

上海市青浦区 2024-2025 学年九年级上学期期末数学试卷 (一模)

(时间 100 分钟, 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.

2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每小题 4 分, 满分 24 分) (每题只有一个正确选项, 在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂)

1. 如果 $x:y=2:3$, 那么 $(x+y):y$ 是 ()

A. 2:5

B. 5:2

C. 3:5

D. 5:3

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了比例的性质, 熟练掌握设 k 法是解题的关键. 设 $x=2k, y=3k$, 然后代入 $(x+y):y$ 化简即可.

【详解】解: $\because x:y=2:3$,

$\therefore$ 设 $x=2k, y=3k$,

$\therefore (x+y):y=(2k+3k):3k=5k:3k=5:3$.

故选 D.

2. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $BC=3$, $AB=5$, 那么下列结论正确的是 ()

A. $\sin A = \frac{3}{5}$

B. $\cos A = \frac{3}{5}$

C. $\tan A = \frac{3}{5}$

D. $\cot A = \frac{3}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查三角函数, 勾股定理的计算, 根据题意可求出 AC 的值, 再根据正余弦、正余切值的计算方法即可求解, 掌握三角函数值的计算方法是解题的关键.

【详解】解: 根据题意, $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$,

$\therefore$ A、 $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$, 正确, 符合题意;

B、 $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}$ ，该选项错误，不符合题意；

C、 $\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}$ ，该选项错误，不符合题意；

D、 $\cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{3}$ ，该选项错误，不符合题意；

故选：A.

3. 抛物线 $y = x^2 + 2x$ 的对称轴是 ()

A. 直线 $x = 1$

B. 直线 $x = -1$

C. 直线 $x = 2$

D. 直线 $x = -2$

【答案】B

【解析】

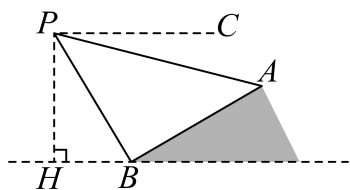
【分析】本题考查将二次函数的性质，解析式化为顶点式 $y = a(x-h)^2 + k$ ，顶点坐标是 (h, k) ，对称轴是直线 $x = h$ 。将解析式化为顶点式即可得解。

【详解】解：∵ $y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$ ，

∴ 抛物线 $y = x^2 + 2x$ 的对称轴是直线 $x = -1$ ，

故选：B.

4. 如图，点 P 是航拍飞机在某一高度时的位置， BH 是地平线， $PH \perp BH$ ， $PC \parallel BH$ ， AB 是某大型建筑物的斜面。从点 P 观测点 B 的俯角是 ()



A. $\angle HPB$

B. $\angle CPB$

C. $\angle APB$

D. $\angle PBA$

【答案】B

【解析】

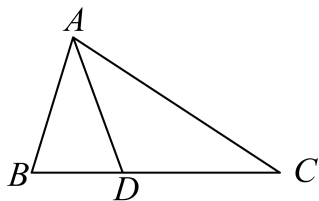
【分析】本题考查了解直角三角形的应用的仰角俯角问题，熟练掌握俯角的定义是解题的关键。根据俯角的定义即可得到结论。

【详解】∵ $PC \parallel BH$ ， BH 是地平线，

∴ 从点 P 观测点 B 的俯角是 $\angle CPB$ ，

故选：B.

5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC$, $\angle C = 36^\circ$, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $\frac{AB}{BC}$ 是 ()



A. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

B. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定与性质, 等腰三角形的判定与性质, 解题的关键掌握相似三角形的判定方法. $AC = BC, \angle C = 36^\circ$, 求出 $\angle B = \angle BAC = 72^\circ$, 根据 AD 平分 $\angle BAC$ 可得 $\angle BAD = \angle CAD = 36^\circ$, 进而证得 $\triangle ABD \sim \triangle CBA$, 根据相似三角形的性质证得结论.

【详解】 解: $\because AC = BC, \angle C = 36^\circ$,

$$\therefore \angle B = \angle BAC = 72^\circ,$$

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle C = \angle CAD = 36^\circ,$$

$$\therefore AD = CD, \angle ADB = 72^\circ,$$

$$\therefore AB = AD,$$

$$\therefore AB = AD = CD,$$

$$\because \angle ABD = \angle CBA,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AC},$$

设 $BC = AC = a, BD = x$, 则 $AD = CD = AB = a - x$,

$$\therefore \frac{x}{a-x} = \frac{a-x}{a},$$

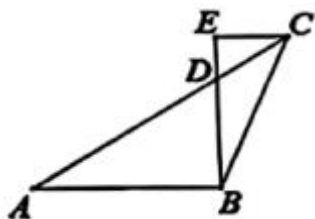
$$\text{解得 } x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}a \text{ (不符合题意, 舍去) 或 } x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a,$$

$$\therefore AB = a - x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a,$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

故选: C.

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AC 上, 且 $\angle CBD = \angle A$, 过点 C 的射线与 BD 的延长线相交于点 E , 如果 $CE \parallel AB$, 那么下列结论错误的是 ()



A. $\frac{ED}{CE} = \frac{CE}{EB}$

B. $\frac{CD}{CB} = \frac{CB}{CA}$

C. $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{BC}$

D. $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$

【答案】D

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定与性质, 证明 $\triangle CDE \sim \triangle BCE$, $\triangle BCD \sim \triangle ACB$ 是解题的关键. 根据题意可证得 $\triangle CDE \sim \triangle BCE$, $\triangle BCD \sim \triangle ACB$, 然后利用相似三角形的性质逐项分析判断即可.

【详解】 解: $\because CE \parallel AB$,

$$\therefore \angle ECD = \angle A,$$

$$\because \angle CBD = \angle A,$$

$$\therefore \angle ECD = \angle CBD,$$

$$\text{又} \because \angle E = \angle E,$$

$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \frac{ED}{CE} = \frac{CE}{BE}, \text{ 故结论 A 正确, 该选项不符合题意;}$$

$$\because \angle CBD = \angle A, \angle BCD = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{CD}{CB} = \frac{CB}{CA}, \text{ 故结论 B 正确, 该选项不符合题意;}$$

$$\therefore \triangle BCD \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{CB}{CA},$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{BC}, \text{ 故结论 } C \text{ 正确, 该选项不符合题意;}$$

$\therefore \triangle ABD$ 与 $\triangle ACB$ 不能证明相似,

$$\therefore \frac{AD}{AB} \neq \frac{AB}{AC}, \text{ 故结论 } D \text{ 错误, 该选项符合题意;}$$

故选: D.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 线段 $a = 2$ 厘米, $c = 3$ 厘米, 线段 a 和 c 的比例中项 $b =$ _____ 厘米.

【答案】 $\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查了成比例线段. 根据比例中项的定义得到 $a:b=b:c$, 然后利用比例性质计算即可.

【详解】 $\therefore$ 线段 a 和 c 的比例中项为 b ,

$$\therefore a:b=b:c,$$

$$\text{即 } 2:b=b:3,$$

$$\therefore b = \sqrt{6}(\text{cm}),$$

故答案为 $\sqrt{6}$.

8. 如果两个相似三角形面积的比为 $1:3$, 那么它们周长的比为_____.

【答案】 $1:\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的性质, 根据相似三角形的面积比等于相似比的平方, 周长比等于相似比, 进行求解即可.

【详解】 解: 由题意, 相似三角形的相似比为: $1:\sqrt{3}$,

$$\therefore \text{它们周长的比为 } 1:\sqrt{3};$$

故答案为: $1:\sqrt{3}$.

9. 二次函数 $y = x^2 + 3x - 1$ 的图像与 y 轴的交点坐标是_____.

【答案】 $(0, -1)$

【解析】

【分析】 本题考查求二次函数与坐标轴的交点问题，令 $x=0$ ，进行求解即可.

【详解】 解： $\because y = x^2 + 3x - 1$,

$\therefore$ 当 $x=0$ 时， $y=-1$,

$\therefore$ 二次函数 $y = x^2 + 3x - 1$ 的图像与 y 轴的交点坐标是 $(0, -1)$;

故答案为： $(0, -1)$.

10. 二次函数 $y = x^2 - 1$ 的图象在其对称轴右侧的部分是_____的（填“上升”或“下降”）.

【答案】 上升

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的性质，根据二次函数的性质即可求解，掌握二次函数的性质是解题的关键.

【详解】 解： $\because a=1>0$,

$\therefore$ 函数图象开口向上，对称轴为 y 轴，

$\therefore$ 在对称轴右侧 y 随 x 的增大而增大，也就是右侧部分是上升的，

故答案为： 上升.

11. 某公司 10 月份产值是 120 万元，设第四季度每个月产值的增长率相同，均为 $x(x>0)$ ，如果 12 月份的产值为 y 万元，那么 y 关于 x 的函数解析式为_____.

【答案】 $y = 120(1+x)^2$

【解析】

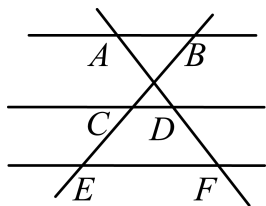
【分析】 本题考查根据实际问题列出二次函数关系式，解答本题的关键是明确题意，列出相应的函数关系式，这是一道典型的增长率问题. 根据某公司 10 月份的产值是 120 万元，如果该公司第四季度每个月产值的增长率相同，都为 $x(x>0)$ ，12 月份的产值为 y 万元，可以得到 y 与 x 的函数关系式，从而可以解答本题.

【详解】 解： 由题意可得，

$$y = 120(1+x)^2,$$

故答案为： $y = 120(1+x)^2$.

12. 如图， $AB \parallel CD \parallel EF$ ，如果 $AD:DF = 3:2$ ，那么 $BE:CE =$ _____.



【答案】 5:2

【解析】

【分析】 本题考查平行线分线段成比例定理，解题的关键是掌握平行线分线段成比例定理，利用平行线分线段成比例定理求解.

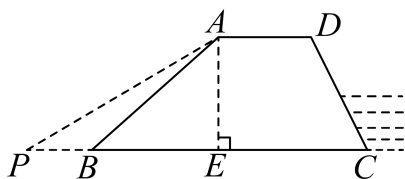
【详解】 解： $\because AB \parallel CD \parallel EF$,

$$\therefore \frac{BC}{CE} = \frac{AD}{DF} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{BE}{CE} = \frac{5}{2}.$$

故答案为： 5:2.

13. 如图，梯形 $ABCD$ 是某水库大坝的横截面. 已知坝高 $AE = 8\text{m}$ ，如果将坡度为 $1:\sqrt{2}$ 的斜坡 AB 改为坡度为 $1:2$ 的斜坡 AP ，那么大坝底部应加宽_____m. (结果保留根号)



【答案】 $16 - 8\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形的应用-坡度坡角问题，熟练掌握三角函数的定义是解题的关键. 根据垂直的定义得到 $\angle AEB = 90^\circ$ ，根据三角函数的定义得到 $BE = 8\sqrt{2}$, $PE = 16$ ，于是得到

$$PB = PE - BE = (16 - 8\sqrt{2})\text{m}.$$

【详解】 解： $\because AE \perp BC$,

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\because AE = 8\text{m},$$

$$\therefore \tan \angle ABE = \frac{AE}{BE} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore BE = \frac{AE}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{8}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 8\sqrt{2},$$

$$\because \tan P = \frac{AE}{PE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{8}{PE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore PE = 16\text{m},$$

$$\therefore PB = PE - BE = (16 - 8\sqrt{2})\text{m},$$

$$\therefore \text{大坝底部应加宽 } (16 - 8\sqrt{2})\text{m}.$$

故答案为: $16 - 8\sqrt{2}$

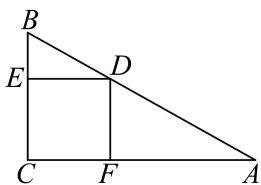
14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 正方形 $CEDF$ 的边 CE 在边 BC 上, 顶点 D 、 F 分别在边 AB 、 AC 上. 如果 $BC = 3$, $AC = 6$, 那么正方形 $CEDF$ 的边长是_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】此题重点考查正方形的性质、相似三角形的判定与性质等知识, 由 $\angle C = 90^\circ$, 四边形 $CEDF$ 是正方形, 顶点 F 在 AC 上, 得 $DF = CF$, $\angle AFD = \angle C = 90^\circ$, 可证明 $\triangle ADF \sim \triangle ABC$, 得 $\frac{DF}{BC} = \frac{AF}{AC}$, 而 $BC = 3$, $AC = 6$, 所以 $\frac{DF}{AF} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$, 则 $AF = 2DF = 2CF$, 所以 $2CF + CF = 6$, 求得 $CF = 2$, 则正方形 $CEDF$ 的边长是 2, 于是得到问题的答案.

【详解】解: 如图,



$\because \angle C = 90^\circ$, 四边形 $CEDF$ 是正方形, 顶点 F 在 AC 上,

$\therefore DF = CF$, $\angle AFD = \angle CFD = \angle C = 90^\circ$,

$\therefore \angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle ADF \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{DF}{BC} = \frac{AF}{AC},$$

$\because BC = 3$, $AC = 6$,

$$\therefore \frac{DF}{AF} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AF = 2DF = 2CF,$$

$$\therefore AF + CF = AC,$$

$$\therefore 2CF + CF = 6,$$

解得 $CF = 2$,

$\therefore$ 正方形 $CEDF$ 的边长是 2,

故答案为: 2.

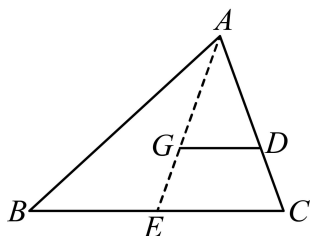
15. 已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 点 D 在边 AC 上, 如果 $GD \parallel BC$, 那么 $\frac{GD}{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】此题重点考查三角形的重心的概念、相似三角形的判定与性质等知识, 正确地作出所需要的辅助线是解题的关键. 连接并延长 AG 交 BC 于点 E , 由点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 可得 $\frac{AG}{AE} = \frac{2}{3}$, $BC = 2EC$, 再由 $GD \parallel BC$, 可得 $\triangle AGD \sim \triangle AEC$, 最后由相似三角形性质可得答案.

【详解】解: 如图, 连接并延长 AG 交 BC 于点 E ,



$\therefore$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore \frac{AG}{AE} = \frac{2}{3}, \quad BC = 2EC,$$

$\because GD \parallel BC,$

$$\therefore \triangle AGD \sim \triangle AEC,$$

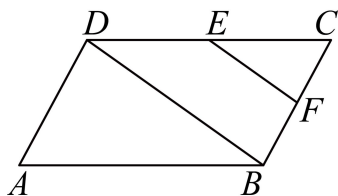
$$\therefore \frac{GD}{EC} = \frac{AG}{AE} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{GD}{BC} = \frac{GD}{2EC} = \frac{1}{3},$$

故答案为: $\frac{1}{3}$

16. 如图, 点 E 、 F 分别是平行四边形 $ABCD$ 的边 DC 、 BC 的中点, 连接 DB , 如果 $\overrightarrow{EF} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$,

那么向量 $\overrightarrow{AB}$ 关于 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的分解式为_____.



【答案】 $2\vec{a} + \vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查向量的线性计算，根据题意，易得 $BD = 2EF, BD \parallel EF$ ，进而得到 $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{EF} = 2\vec{a}$ ，平行四边形的性质，得到 $AD \parallel BC, AD = BC$ ，进而得到 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，再利用三角形法则，求出 $\overrightarrow{AB}$ 即可。

【详解】 解： $\because$ 平行四边形 $ABCD$ ，

$\therefore AD \parallel BC, AD = BC$ ，

$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，

$\because$ 点 E, F 分别是平行四边形 $ABCD$ 的边 DC, BC 的中点，

$\therefore BD = 2EF, BD \parallel EF$ ，

$\therefore \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{EF} = 2\vec{a}$ ，

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \vec{b} + 2\vec{a}$ ；

故答案为： $2\vec{a} + \vec{b}$ 。

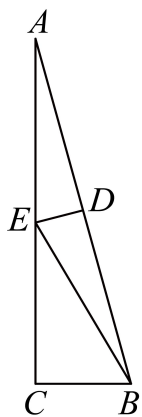
17. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，点 D, E 分别在边 AB, AC 上，且 DE 垂直平分 AB 。联结 BE ，如果 $\tan \angle A = \frac{1}{3}$ ，那么 $\cos \angle CBE =$ _____。

【答案】 $\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解直角三角形及线段垂直平分线的性质，熟知线段垂直平分线的性质及正切和余弦的定义是解题的关键。根据题意画出示意图，再结合线段垂直平分线的性质及余弦和正切的定义即可解决问题。

【详解】 解： 如图所示，



$\because DE$ 垂直平分 AB ,

$$\therefore AE = BE.$$

$$\because \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{3},$$

设 $BC = a$, $AC = 3a$,

$$\therefore CE = 3a - AE = 3a - BE.$$

在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中, $CE^2 + BC^2 = BE^2$,

$$\therefore (3a - BE)^2 + a^2 = BE^2,$$

$$\therefore BE = \frac{5}{3}a.$$

在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中,

$$\cos \angle CBE = \frac{BC}{BE} = \frac{a}{\frac{5}{3}a} = \frac{3}{5}.$$

故答案为: $\frac{3}{5}$.

18. 梯形 $ABCD$ 中, 已知 $AD \parallel BC$, $AB = CD$, $AD < BC$, $AD : DC = 2 : 3$. 将梯形沿过点 D 的直线折叠, 点 C 落在 AB 上, 记作点 E , 折痕与底边 BC 的交点记作点 F . 如果 $DF \parallel AB$, 那么 $AE : EB = \underline{\hspace{2cm}}$.

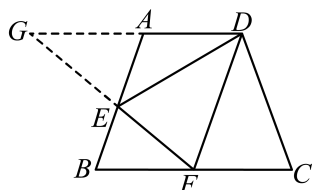
【答案】 5:4

【解析】

【分析】 延长 FE , DA 交于 G , 设 $AD = 2m$, 则 $CD = AB = 3m$, 由 $AD \parallel BC$, $DF \parallel AB$, 知四边形 $ABFD$ 是平行四边形, 有 $DF = AB = 3m$, $BF = AD = 2m$, $\angle B = \angle ADF$, 根据将梯形沿过点 D 的直线折叠, 点 C 落在 AB 上, 记作点 E , 可得 $\angle CFD = \angle EFD$, $EF = CF$, $DE = CD = 3m$, 故 $\angle DEF = \angle EFD$, 求出 $EF = BF = 2m$, 证明 $\triangle EFD \sim \triangle DFG$, 可得 $\frac{2m}{3m} = \frac{3m}{GF}$, $GF = 4.5m$, 从而 $GE = GF - EF = 4.5m - 2m = 2.5m$,

即可得 $\frac{AE}{BE} = \frac{GE}{EF} = \frac{2.5m}{2m} = \frac{5}{4}$.

【详解】解：延长 FE ， DA 交于 G ，如图：



设 $AD = 2m$ ，则 $CD = AB = 3m$ ，

$\therefore AD \parallel BC$ ， $DF \parallel AB$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABFD$ 是平行四边形，

$\therefore DF = AB = 3m$ ， $BF = AD = 2m$ ， $\angle B = \angle ADF$ ，

$\therefore$ 将梯形沿过点 D 的直线折叠，点 C 落在 AB 上，记作点 E ，

$\therefore \angle CFD = \angle EFD$ ， $EF = CF$ ， $DE = CD = 3m$ ，

$\therefore DE = DF = 3m$ ，

$\therefore \angle DEF = \angle EFD$ ，

$\therefore DF \parallel AB$ ，

$\therefore \angle CFD = \angle B$ ， $\angle EFD = \angle BEF$ ，

$\therefore \angle B = \angle BEF$ ，

$\therefore EF = BF = 2m$ ，

$\therefore \angle B = \angle CFD = \angle EFD = \angle DEF$ ， $\angle B = \angle ADF$ ，

$\therefore \angle ADF = \angle DEF$ ，

$\therefore \angle EFD = \angle DFG$ ，

$\therefore \triangle EFD \sim \triangle DFG$ ，

$$\therefore \frac{EF}{DF} = \frac{DF}{GF}，\text{ 即 } \frac{2m}{3m} = \frac{3m}{GF}，$$

$\therefore GF = 4.5m$ ，

$\therefore GE = GF - EF = 4.5m - 2m = 2.5m$ ，

$\therefore GA \parallel BF$ ，

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{GE}{EF} = \frac{2.5m}{2m} = \frac{5}{4}；$$

$\therefore AE : EB = 5 : 4$ 。

故答案为：5:4。

【点睛】 本题考查梯形中的翻折问题，涉及相似三角形的判定与性质，平行四边形判定与性质及等腰三角形的判定和性质，解题的关键是作辅助线，构造相似三角形解决问题.

三、(本大题共 7 题，满分 78 分)

19. 计算: $2(1 - \cos 30^\circ) + \frac{2 \sin 60^\circ}{2 \tan 45^\circ - \cot 30^\circ}.$

【答案】 $5 + \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了特殊角的三角函数值的混合运算，熟练掌握特殊角的三角函数值是解题的关键. 根据特殊角的三角函数值进行计算即可.

【详解】 解: $2(1 - \cos 30^\circ) + \frac{2 \sin 60^\circ}{2 \tan 45^\circ - \cot 30^\circ}$

$$= 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \times 1 - \sqrt{3}}$$

$$= 2 - \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

$$= 2 - \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}$$

$$= 2 - \sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3} + 3}{4 - 3}$$

$$= 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3$$

$$= 5 + \sqrt{3}.$$

20. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 上部分点的横坐标 x , 纵坐标 y 的对应值如下表.

x		0	1	2	3	4	
y		3	0	-1	0	3	

(1) 写出该抛物线的开口方向、对称轴及顶点的坐标;

(2) 设该抛物线与 x 轴相交于点 A (点 A 在对称轴的右侧), 与 y 轴相交于点 B , 顶点为 C , 求证: ABC 是直角三角形.

【答案】(1) 抛物线的开口方向向上, 对称轴为直线 $x=2$, 顶点坐标为 $(2, -1)$

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】本题考查二次函数的性质、两点距离公式、勾股定理逆定理等知识点, 掌握二次函数的性质是解题的关键.

(1) 由表格找出 y 值相等的两个点, 再根据对称关系求出对称轴和顶点坐标, 进而在观察开口方向;

(2) 利用两点距离公式求出 AB 、 AC 、 BC 的长度, 再根据勾股定理逆定理证明即可.

【小问 1 详解】

解: 由表格可知, 抛物线经过点 $(1, 0)$, $(3, 0)$,

$$\therefore \text{对称轴为 } x = \frac{1+3}{2} = 2,$$

根据表格可知, 顶点坐标为 $(2, -1)$,

$\therefore$ 顶点纵坐标比两侧数值小,

$\therefore$ 开口向上,

$\therefore$ 抛物线的开口方向向上, 对称轴为直线 $x=2$, 顶点坐标为 $(2, -1)$;

【小问 2 详解】

证明: $\because$ 抛物线与 x 轴相交于点 A (点 A 在对称轴的右侧), 与 y 轴相交于点 B , 顶点为 C ,

$$\therefore A(3, 0), B(0, 3), C(2, -1),$$

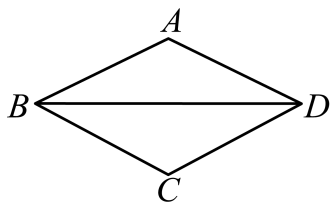
$$\therefore AB^2 = (3-0)^2 + (0-3)^2 = 18, AC^2 = (3-2)^2 + [0-(-1)]^2 = 2, BC^2 = (0-2)^2 + [3-(-1)]^2 = 20,$$

$$\therefore AB^2 + AC^2 = 18 + 2 = 20 = BC^2,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ,$$

即 ABC 为直角三角形.

21. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB = \sqrt{5}$, $\tan \angle CBD = \frac{1}{2}$.



(1) 求对角线 BD 的长;

(2) 求 $\sin \angle ABC$ 的值.

【答案】(1) $BD = 4$

$$(2) \sin \angle ABC = \frac{4}{5}$$

【解析】

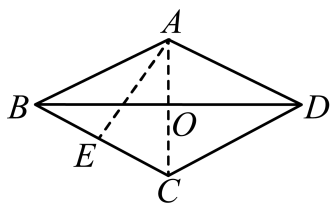
【分析】本题主要考查了菱形的性质，解直角三角形，灵活运用相关知识是解决问题的关键.

(1) 连接 AC ，交 BD 于 O ，在 $\text{Rt}\triangle CBO$ 中，解直角三角形求出 BO 即可；

(2) 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于 E ，根据菱形的面积公式求出 AE ，根据三角函数的定义即可求出答案.

【小问 1 详解】

解：连接 AC ，交 BD 于 O ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AC \perp BD, \quad BO = DO, \quad BC = AB = \sqrt{5},$$

在 $\text{Rt}\triangle CBO$ 中，

$$\because \tan \angle CBD = \frac{CO}{BO} = \frac{1}{2}, \quad BO^2 + CO^2 = BC^2,$$

$$\therefore BO = 2CO,$$

$$\therefore (2CO)^2 + CO^2 = (\sqrt{5})^2,$$

$$\therefore CO = 1,$$

$$\therefore BO = 2,$$

$$\therefore BD = 4;$$

【小问 2 详解】

解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形， $BD = 4$ ， $AC = 2CO = 2$ ，

$$\therefore \text{菱形 } ABCD \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4,$$

过点 A 作 $AE \perp BC$ 于 E ，

$$\text{则 } AE \cdot BC = 4,$$

$$\therefore AE = \frac{4}{\sqrt{5}},$$

$$\therefore \sin \angle ABC = \frac{AE}{AB} = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}.$$

22. 图 1 是某商场地下车库的出入口，车辆出入时，通常情况下只需升起“出口”或“入口”的道闸。特殊情况，两个道闸也可以同时升起。图 2 是其示意图，道闸升起过程中对边始终保持平行（如图中升起的道闸 EPQ_1R_1 ），升起的最高点不超过顶部 CD 。矩形门的高 $AD = 3.6$ 米，宽 $AB = 6.6$ 米。矩形闸机的高 $AH = BW = 0.3$ 米，矩形道闸的宽 $FG = EP = 1$ 米，道闸底部距地面 AB 的高度 $FH = EW = 0.2$ 米。顶点 G, M, Q, P 在同一条直线上，边 $MG = PQ$ ，边 MN 与 QR 之间的缝隙可以忽略不计。



图 1

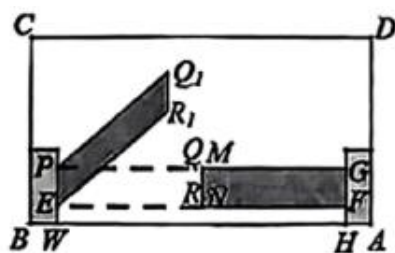


图 2

- (1) 求道闸升起的最大角的正切值；
- (2) 一辆高为 1.8 米、宽为 1.9 米的小货车想进入这个地下车库，是否需要同时升起两个道闸？请说明理由。

【答案】 (1) $\frac{4}{3}$

(2) 需要同时升起两个道闸，理由见解析

【解析】

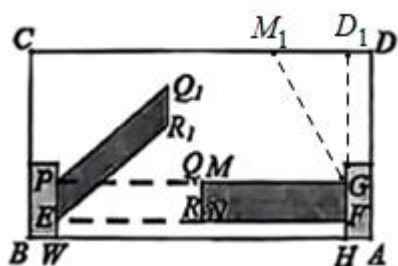
【分析】 本题考查解直角三角形的实际应用：

(1) 设道闸 $FGMN$ 升起的最高点为点 M_1 ，当点 M_1 在线段 CD 上时，道闸升起的角 $\angle MGM_1$ 最大。延长 FG 交 CD 于点 D_1 ，在 $Rt\triangle M_1GD_1$ 中，勾股定理求出 M_1D_1 ，正切的定义求出 $\tan \angle GM_1D_1 = \frac{GD_1}{M_1D_1}$ ，平行线的性质，得到 $\angle MGM_1 = \angle NFN_1 = \angle GM_1D_1$ ，即可得出结果；

(2) 设只升起一个道闸 $FGMN$ ，当最高点 M_1 在线段 CD 上时，在线段 FN 上取车宽 $YN = 1.9$ （米），过点 Y 作 $XZ \perp AB$ ，交 FN_1 于 X ，垂足为 Z ，交 NF 于点 Y ，在 $Rt\triangle XYF$ 中，求出 XY 的值，进而求出 XZ 的值，与车高进行比较即可得出结论。

【小问 1 详解】

解: 设道闸 $FGMN$ 升起的最高点为点 M_1 , 当点 M_1 在线段 CD 上时, 道闸升起的角 $\angle MGM_1$ 最大. 延长 FG 交 CD 于点 D_1 . 根据题意, 可知:



$$GM_1 = GM = \frac{1}{2}(AB - 2AH) = \frac{1}{2}(6.6 - 2 \times 0.3) = 3 \text{ (米)}.$$

$$GD_1 = D_1H - GH = 3.6 - 1.2 = 2.4 \text{ (米)}.$$

在 $\text{Rt}\triangle M_1GD_1$ 中,

$$\therefore M_1D_1 = \sqrt{GM_1^2 - GD_1^2} = \sqrt{3^2 - 2.4^2} = 1.8 \text{ (米)},$$

$$\therefore \tan \angle GM_1D_1 = \frac{GD_1}{M_1D_1} = \frac{2.4}{1.8} = \frac{4}{3}.$$

$$\therefore MG \parallel FN \parallel CD,$$

$$\therefore \angle MGM_1 = \angle NFN_1 = \angle GM_1D_1.$$

$$\therefore \tan \angle MGM_1 = \tan \angle NFN_1 = \tan \angle GM_1D_1 = \frac{4}{3}.$$

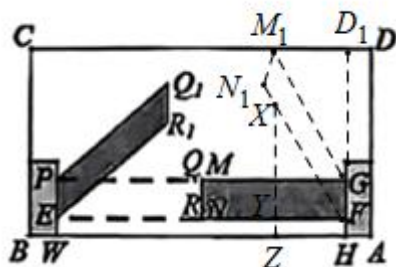
即道闸升起最大角的正切值为 $\frac{4}{3}$.

【小问 2 详解】

设只升起一个道闸 $FGMN$, 当最高点 M_1 在线段 CD 上时,

在线段 FN 上取车宽 $YN = 1.9$ (米), 过点 Y 作 $XZ \perp AB$, 交 FN_1 于 X , 垂足为 Z , 交 NF 于点 Y . 则

$$YZ = FH = 0.2 \text{ (米)}, \quad YF = FN - YN = 3 - 1.9 = 1.1 \text{ (米)}.$$



$$\therefore GM_1 \parallel FN_1, GM \parallel FN,$$

$$\therefore \angle N_1FN = \angle M_1GM,$$

在 $\text{Rt}\triangle XYF$ 中,

$$\therefore XY = \tan \angle NFN_1 \cdot YF = \tan \angle M_1GM \cdot YF = \frac{22}{15} \text{ (米)},$$

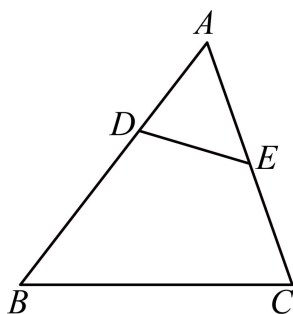
$$\therefore XZ = XY + YZ = 0.2 + \frac{22}{15} = \frac{25}{15} \text{ (米)}.$$

$$\therefore \text{车高 } 1.8 \text{ 米} = \frac{27}{15} \text{ 米} > \frac{25}{15} \text{ 米},$$

$\therefore$ 只起一个道闸, 小轿车不能通过.

$\therefore$ 需要同时升起两个道闸.

23. 已知: 如图, 点 D 、 E 分别在 $\triangle ABC$ 的 AB 、 AC 边上, $AE = EC$, $AE^2 = \frac{1}{2}AD \cdot AB$, 联结 DE .



(1) 求证: $\triangle ADE \sim \triangle ACB$;

(2) 取 AD 的中点 F , 联结 EF 、 BE , 求证: $\angle DEF = \angle CBE$.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定和性质, 熟练掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.

(1) 先证明 $AE \cdot AC = AD \cdot AB$, 转化为比例式为 $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$, 再由 $\angle DAE = \angle CAB$ 可得结论;

(2) 由点 F 是线段 AD 的中点, 可得 $AD = 2DF$, 再由 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ 可得 $\frac{DE}{CB} = \frac{AD}{AC}$, $\angle FDE = \angle ECB$, 即 $\frac{DE}{CB} = \frac{2DF}{2EC} = \frac{DF}{EC}$, 可证明 $\triangle DEF \sim \triangle CBE$, 最后由相似三角形的性质可得答案.

【小问 1 详解】

证明: $\because AE = EC$,

$$\therefore AC = 2AE,$$

$$\because AE^2 = \frac{1}{2} AD \cdot AB,$$

$$\therefore 2AE^2 = AD \cdot AB,$$

$$\therefore AE \cdot AC = AD \cdot AB,$$

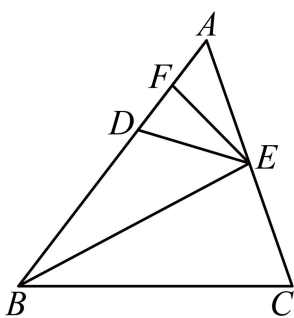
$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC},$$

$$\because \angle DAE = \angle CAB,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB;$$

【小问 2 详解】

证明：如图，



$\because$ 点 F 是线段 AD 的中点，

$$\therefore AD = 2DF,$$

$$\because \triangle ADE \sim \triangle ACB,$$

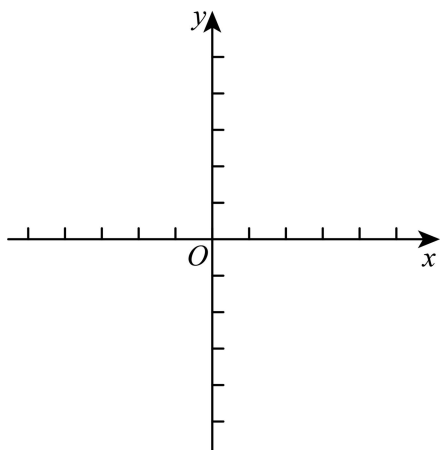
$$\therefore \frac{DE}{CB} = \frac{AD}{AC}, \angle FDE = \angle ECB,$$

$$\therefore \frac{DE}{CB} = \frac{2DF}{2EC} = \frac{DF}{EC},$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle CBE,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle CBE$$

24. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2$ ($a < 0$) 经过直线 $y = -x$ 上的点 A ，已知 $OA = 2\sqrt{2}$ 。



(1) 求该抛物线的表达式;

(2) 将抛物线 $y = ax^2$ ($a < 0$) 先向右平移 1 个单位, 再向上平移 k ($k > 0$) 个单位后, 所得新抛物线与 y 轴相交于点 C , 如果 $\tan \angle OCA = \frac{4}{9}$.

①求 k 的值;

②设新抛物线的顶点为点 D , 新抛物线上的点 B 是点 A 的对应点. 联结 OD 、 CD , 在新抛物线的对称轴上存在点 P , 使得 $\angle OPB = \angle ODC$, 求点 P 的坐标.

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}x^2$

(2) ① $k = 3$; ② $(1, 2 + \sqrt{5})$

【解析】

【分析】 (1) 先求出点 $A(2, -2)$, 再将点 $A(2, -2)$ 代入 $y = ax^2$ ($a < 0$), 得 $-2 = 4a$, 解得 $a = -\frac{1}{2}$, 可得答案;

(2) ①先求出新抛物线表达式为 $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + k$, 过点 A 作 $AH \perp y$ 轴, 垂足为 H , 得出 $\tan \angle OCA = \frac{AH}{CH} = \frac{4}{9}$, 可求得 $CH = \frac{9}{2}$, $OC = \frac{5}{2}$, 从而得出 $C\left(0, \frac{5}{2}\right)$, 再将点 $C\left(0, \frac{5}{2}\right)$ 代入 $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + k$, 即可求解;

②分两种情况: I. 当点 P 在线段 DE 的延长线上时, II. 当点 P 在射线 DE 上时, 分别进行求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y = ax^2$ ($a < 0$) 经过直线 $y = -x$ 上的点 A ,

$\therefore$ 点 A 在第四象限,

设点 $A(x, -x)$, 由 $OA = 2\sqrt{2}$, 得点 $A(2, -2)$,

将点 $A(2, -2)$ 代入 $y = ax^2 (a < 0)$, 得 $-2 = 4a$, 解得 $a = -\frac{1}{2}$,

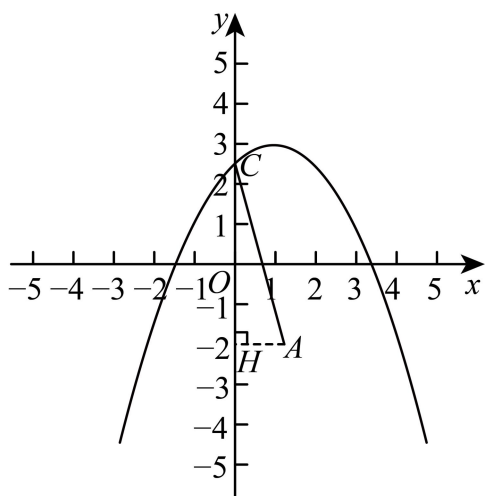
得该抛物线的表达式为 $y = -\frac{1}{2}x^2$;

【小问 2 详解】

解: ① $\because$ 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 先向右平移 1 个单位, 再向上平移 $k (k > 0)$ 个单位后, 所得新抛物线,

$\therefore$ 新抛物线表达式为 $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + k$,

如图, 过点 A 作 $AH \perp y$ 轴, 垂足为 H,



在 $\text{Rt}\triangle ACH$ 中, $\therefore \tan \angle OCA = \frac{AH}{CH} = \frac{4}{9}$,

$$\therefore CH = \frac{9}{2},$$

$$\therefore OC = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \text{点 } C\left(0, \frac{5}{2}\right),$$

将点 $C\left(0, \frac{5}{2}\right)$ 代入 $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + k$,

解得 $k = 3$;

② 设直线 $y = -x$ 与新抛物线的对称轴 $x = 1$ 交于点 E, 则点 E 的坐标为 $(-1, 1)$,

$\because$ 点 B 的坐标为 $(3, 1)$,

$$\therefore \angle OED = \angle DEB = 45^\circ,$$

$\because$ 直线 $x = 1$ 平行于 y 轴,

$$\therefore \angle COD = \angle ODE,$$

$$\therefore \frac{OC}{OD} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{4}, \frac{OD}{DE} = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

$$\therefore \frac{OC}{OD} = \frac{OD}{DE},$$

$$\therefore \triangle OCD \sim \triangle OED,$$

$$\therefore \angle ODC = \angle OED = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle OPB = \angle ODC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle OPE < 45^\circ,$$

分两种情况:

I. 当点 P 在线段 DE 的延长线上时,

$$\therefore \angle OED = \angle DEB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle OEP = \angle PEB = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle OPE + \angle POE = \angle OPE + \angle PBE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle POE = \angle EPB,$$

$$\therefore \triangle OPE \sim \triangle PBE,$$

$$\therefore \frac{PE}{OE} = \frac{BE}{PE},$$

$$\therefore PE^2 = OE \cdot BE = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4,$$

$$\therefore PE = 2,$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (1, -3),$$

II. 当点 P 在射线 DE 上时,

$$\therefore \angle BDE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle OPD < 45^\circ,$$

$\therefore$ 点 P 在 ED 的延长线上,

在直线 $x=1$ 上取点 $F(1,1)$,

同理可得 $\triangle OPF \sim \triangle PBD$.

$$\therefore \frac{PF}{OF} = \frac{BD}{PD},$$

$$\therefore PF \cdot PD = OF \cdot BD,$$

$$\therefore (2+PD) \cdot PD = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4,$$

$$\therefore PD = \sqrt{5} - 1,$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (1, 2 + \sqrt{5}).$$

【点睛】 本题考查了二次函数综合题，考查了二次函数的性质，待定系数法求解析式，解直角三角及相似三角形的判定与性质，灵活运用这些性质解决问题是解题的关键.

25. 已知梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $BC = 4AD$ ， 点 E 在边 AB 上， $AE = 1$ ， $BE = 2$ ， 联结 DE .

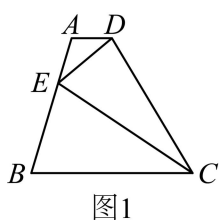


图1

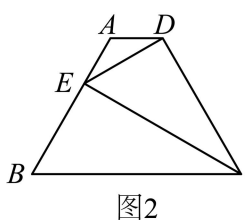


图2

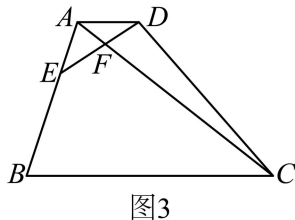


图3

(1) 如图 1，联结 EC ，求 $\triangle EAD$ 与 $\triangle EBC$ 的面积之比；

(2) 如图 2，如果 $\angle EDC = 90^\circ$ ， $\angle DEC = \angle DCB$ ，求 $\angle B$ 的正切值；

(3) 如图 3，联结 AC 交 DE 于点 F ，如果 $DA^2 = DF \cdot DE$ ，且 $\frac{DE}{AC} = \cos B$ ，求边 BC 的长.

【答案】 (1) $\frac{1}{8}$

(2) $\sqrt{3}$

(3) $BC = 2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的判定和性质，解直角三角形等知识，解决问题的关键是作辅助线，构造相似三角形.

(1) 延长 DE ，交 CB 的延长线于点 F ，可证得 $\triangle ADE \sim \triangle FBE$ ，从而

$$\frac{AD}{BF} = \frac{AE}{BE} = \frac{1}{2}, \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle BEF}} = \left(\frac{AE}{BE}\right)^2 = \frac{1}{4}, \text{ 进而得出 } \frac{S_{\triangle EBF}}{S_{\triangle EBC}} = \frac{1}{2}, \text{ 进一步得出结果;}$$

(2) 延长 DE ，交 CB 的延长线于点 F ，设 $CD = 3a$ 作 $EG \perp CF$ 于 G ，可证得 $EF = 2DE$ ，

$\triangle CDE \sim \triangle FDC$ ，从而 $CD^2 = DE \cdot DF$ ，进而得出 $\frac{CD}{DE} = \sqrt{3}$ ，从而得出 $\angle DCB = 60^\circ$ ， $\angle F = 30^\circ$ ，从

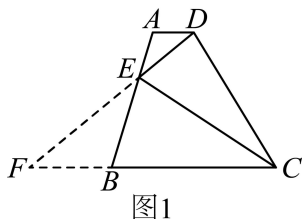
而得出 $CF = 6a$ ， $DF = 3\sqrt{3}a$ ，进而得出 $BF = 2a$ ， $EF = 2\sqrt{3}a$ ， $EG = \frac{1}{2}EF = \sqrt{3}a$ ，

$FG = \frac{\sqrt{3}}{2}EF = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3}a = 3a$ ， $BG = a$ ，进一步得出结果；

(3) 设 $AD = a$, $AT = b$, 以 D 为圆心, AD 长为半径画弧, 交 BA 的延长线于点 H , 作 $DT \perp AH$ 于 T , 从而 $DH = AD = a$, $AH = 2AT = 2TH = 2b$, $\angle H = \angle HAD = \angle B$, 可证得 $\triangle ADF \sim \triangle EDA$, 从而 $\angle DAC = \angle AED$, 从而得出 $\triangle HED \sim \triangle BCA$, 从而得出 $\frac{DE}{AC} = \frac{DH}{AB} = \frac{EH}{BC}$, 根据 $\cos \angle DAH = \cos B$, 根据 $\frac{DE}{AC} = \frac{AT}{AD}$, 从而得出 $\frac{AT}{AD} = \frac{DH}{AB} = \frac{EH}{BC}$, 从而 $\frac{b}{a} = \frac{a}{3} = \frac{b+1}{4a}$, 进一步得出结果.

【小问 1 详解】

解: 如图 1, 延长 DE , 交 CB 的延长线于点 F ,



$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle FBE$,

$$\therefore \frac{AD}{BF} = \frac{AE}{BE} = \frac{1}{2}, \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle BEF}} = \left(\frac{AE}{BE}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$\because BC = 4AD$,

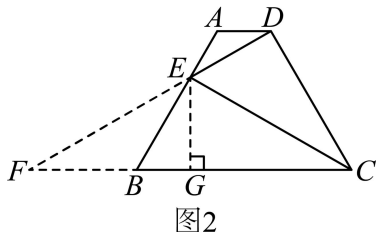
$\therefore BC = 2BF$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle EBF}}{S_{\triangle EBC}} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle EAD}}{S_{\triangle EBC}} = \frac{1}{8};$$

【小问 2 详解】

解: 如图 2, 延长 DE , 交 CB 的延长线于点 F , 作 $EG \perp CF$ 于 G ,



$\because \angle DEC = \angle DCB$,

$\therefore \angle F + \angle ECF = \angle DCE + \angle ECF$,

$\therefore \angle DCE = \angle F$,

$\therefore \angle CDE = \angle CDF$,

$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle FDC,$$

$$\therefore \frac{CD}{DE} = \frac{DF}{CD},$$

$$\therefore CD^2 = DE \cdot DF,$$

由 (1) 知, $\triangle ADE \sim \triangle FBE$,

$$\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{AE}{BE} = \frac{1}{2}, \quad \frac{BF}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore EF = 2DE,$$

$$\therefore DF = 3DE,$$

$$\therefore CD^2 = 3DE^2,$$

$$\therefore \frac{CD}{DE} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle EDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CED = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DCB = 60^\circ, \quad \angle F = 30^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle CDF$ 中, 设 $CD = 3a$, 则 $CF = 6a$, $DF = 3\sqrt{3}a$,

$$\therefore BF = 2a, \quad EF = 2\sqrt{3}a,$$

在 $\text{Rt}\triangle EFG$ 中,

$$EG = \frac{1}{2}EF = \sqrt{3}a, \quad FG = \frac{\sqrt{3}}{2}EF = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3}a = 3a,$$

$$\therefore BG = FG - BF = 3a - 2a = a,$$

$$\therefore \tan B = \frac{EG}{BG} = \sqrt{3};$$

【小问 3 详解】

解: 如图 3, 以 D 为圆心, AD 长为半径画弧, 交 BA 的延长线于点 H , 作 $DT \perp AH$ 于 T ,

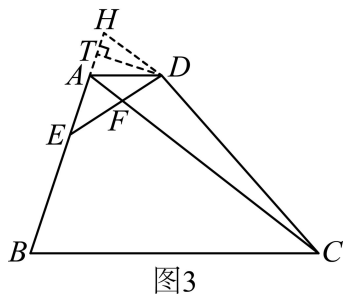


图3

设 $AD = a$, $AT = b$,

$$\therefore DH = AD = a,$$

$$\therefore AH = 2AT = 2TH = 2b, \quad \angle H = \angle HAD,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle B = \angle HAD, \quad \angle DAC = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle H = \angle B,$$

$$\because DA^2 = DF \cdot DE, \quad \angle ADF = \angle ADE,$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle EDA,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle AED,$$

$$\therefore \angle AED = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle HED \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{DE}{AC} = \frac{DH}{AB} = \frac{EH}{BC},$$

$$\because \cos \angle DAH = \cos B,$$

$$\therefore \frac{DE}{AC} = \frac{AT}{AD},$$

$$\therefore \frac{AT}{AD} = \frac{DH}{AB} = \frac{EH}{BC},$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{a}{3} = \frac{b+1}{4a},$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore BC = 4a = 2\sqrt{6}.$$