平方米最多可以坐 3 名观众, 那么观演区可容纳 150 名观众.

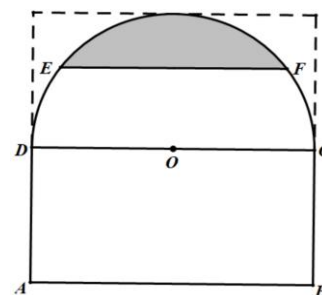


图 4

【答案】150

【分析】本题考查垂径定理及面积的计算方法, 数学知识的实际应用

【详解】联结 OE , 过 O 作 $OH \perp EF$ 于点 H , 设 $OE=r$,

由题意得 $OH=r-2$, $EH=4$,

在 $Rt\triangle OEH$ 中, 由勾股定理得 $OE^2=OH^2+EH^2$

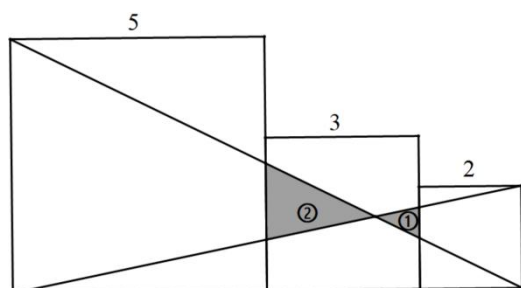
$$r^2 = (r-2)^2 + 4^2 \quad \therefore \text{得 } r=5$$

$$\therefore AB=CD=10 \quad AD=5$$

所以观看演出面积为矩形 $ABCD$ 的面积, 即为 $5 \times 10=50$ 平方米。所以可以容纳人数为 $50 \times 3=150$ 人。

17. 如图 5，边长分别为 5，3，2 的三个正方形拼接在一起，它们的一边在同一直线上，那

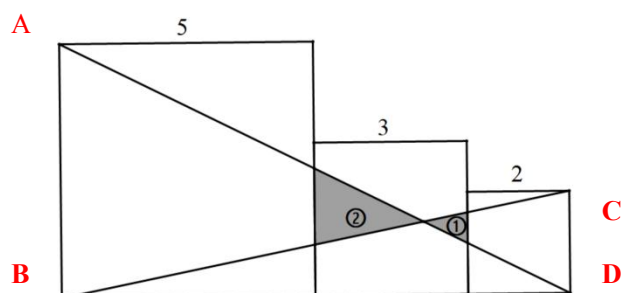
么图中阴影三角形①和②的面积之比 $\frac{S_1}{S_2}$ 的比值为_____.



【答案】 $\frac{4}{25}$

【分析】 通过 A 型和 X 型，求解得出 $\frac{S_1}{S_2}$ 的比值

【详解】



由图设 AD，BC 交于点 P，

$\because AB \parallel CD$ ，由比例关系，

经过计算得 $\triangle ①$ 的底边长为 $\frac{3}{5}$ ， $\triangle ②$ 的底边长为 $\frac{3}{2}$ ，由面积比等于相似比的平方得

$$\frac{S_{\triangle ①}}{S_{\triangle ②}} = \left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{2}} \right)^2 = \frac{4}{25}$$

18. 如图 6, 菱形 $ABCD$ 的边长为 5, $\cos B = \frac{4}{5}$, E 是边 CD 上一点 (不与点 C 、 D 重合),

把 $\triangle ADE$ 沿着直线 AE 翻折, 如果点 D 落在菱形一条边的延长线上, 那么 CE 的长为

_____.

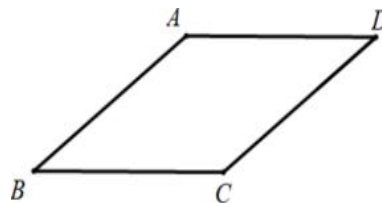


图 6

【答案】1或 $\frac{40}{13}$

【分析】本题考查翻折知识点及应用, 考查解三角形及角平分线定理在求线段长度中的应用。需要分类讨论

【详解】①当点 D 落在 BC 的延长线上时, 落点设为点 F , 线段 AF 交线段 DC 于点 G ,

$\therefore$ 由题意得, $AD=AF=AB=5$,

$\therefore \angle B = \angle AFB = \angle DAF = \angle D$

$\therefore GA=GD$

过 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H , 求得 $AH=3$, $BH=4$, $\therefore CH=1$, $CF=3$,

$\therefore BF \parallel AD$

$$\therefore \frac{CF}{AD} = \frac{CG}{DG} = \frac{3}{5}$$

$$DG = \frac{5}{8} \times CD = \frac{25}{8}$$

$$GA = \frac{25}{8}$$

$\therefore$ 翻折 $\angle DAE = \angle GAE$

$$\therefore \frac{AG}{AD} = \frac{EG}{DE} = \frac{5}{8}$$

$$\therefore ED = \frac{8}{13} \times GD = \frac{25}{13}$$

$$\therefore EC=DC-DE=5-\frac{25}{13}=\frac{40}{13}$$

②当点 D 落在 DC 的延长线上时,

落点设为点 F, 线段 AF 交线段 DC 于点 G,

$\because AD=AF \therefore E$ 为 DF 的中点

由等腰三角形三线合一, 得 $AE \perp DF$

$$\therefore ED=AD \times \cos \angle D=5 \times \frac{4}{5}=4$$

$$\therefore CE=DC-DE=5-4=1$$

综上, CE 的长度为 1 或 $\frac{40}{13}$

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. (本题满分 10 分) 计算: $8^{\frac{2}{3}} - (\sqrt{2} - 1)^{-1} - |\sqrt{8} - 3|$.

【答案】 $\sqrt{2}$

【分析】 本题考查实数的混合运算, 需要对分数指数幂, 分母有理化, 绝对值运算, 负整数次幂运算要熟练掌握, 运算基本功扎实, 这个题目容易答对。

【详解】

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 4 - (\sqrt{2} + 1) - (3 - 2\sqrt{2}) \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

20. (本题满分 10 分) 解方程: $\frac{3}{x+1} = \frac{1}{2x} + 1$.

【答案】 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$.

【分析】 本题考查分式方程的解法, 需要注意验根

【详解】

去分母, 方程两边同时乘以 $2x(x+1)$, 得

$$3 \cdot 2x = (x+1) + 2x(x+1)$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$(2x-1)(x-1) = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$$

经检验 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$ 都是原方程的根,

所以, 原方程的根是 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$.

21. (本题满分 10 分, 第(1)小题满分 5 分, 第(2)小题满分 5 分)

如图 7, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = x + 3$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B , 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像交于点 $C(2, m)$.

(1) 求反比例函数的解析式;

(2) 过点 C 作 x 轴的平行线 l , 如果点 D 在直线 l 上, 且 $CD=3$, 求 $\triangle ABD$ 的面积.

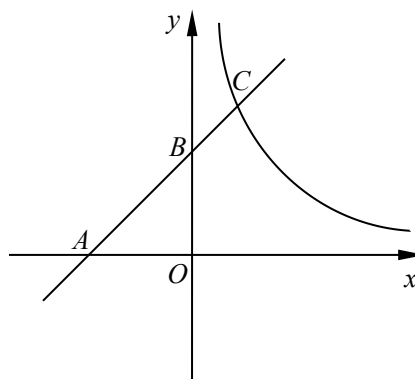


图 7

【答案】 (1) $y = \frac{10}{x}$. (2) $\frac{9}{2}$

【分析】

(1) 由直线解析式求 C 点坐标, 代入反比例函数, 求 k , 进而求解析式;

(2) 点 D 在 C 点左侧或者右侧, 都可以利用 $\triangle ABD$ 的面积 = $\triangle ACD$ 的面积 - $\triangle BCD$ 的面积, 求解即可。

【详解】

(1) 由直线 $y = x + 3$ 经过 $C(2, m)$, 可得 $m = 5$, 于是 $C(2, 5)$,

由点 C 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像上, 可得 $k = 10$,

所以, 反比例函数的解析式是 $y = \frac{10}{x}$.

(2) 点 D 在过点 C 且平行于 x 轴的直线 l 上, 则 $D(a, 5)$,

过点 A 作 $AE \perp l$, 垂足为点 E , 直线 l 与 y 轴交于点 F ,

点 D 在点 C 左侧或右侧总有

$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot (AE - BF)$$

由 $A(-3, 0)$, $B(0, 3)$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (5 - 2) = \frac{9}{2}$$

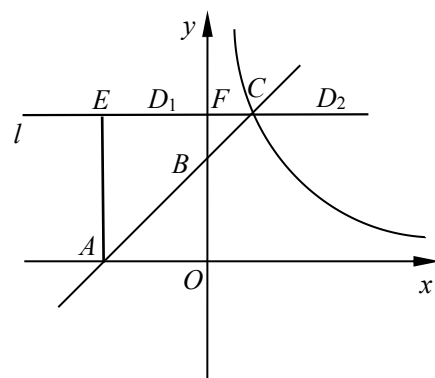


图 7

22. (本题满分 10 分)

小明家院内靠墙安装了一个遮阳篷 (如图 8), 图 9 是它的侧面示意图, 遮阳篷长 $AC = 6$ 米, 与水平面的夹角为 17.5° , 靠墙端 A 离地高度 $AB = 5$ 米, 已知该地区冬至正午太阳光照入射角 $\angle CDF = 36.9^\circ$, 夏至正午太阳光照入射角 $\angle CEF = 82.4^\circ$, 因此, 点 D 、 E 之间的区域是一年四季中阳光不一定照射到的区域, 求该区域深度 DE 的长. (结果精确到 0.1 米)

参考数据: $\sin 17.5^\circ \approx 0.3$, $\cos 17.5^\circ \approx 0.95$, $\tan 17.5^\circ \approx 0.32$;

$\sin 36.9^\circ \approx 0.6$, $\cos 36.9^\circ \approx 0.8$, $\tan 36.9^\circ \approx 0.75$;

$\sin 82.4^\circ \approx 0.99$, $\cos 82.4^\circ \approx 0.13$, $\tan 82.4^\circ \approx 7.5$.



图 8

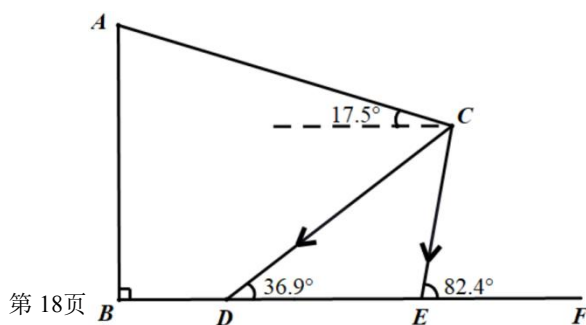


图 9

【答案】 DE 的长为 3.8 米.

【分析】本题考查解直角三角形的实际应用题。通过添加辅助线，构造直角三角形，利用给出的角度的三角比的值，进行求解得出线段长度。

【详解】

过点 C 作 $CG \perp AB$, 垂足为点 G ,

在 $Rt\triangle ACG$ 中, $\sin \angle ACG = \frac{AG}{AC}$,

$\because AC = 6$ 米, $\therefore AG = AC \cdot \sin \angle ACG \approx 6 \times 0.3 = 1.8$.

$\because AB = 5$ 米, $\therefore BG = 3.2$ 米,

$\because CG \parallel BF, AB \perp BF, CH \perp BF$,

$\therefore CH = BG = 3.2$ 米,

过点 C 作 $CH \perp BF$, 垂足为点 H ,

在 $Rt\triangle CDH$ 中, $DH = \frac{CH}{\tan \angle CDH}$,

$\therefore DH \approx \frac{3.2}{0.75} \approx 4.27$,

在 $Rt\triangle CEH$ 中, $EH = \frac{CH}{\tan \angle CEH}$

$\therefore EH \approx 0.43$

$\therefore DE = DH - EH = 4.27 - 0.43 \approx 3.8$ 米

答: 该区域深度 DE 的长为 3.8 米.

23. (本题满分 12 分, 第(1)小题满分 6 分, 第(2)小题满分 6 分)

如图 10, 在 $\odot O$ 中, 直径 AB 垂直于弦 CD , 垂足为点 E , 联结 AC 、 DO , 延长 DO 交 AC 于点 F .

(1) 求证: $AF^2 = OF \cdot DF$;

(2) 如果 $CD = 8$, $BE = 2$, 求 OF 的长.

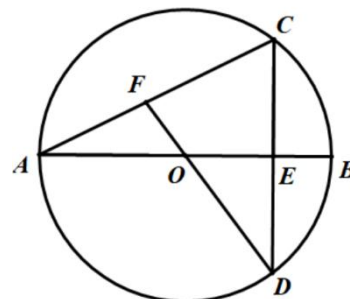


图 10

【答案】 (1) 见解析; (2) $OF = \frac{25}{11}$

【分析】 (1) 联结 AD , 通过角角相等, 证明 $\triangle AFO \sim \triangle AFD$, 列出比例式即可求证;

(2) 通过垂径定理和勾股定理, 及第一问相似三角形列比例式, 求出线段 OF 的长度.

【详解】 (1) 证明: 联结 AD ,

$\because$ 直径 AB 垂直于弦 CD ,

$$\therefore CE = DE = \frac{1}{2}CD,$$

$\because AB \perp CD$,

$\therefore AC = AD$,

$\because AB \perp CD$,

$\therefore \angle FAO = \angle DAO$,

$\because OA = OD$,

$\therefore \angle DAO = \angle ODA$,

$\therefore \angle FAO = \angle ODA$,

$\therefore \angle AFO = \angle AFD$,

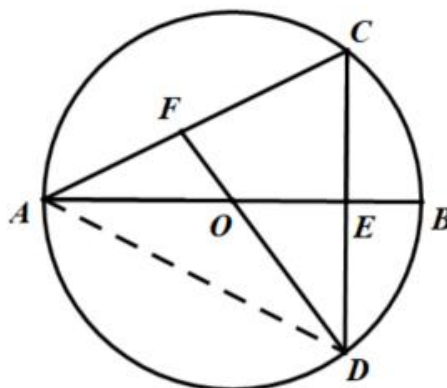
$\therefore \triangle AFO \sim \triangle AFD$,

$$\therefore \frac{AF}{OF} = \frac{DF}{AF},$$

$$\therefore AF^2 = OF \cdot DF.$$

(2) $\because CE = DE = \frac{1}{2}CD$, $CD = 8$,

$$\therefore CE = DE = 4,$$



在 $Rt\triangle DEO$ 中, $OE^2 + DE^2 = OD^2$,

由 $BE=2$, 设 $OD=OB=r$, 则 $OE=r-2$, $(r-2)^2 + 4^2 = r^2$, $r=5$,

$\therefore OE=3$, $AE=8$,

在 $Rt\triangle ADE$ 中, $AD = \sqrt{AE^2 + DE^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$,

$\because \triangle AFO \sim \triangle AFD$,

$$\therefore \frac{AF}{OF} = \frac{DF}{AF} = \frac{AO}{AD},$$

设 $AF=y$, $OF=x$,

$$\therefore \frac{y}{x} = \frac{x+5}{y} = \frac{5}{4\sqrt{5}},$$

解得 $x = \frac{25}{11}$,

$$\therefore OF = \frac{25}{11}$$

24. (本题满分 12 分, 第(1)小题满分 4 分,第(2)小题满分 4 分, 第(3)小题满分 4 分)

在平面直角坐标系 xOy 中 (如图 11), 已知开口向下的抛物线 $y = ax^2 - 2x + 4$ 经过点 $P(0, 4)$, 顶点为 A .

(1) 求直线 PA 的表达式;

(2) 如果将 $\triangle POA$ 绕点 O 逆时针旋转 90° , 点 A 落在抛物线上的点 Q 处, 求抛物线的表达式;

(3) 将 (2) 中得到的抛物线沿射线 PA 平移, 平移后抛物线的顶点为 B , 与 y 轴交于点 C . 如果 $PC = \sqrt{2}AB$, 求 $\tan \angle PBC$ 的值.

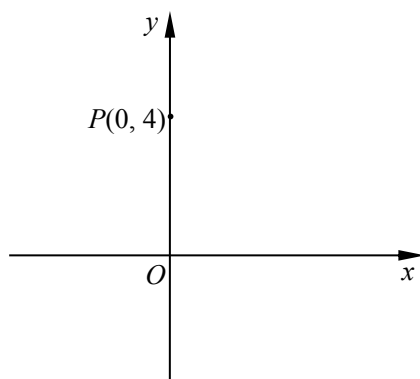


图 11

【答案】 (1) $y = -x + 4$; (2) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$; (3) $\frac{1}{3}$

【分析】 本题考查抛物线相关的旋转, 一线三等角, 线段长度, 角度的求解.

(1) 配方得到 A 点坐标, 代入求解;

(2) 作辅助线, 构造全等三角形, 求得 Q 点坐标, 代入抛物线解析式, 求值, 进而求得抛物线解析式;

(3) 写出平移后抛物线解析式, 利用直角三角形勾股定理, 求得线段长度, 进一步求得 $\angle PBC$ 的正切值.

【详解】

(1) 由 $y = ax^2 - 2x + 4 = a(x - \frac{1}{a})^2 + 4 - \frac{1}{a}$, 可得 $A(\frac{1}{a}, 4 - \frac{1}{a})$,

由题意设直线 PA 的表达式为 $y = kx + 4 (k \neq 0)$,

$A(\frac{1}{a}, 4 - \frac{1}{a})$ 代入得, $\frac{k}{a} + 4 = 4 - \frac{1}{a}$, $k = -1$,

所以, 直线 PA 的表达式为 $y = -x + 4$.

(2) 由抛物线开口向下且过点 $P(0, 4)$, $\triangle POA$ 绕点 O 逆时针旋转 90° , 点 A 的对应点 Q 如图所示, 分别过点 A, Q 作 $AM \perp y$ 轴, $QN \perp y$ 轴, 垂足分别为点 M, N ,

于是 $\triangle AOM \cong \triangle QON$, 则由 $A(\frac{1}{a}, 4 - \frac{1}{a})$ 得 $Q(\frac{1}{a} - 4, \frac{1}{a})$,

代入 $y = ax^2 - 2x + 4$ 得 $8a^2 + 2a - 1 = 0$,

$a = -\frac{1}{2}$, 或 $a = \frac{1}{4}$ (舍去),

所以, a 的值为 $-\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 抛物线表达式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$

(3) 由 (2) 得 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 4 = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 6$,

$A(-2, 6)$,

设平移后的抛物线表达式为 $y = -\frac{1}{2}(x-m)^2 + 4 - m$,

则 $B(m, 4-m)$, $C(0, -\frac{1}{2}m^2 - m + 4)$,

点 B 在点 A 的上方, 点 C 在点 P 的下方, 如图所示,

于是, $AB = \sqrt{(m+2)^2 + (m+2)^2} = \sqrt{2}|m+2|$,

$$PC = 4 - (-\frac{1}{2}m^2 - m + 4) = \frac{1}{2}m^2 + m,$$

由 $PC = \sqrt{2}AB$, 可得 $\frac{1}{2}m^2 + m = -2(m+2)$,

解得 $m = -4$ 或 $m = -2$ (舍去)

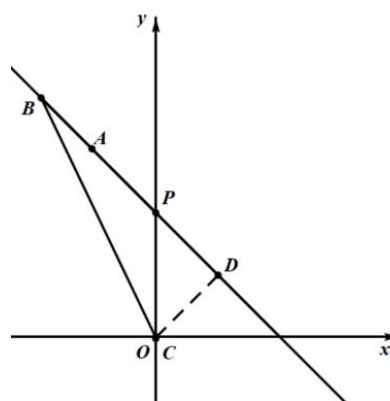
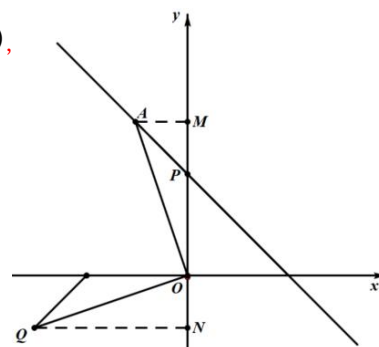
于是 $B(-4, 8)$, $C(0, 0)$

过点 C 作 $CD \perp PA$, 垂足为点 D ,

在 $Rt\triangle CDP$ 中, $\angle DPC = 45^\circ$, $PC = 4$, 可得 $CD = DP = 2\sqrt{2}$,

$BP = \sqrt{(0+4)^2 + (8-4)^2} = 4\sqrt{2}$, 于是 $BD = DP + BP = 6\sqrt{2}$,

所以, 在 $Rt\triangle CDB$ 中, $\tan \angle PBC = \frac{CD}{BD} = \frac{2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$



25. (本题满分 14 分, 第(1)小题①满分 4 分, 第(1)小题②满分 4 分, 第(2)小题满分 6 分)

已知 AB 是半圆 O 的直径, C 是半圆 O 上不与 A 、 B 重合的点, 将弧 AC 沿直线 AC 翻折, 翻折所得的弧交直径 AB 于点 D , E 是点 D 关于直线 AC 的对称点.

(1) 如图 12, 点 D 恰好落在点 O 处.

① 用尺规作图在图 12 中作出点 E (保留作图痕迹),

联结 AE 、 CE 、 CD , 求证: 四边形 $ADCE$ 是菱形;

② 联结 BE , 与 AC 、 CD 分别交于点 F 、 G , 求 $\frac{FG}{BE}$ 的值;

(2) 如果 $AB = 10$, $OD = 1$, 求折痕 AC 的长.

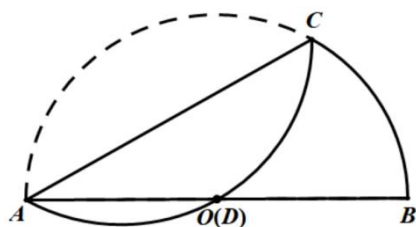
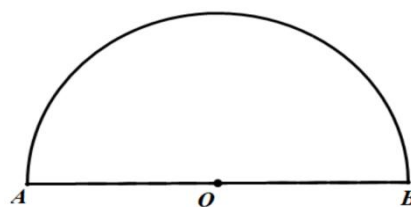


图 12



备用图

【答案】 (1) ①尺规作图略, 证明见解析;

② $\frac{FG}{BE} = \frac{1}{6}$

(2) $4\sqrt{5}$ 或 $\sqrt{70}$

【分析】 (1) ①考查尺规作图, O 、 E 关于直线 AC 对称;

②利用菱形的性质, 通过平行线, 得出比例线段, 求值即可;

(2) 依题意, 分两类进行讨论, 分当点 D 在点 O 左侧, 右侧进行, 分析图形, 得出边角关系, 构造直角三角形, 通过勾股定理等进行求解。

【详解】

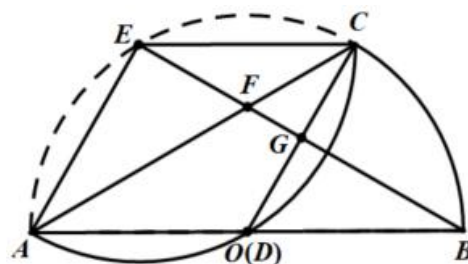
(1) ①尺规作图略

证明: $\because E$ 是点 D 关于直线 AC 的对称点,

$$\therefore AE = AD, CE = CD,$$

$$\because AD = CD, \therefore AE = AD = CE = CD,$$

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是菱形



②∵ 四边形 $ADCE$ 是菱形,

∴ $CD \parallel AE$,

$$\frac{BG}{GE} = \frac{BO}{AO} = 1$$

$$\therefore BG = GE$$

$$\therefore EC = OA, \quad OA = OB$$

$$\therefore \frac{EC}{OB} = \frac{CG}{GO} = 1$$

$$\therefore \frac{CG}{CO} = \frac{CG}{AE} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore OC \parallel AE$$

$$\therefore \frac{FG}{FE} = \frac{CG}{AE} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{FG}{GE} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore BG = GE$$

$$\therefore BE = 2GE$$

$$\therefore \frac{FG}{BE} = \frac{1}{6}$$

(2) ①当点 D 在点 O 右侧,

作点 D 关于直线 AC 的对称点 E , 联结 DE 、 AE ,

过点 O 作 $OG \perp AE$, 垂足为点 G , 过点 C 作 $CH \perp AB$, 垂足为点 H ,

$$\therefore \angle AGO = \angle OHC = 90^\circ,$$

$$\because AE = AD, \quad DE \perp AC, \therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\because AO = CO, \therefore \angle 3 = \angle 2,$$

$$\therefore \angle COH = \angle 2 + \angle 3 = 2\angle 2,$$

$$\therefore \angle OAG = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle 2$$

$$\therefore \angle COH = \angle OAG,$$

$$\because AO = CO, \therefore \triangle OAG \cong \triangle COH, \therefore AG = OH,$$

$$\because AB = 10, \quad OD = 1, \therefore AD = AE = 6,$$

$$\because OG \perp AE, \therefore AG = \frac{1}{2}AE = 3,$$

$$\therefore OH = 3, \quad AH = 8,$$

$$\text{在 } Rt\triangle COH \text{ 中, } CH = \sqrt{CO^2 - OH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$\text{在 } Rt\triangle ACH \text{ 中, } AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$$

②当点 D 在点 O 左侧, 经过计算, 同理可得 $AC = \sqrt{70}$

综上所述: 折痕 AC 的长为 $4\sqrt{5}$ 或者 $\sqrt{70}$.

