

初三数学期末练习卷

考生注意:

1. 本试卷共 25 题, 试卷满分 150 分, 考试时间 100 分钟.
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 如果在一张比例尺为 $1:200$ 的地图上, 量得 A 、 B 两点的距离是 5cm , 那么 A 、 B 两点的实际距离是 ()
- A. 1m B. 10m C. 100m D. 1000m

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查两点间的距离, 比例尺. 根据比例尺的定义进行计算即可.

【详解】解: 在一张比例尺为 $1:200$ 的地图上, 量得 A 、 B 两点的距离是 5cm ,

那么 A 、 B 两点的实际距离为 $5 \div \frac{1}{200} = 1000(\text{cm})$,

就是 10m ,

故选: B.

2. 下列四个函数中, 图象经过原点的是 ()

A. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ B. $y = -\frac{2}{x}$ C. $y = x^2 + 2x$ D. $y = (x+1)^2$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查函数图象上的点, 函数图象上的点的坐标适合函数解析式, 令 $x=0$, 函数值也等于 0, 则图象经过原点. 据此判断即可.

【详解】解: A、令 $x=0$, 则 $y = \frac{3}{2}$, 故不符合题意;

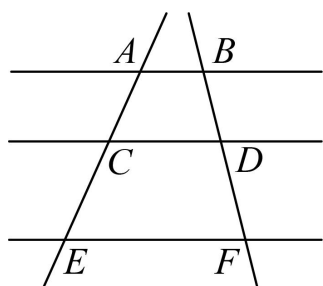
B、 $x=0$ 无意义, 故不符合题意;

C、 $x=0$, 则 $y=0$, 故符合题意;

D、 $x=0$, 则 $y=1$, 故不符合题意.

故选: C.

3. 如图，已知 $AB \parallel CD \parallel EF$ ，那么下列结论正确的是（ ）



A. $\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$

B. $\frac{AC}{DF} = \frac{BD}{CE}$

C. $\frac{AC}{AE} = \frac{CD}{EF}$

D. $\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{CD}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查平行线分线段成比例定理，由 $AB \parallel CD \parallel EF$ ，根据平行线分线段成比例定理逐项进行分析判断即可得到问题的答案.

【详解】解： $\because AB \parallel CD \parallel EF$ ，

$\therefore \frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$ ，而 $\frac{AC}{AE}$ 与 $\frac{CD}{EF}$ 不一定相等， $\frac{AC}{CE}$ 与 $\frac{AB}{CD}$ 不一定相等，

故 A 正确，C 不正确，D 不正确；

由 $\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$ 得 $\frac{AC}{BD} = \frac{CE}{DF}$ ，

假设 $\frac{AC}{DF} = \frac{BD}{CE}$ 成立，则 $\frac{AC}{BD} = \frac{DF}{CE}$ ，

$\therefore \frac{CE}{DF} = \frac{DF}{CE}$ ，

$\therefore CE = DF$ ，与已知条件不符，

$\therefore \frac{AC}{DF} = \frac{BD}{CE}$ 不成立，

故 B 不正确，

故选：A.

4. 如果两个相似三角形的周长分别是 5cm、16cm，那么这两个三角形对应角平分线的比是（ ）

A. 25:256

B. 5:16

C. $\sqrt{5}:4$

D. 以上都不对

【答案】B

【解析】

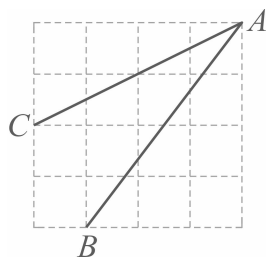
【分析】本题考查相似三角形的性质，掌握相似三角形的周长的比、对应中线的比、高线的比、角平分线的比都等于相似比解题即可.

【详解】解： $\because$ 两个相似三角形的周长比、对应角平分线的比都等于相似比，

∴这两个三角形对应角平分线的比是5:16,

故选: B.

5. 在网格中, 每个小正方形的顶点称为格点. 如图, 在 4×4 的网格中, 点 A 、 B 、 C 都在格点上, 那么 $\angle BAC$ 的正切值是 ()



A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C. 2

D. $\frac{1}{2}$

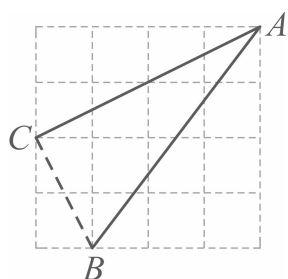
【答案】D

【解析】

【分析】 本题主要考查了解直角三角形, 通过连接 BC 构造出直角三角形及熟知正切的定义是解答本题的关键.

根据所给网格, 连接 BC 得出 BC 与 AC 垂直, 再结合正切的定义即可解决问题.

【详解】 解: 连接 BC , 如图所示:



则 $BC \perp AC$,

设小正方形网格的边长为 a ,

则由勾股定理得: $BC = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}a$, $AC = \sqrt{(2a)^2 + (4a)^2} = 2\sqrt{5}a$,

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$\tan \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{5}a}{2\sqrt{5}a} = \frac{1}{2},$$

故选: D.

6. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上部分点的横坐标 x 与纵坐标 y 的对应值如下表:

x	...	-1	0	1	2	3	...
y	...	3	0	-1	m	3	...

①抛物线开口向下；②抛物线的对称轴为直线 $x=1$ ；③ m 的值为 0；④图像不经过第三象限；⑤抛物线在 y 轴右侧的部分是上升的. 上述结论中正确的是 ()

A. ①②④

B. ①②⑤

C. ②③④

D. ③④⑤

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查二次函数的图象和性质，熟练掌握抛物线与系数的关系，顶点坐标，对称轴，对称性，增减性，是解题的关键

根据抛物线的顶点坐标是 $(1, -1)$ ，有最小值，判断①；根据抛物线的对称轴是直线 $x = \frac{-1+3}{2} = 1$ ，判断②；根据 $x=0$ 与 $x=2$ 对称，判断③；根据图象过原点，对称轴在原点右侧，判断④；抛物线在直线 $x=1$ 右侧的部分是上升的. 判断⑤.

【详解】解：由表格可知，抛物线的顶点坐标是 $(1, -1)$ ，有最小值，

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的开口向上，

故①错误；

抛物线的对称轴是直线 $x = \frac{-1+3}{2} = 1$ ，

故②正确；

当 $x=0$ 或 $x=2$ 时， $y=0$ ，

故 m 的值为 0，

故③正确；

$\therefore$ 图象过原点，对称轴为直线 $x=1$ ，

$\therefore$ 图象不过第三象限，

故④正确；

$\therefore$ 抛物线的开口向上，对称轴为直线 $x=1$ ，

$\therefore$ 抛物线在直线 $x=1$ 右侧的部分是上升的.

故⑤不正确.

$\therefore$ 正确的有②③④.

故选：C.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

【请将结果直接填入答题纸的相应位置】

7. 已知 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ ，那么 $\frac{a}{a+b}$ 的值是_____.

【答案】 $\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】本题考查了比例的性质，熟练掌握比例的性质是解题的关键. 由 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ ，可设 $a = 2k$ ， $b = 3k$ ($k \neq 0$)，

再代入 $\frac{a}{a+b}$ 化简即可解答.

【详解】解： $\because \frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ ，

$\therefore$ 设 $a = 2k$ ， $b = 3k$ ($k \neq 0$)，

$$\therefore \frac{a}{a+b} = \frac{2k}{2k+3k} = \frac{2k}{5k} = \frac{2}{5}.$$

故答案为： $\frac{2}{5}$.

8. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AP > BP$ ， $AB = 4$ ，那么 $AP =$ _____.

【答案】 $2\sqrt{5} - 2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了黄金分割，熟记黄金分割点分成的两线段和原线段之间关系是解决问题的关键，

根据黄金分割可得 $AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB$ ，即可得解.

【详解】解： $\because$ 点 P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AP > BP$ ，

$$\therefore AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 4 = 2\sqrt{5} - 2.$$

故答案为： $2\sqrt{5} - 2$.

9. 计算： $3(\vec{a} - 2\vec{b}) - 4\vec{b} =$ _____.

【答案】 $3\vec{a} - 10\vec{b}$

【解析】

【分析】本题为平面向量的加减混合运算，熟练掌握运算法则是解答本题的关键．按向量的运算法则即可得结果．

【详解】解： $3(\vec{a} - 2\vec{b}) - 4\vec{b}$

$$= 3\vec{a} - 6\vec{b} - 4\vec{b}$$
$$= 3\vec{a} - 10\vec{b}.$$

故答案为： $3\vec{a} - 10\vec{b}$.

10. 如果小华在小丽北偏东 65° 的位置上，那么小丽在小华_____的位置上.

【答案】 南偏西 65°

【解析】

【分析】 本题考查了方向角．根据方向角的定义即可得到答案．

【详解】 解： 如果小华在小丽北偏东 65° 的位置上，那么小丽在小华南偏西 65° 的位置上．

故答案为： 南偏西 65° .

11. 沿一斜坡向上走 2 米，高度上升 1 米，那么这个斜坡的坡度 $i =$ _____.

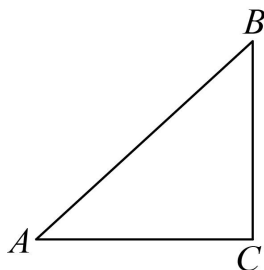
【答案】 $\sqrt{3}:3$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了坡度坡比问题（解直角三角形的应用），勾股定理等知识点，熟练掌握坡度（或坡比）的定义是解题的关键：坡面的铅垂高度（ h ）和水平长度（ L ）的比叫做坡面的坡度（或坡比），记作 i ，即 $i = \frac{h}{L}$ ，坡度通常写成 $1:m$ 的形式．

根据坡度的定义画图求解即可．

【详解】 解： 如图，由题意可知： $AB = 2$ 米， $BC = 1$ 米，



根据勾股定理可得：

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} \text{ 米},$$

$\therefore$ 这个斜坡的坡度 $i = BC : AC = 1 : \sqrt{3} = \sqrt{3} : 3$,

故答案为: $\sqrt{3} : 3$.

12. 二次函数 $y = -(x-1)^2 - 1$ 的图像上有两个点 $(2, y_1)$ 、 $(3, y_2)$, 那么 y_1 _____ y_2 (填 “>” “=” 或 “<”).

【答案】>

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征、二次函数的图象与性质, 熟练掌握以上知识点是解答本题的关键.

求得二次函数的开口方向 and 对称轴, 然后利用二次函数的性质判断即可.

【详解】 解: $\because$ 二次函数 $y = -(x-1)^2 - 1$ 的开口向下, 对称轴为直线 $x = 1$,

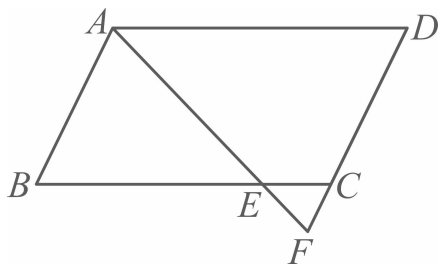
$\therefore$ 当 $x > 1$ 时, y 随 x 的增大而减小,

$\because$ 二次函数 $y = -(x-1)^2 - 1$ 的图像上有两个点 $(2, y_1)$ 、 $(3, y_2)$, 且 $1 < 2 < 3$,

$\therefore y_1 > y_2$,

故答案为: >.

13. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $AB = 3$, $BC = 5$, 点 E 在边 BC 上, 连接 AE 并延长, 与 DC 的延长线相交于点 F , 如果 $CF = 1$, 那么 $CE =$ _____.



【答案】 $\frac{5}{4}$

【解析】

【分析】 此题主要考查平行四边形的性质、相似三角形的判定与性质等知识点, 证明 $\triangle FCE \sim \triangle ABE$ 是解答本题的关键.

由平行四边形的性质得 $CD \parallel AB$, 则 $FC \parallel AB$, 所以 $\triangle FCE \sim \triangle ABE$, 而 $AB = 3$, $BC = 5$, $CF = 1$,

则 $\frac{CE}{BE} = \frac{CF}{AB} = \frac{1}{3}$, 所以 $CE = \frac{1}{4}BC = \frac{5}{4}$, 即可解答.

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $AB=3$ ， $BC=5$ ，

$$\therefore CD \parallel AB,$$

∵点 E 在边 BC 上，连接 AE 并延长，与 DC 的延长线相交于点 F ，

$$\therefore FC \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle FCE \sim \triangle ABE,$$

$$\therefore AB=3, BC=5, CF=1,$$

$$\therefore \frac{CE}{BE} = \frac{CF}{AB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore CE = \frac{1}{1+3}BC = \frac{1}{4}BC = \frac{1}{4} \times 5 = \frac{5}{4},$$

故答案为： $\frac{5}{4}$.

14. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，如果 $CG=4$ ，那么 $AB=$ _____.

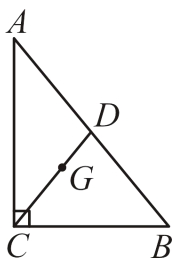
【答案】 12

【解析】

【分析】 本题考查了重心的性质，直角三角形斜边的中线等于斜边的一半. 熟练掌握重心的性质，直角三角形斜边的中线等于斜边的一半是解题的关键.

如图， CD 是 AB 的中线，由 G 是重心， $CG=4$ ，可求 $DG=2$ ， $CD=CG+DG=6$ ，由直角三角形斜边的中线等于斜边的一半可得 $AB=2CD$ ，计算求解即可.

【详解】解：如图，



$$\therefore G \text{ 是重心, } CG=4,$$

$$\therefore CD \text{ 是 } AB \text{ 的中线, } DG:CG=1:2,$$

$$\therefore DG:4=1:2,$$

$$\text{解得, } DG=2,$$

$$\therefore CD=CG+DG=6,$$

$$\therefore \angle ACB=90^\circ, CD \text{ 是 } AB \text{ 的中线,}$$

$$\therefore AB=2CD=12,$$

故答案为： 12.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, $DE \parallel BC$, 如果 $BC = 9$, $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\text{四边形}BCED}} = \frac{1}{8}$, 那么

$DE =$ _____.

【答案】 3

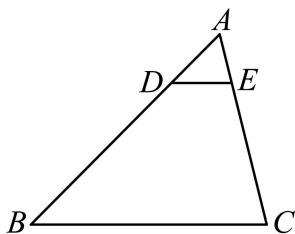
【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的性质与判定, 熟练掌握相似三角形的面积比等于相似比的平方是解题的

关键. 由 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\text{四边形}BCED}} = \frac{1}{8}$ 可得 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{9}$, 再通过证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 得到相似比 $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$, 代入 $BC = 9$

即可得到 DE 的长.

【详解】 解: 如图,



$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\text{四边形}BCED}} = \frac{1}{8},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{9},$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3},$$

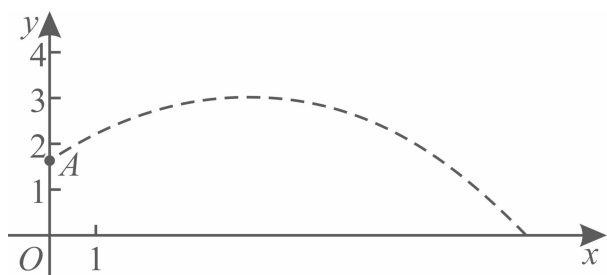
$$\text{又} \because BC = 9,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{3}BC = 3.$$

故答案为: 3.

16. 如图, 一位运动员推铅球, 铅球运行时离地面高度 y (米) 与水平距离 x (米) 之间的关系为

$y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$, 点 A 是铅球的出手位置, 那么铅球运行水平距离_____米时落到地面.



【答案】 10

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数在实际问题中的应用，铅球落地时， $y=0$ ，故由题意可得关于 x 的方程，解得 x 的值并根据问题的实际意义作出取舍即可.

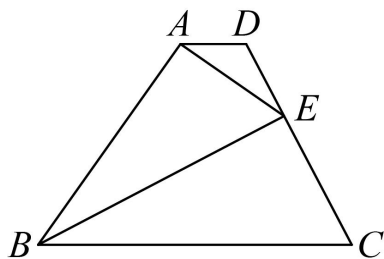
【详解】 解：令 $y=0$ ，则 $-\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = 0$ ，

解得： $x_1=10$ ， $x_2=-2$ (舍去)，

∴ 铅球运行水平距离为 10 米时落到地面.

故答案为： 10.

17. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，过点 A 作 AB 的垂线，与边 CD 相交于点 E ，联结 BE ．如果 $\tan C = \tan \angle AEB = 2$ ，且 $AD = \sqrt{5}$ ，那么 CE 的长是_____.



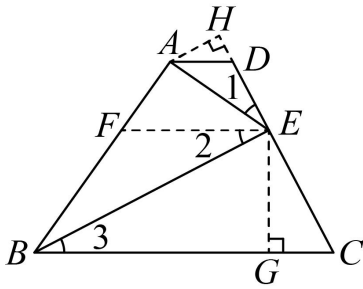
【答案】 5

【解析】

【分析】 过点 E 作 $EF \parallel BC$ 交 AB 于点 F ，作 $EG \perp BC$ 于点 G ，过点 A 作 $AH \perp CD$ 交 CD 的延长线于点 H ，根据 $AD \parallel BC$ 可得 $\angle ADH = \angle C$ ，则 $\tan \angle ADH = 2$ ，在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中解直角三角形可得 $DH = 1$ ， $AH = 2$ ，在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中，根据 $\tan \angle AEB = \frac{AB}{AE} = 2$ ，设 $AE = a$ ，则 $AB = 2a$ ， $BE = \sqrt{5}a$ ，根据 $\tan C = \tan \angle AEB = 2$ 可得 $\angle C = \angle AEB$ ，根据 $EF \parallel BC$ 可得 $\angle DEF = \angle C = \angle AEB$ ， $\angle 2 = \angle 3$ ，据此可得 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ ，由此可判定 $\triangle AEH \sim \triangle EBG$ ，利用相似三角形的性质可得 $EG = 2\sqrt{5}$ ，然后在 $\text{Rt}\triangle ECG$ 中解直角三角形即可得出 CE 的长.

【详解】 解：如图，过点 E 作 $EF \parallel BC$ 交 AB 于点 F ，作 $EG \perp BC$ 于点 G ，过点 A 作 $AH \perp CD$ 交 CD

的延长线于点 H ,



$$\therefore \angle H = \angle EGB = \angle EGC = 90^\circ ,$$

$$\because AD \parallel BC ,$$

$$\therefore \angle ADH = \angle C ,$$

$$\because \tan C = \tan \angle AEB = 2 ,$$

$$\therefore \tan \angle ADH = 2 ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADH \text{ 中, } \tan \angle ADH = \frac{AH}{DH} = 2 ,$$

$$\therefore AH = 2DH ,$$

$$\because AD = \sqrt{5} ,$$

由勾股定理可得:

$$AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = \sqrt{(2DH)^2 + DH^2} = \sqrt{5}DH = \sqrt{5} ,$$

$$\therefore DH = 1 ,$$

$$\therefore AH = 2DH = 2 ,$$

$$\because AE \perp AB ,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABE \text{ 中, } \tan \angle AEB = \frac{AB}{AE} = 2 ,$$

$$\text{设 } AE = a , \text{ 则 } AB = 2a ,$$

由勾股定理可得:

$$BE = \sqrt{AE^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}a ,$$

$$\because \tan C = \tan \angle AEB = 2 ,$$

$$\therefore \angle C = \angle AEB ,$$

$$\because EF \parallel BC ,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle C = \angle AEB , \quad \angle 2 = \angle 3 ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle AEF = \angle AEF + \angle 2 ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3,$$

$$\text{又} \because \angle H = \angle EGB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AEH \sim \triangle EBG,$$

$$\therefore \frac{AH}{EG} = \frac{AE}{BE},$$

$$\therefore \frac{2}{EG} = \frac{a}{\sqrt{5}a},$$

$$\therefore EG = 2\sqrt{5},$$

$$\text{在 Rt}\triangle ECG \text{ 中, } \tan C = \frac{EG}{CG} = 2,$$

$$\therefore CG = \frac{EG}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5},$$

由勾股定理可得:

$$CE = \sqrt{EG^2 + CG^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2} = 5,$$

故答案为: 5.

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质, 解直角三角形的相关计算, 平行线的性质, 勾股定理, 锐角三角函数的定义等知识点, 熟练掌握相关知识点并能加以综合运用是解题的关键.

18. 将平行四边形 $ABCD$ 的边 BC 沿直线 l 翻折后, 点 B 、 C 的对应点 B' 、 C' 落在直线 AD 上. 如果 $AB = 2BC$, $\frac{AC'}{C'D} = \frac{AB'}{B'D}$, 那么此平行四边形四个内角中, 锐角的余弦值为_____.

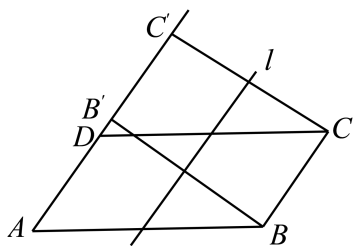
【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 或 $\frac{1}{4}\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查轴对称的性质, 全等三角形的判定与性质, 求角的余弦值等知识, 证明 $BB' \perp AD$, $CC' \perp AD$, 设 $AB' = x$, $BC = m$, 证明 $\triangle ABB' \cong \triangle DCC'$, 可得 $C'D = AB' = x$, $B'D = |m - x|$,

$\frac{AC'}{C'D} = \frac{AB'}{B'D}$, 可列式为 $\frac{m+x}{x} = \frac{x}{|m-x|}$, 求出 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}m$ 进而可求出 $\angle A$ 的余弦值.

【详解】 解: 如图,



B', C' 要想落在 AD 上, l 应为与 BC 平行的线, 且 l 到 AD 、 BC 的距离相等,

$$BB' \perp l, CC' \perp l,$$

$$\therefore BB' \perp AD, CC' \perp AD,$$

$$\therefore AB = CD, BB' = CC', \angle AB'B = \angle OC'C,$$

$$\therefore \triangle ABB' \cong \triangle DCC',$$

设 $AB' = x$, $BC = m$, 则 $AB = 2m, B'C' = m, AC' = AB' + B'C' = m + x$, $C'D = AB' = x$,

$$\therefore B'D = |m - x|, \frac{AC'}{C'D} = \frac{AB'}{B'D},$$

$$\therefore \frac{m + x}{x} = \frac{x}{|m - x|},$$

$$\text{整理得, } x^2 = \frac{1}{2}m^2,$$

$$\text{解得, } x = \frac{\sqrt{2}}{2}m,$$

$$\therefore \cos A = \frac{AB'}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}m}{2m} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

$$19. \text{ 计算: } \frac{2 \cos 60^\circ}{2 \sin 45^\circ - \cot 45^\circ} - \sqrt{3} \tan 60^\circ.$$

$$\text{【答案】 } \sqrt{2} - 2$$

【解析】

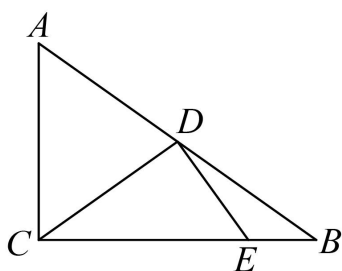
【分析】本题考查了特殊角的三角函数值, 将特殊三角函数值代入, 利用二次根式混合运算法则求解即可.

【详解】解：原式 $= \frac{2 \times \frac{1}{2}}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1} - \sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} - 3$$

$$= \sqrt{2} - 2$$

20. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 10$ ， $\cos B = \frac{4}{5}$ 。点 D 是边 AB 的中点，过点 D 作 CD 的垂线，与边 BC 相交于点 E 。



- (1) 求线段 CE 的长；
- (2) 求 $\sin \angle BDE$ 的值。

【答案】(1) $CE = \frac{25}{4}$

(2) $\frac{7}{25}$

【解析】

【分析】本题考查锐角三角函数、勾股定理，利用同角的锐角三角函数值相等是关键。

- (1) 由勾股定理求出 AB ，再根据斜边上的中线求出 CD ， $\angle DCB = \angle B$ ，由余弦定理求出 CE ；
- (2) 作 $EH \perp AB$ 交 AB 于 H ，在直角三角形中由勾股定理求出 BE 长，从而求出 $\angle BDE$ 的正弦值。

【小问 1 详解】

解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，

$\because$ 点 D 是边 AB 的中点，

$$\therefore CD = BD = \frac{1}{2}AB.$$

$$\therefore \angle DCB = \angle B.$$

$$\because \cos B = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \cos \angle DCB = \frac{4}{5}.$$

$$\therefore AB = 10,$$

$$\therefore CD = 5.$$

$$\therefore DE \perp CD,$$

$$\therefore \angle CDE = 90^\circ.$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle CDE \text{ 中, } \cos \angle DCB = \frac{CD}{CE} = \frac{4}{5}.$$

$$\therefore CE = \frac{25}{4}.$$

【小问 2 详解】

解: 过点 E 作 $EH \perp AB$, 垂足为点 H .

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle CDE \text{ 中, } CD = 5, CE = \frac{25}{4},$$

$$\therefore DE = \sqrt{CE^2 - CD^2} = \frac{15}{4}.$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$,

$$\therefore \cos B = \frac{BC}{AB},$$

$$\therefore BC = 8.$$

$$\therefore BE = BC - CE = \frac{7}{4}.$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle BEH \text{ 中, } \cos B = \frac{4}{5},$$

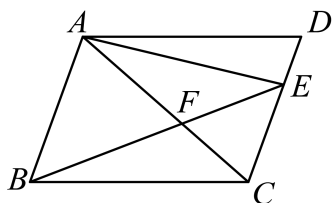
$$\therefore \sin B = \frac{3}{5}.$$

$$\therefore EH = \frac{21}{20}.$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle DEH \text{ 中, } \sin \angle BDE = \frac{EH}{DE} = \frac{7}{25}.$$

21. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 为边 CD 上的一点, $CE = 2DE$, AC 与 BE 相交于点 F , 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$,

$$\overrightarrow{AD} = \vec{b}.$$



(1) 用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 分别表示下列向量;

$$\overrightarrow{CE} = \underline{\hspace{2cm}}; \quad \overrightarrow{AE} = \underline{\hspace{2cm}}; \quad \overrightarrow{AF} = \underline{\hspace{2cm}};$$

(2) 在图中求作 $\overrightarrow{AF}$ 分别在 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 方向上的分向量.

(不要求写作法, 但要指出所作图中表示结论的分向量)

【答案】(1) $-\frac{2}{3}\vec{a}$; $\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}$; $\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$

(2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了向量的线性计算, 平行四边形的性质, 相似三角形的性质与判定, 掌握以上知识是解题的关键.

(1) 根据已知条件得出 $\overrightarrow{CE} = -\frac{2}{3}\vec{a}$, $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\vec{a}$, 根据三角形法则得出, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}$ 根据相似三角形得出 $AF = \frac{3}{5}AC$, $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$ 则即可求解;

(2) 根据平行四边形法则构造平行四边形 $AGFH$, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$$\therefore AB = CD, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{a},$$

$$\because CE = 2DE,$$

$$\therefore CE = \frac{2}{3}CD, DE = \frac{1}{3}CD$$

$$\therefore \overrightarrow{CE} = -\frac{2}{3}\vec{a}, \overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\vec{a};$$

$$\because \overrightarrow{AD} = \vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b};$$

$$\because AB \parallel CE$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle CEF,$$

$$\therefore \frac{CF}{AF} = \frac{CE}{AB} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore AF = \frac{3}{5}AC,$$

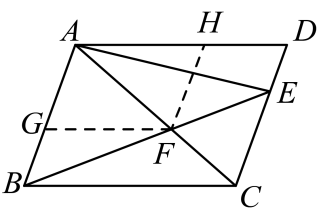
$$\because \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{AF} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$$

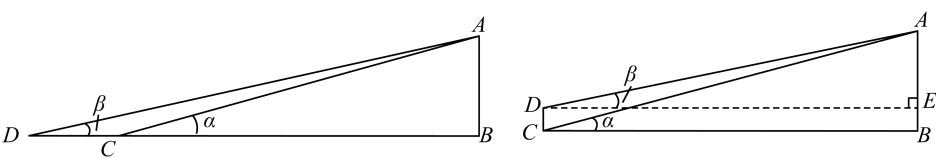
故答案为: $-\frac{2}{3}\vec{a}$; $\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$; $\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$.

【小问 2 详解】

解: 如图所示, 过点 F 分别作 $FG \parallel AD$ 交 AB 于 G , $FH \parallel AB$ 交 AD 于 H , 则 $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AH}$ 即为 $\overrightarrow{AF}$ 分别在 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 方向上的分向量.



22. 上海世博文化公园的双子山是近期游客的热门打卡地. 某校实践小组利用所学知识测量双子山主峰的高度, 他们设计了两个测量方案, 并利用课外时间完成了实地测量. 下面是两个方案的示意图及测量数据.



方案一: 测量距离 CD , 仰角 α , 仰角 β . 方案二: 测量高度 CD , 仰角 α , 仰角 β .

测量项目	CD	α	β
方案一	10m	12°	11.5°
方案二	1.3m	12°	11.7°

任务一: 请选择其中一种方案, 求出双子山主峰 AB 的高度 (结果保留 1 位小数). 参考数据见下表:

三角比	sin	cos	tan	cot
-----	-----	-----	-----	-----

角度				
12°	0.208	0.978	0.213	4.705
11.5°	0.199	0.980	0.204	4.915
11.7°	0.203	0.979	0.207	4.829

任务二：上海世博文化公园官网上显示：双子山主峰的高度为 48 米。请你用一句话简单说明你求出的高度与 48 米不一致的原因：_____.

【答案】任务一：见解析；任务二：数据精确度不同（答案不唯一，言之成理即可）.

【解析】

【分析】本题考查了解直角三角形的应用，熟练掌握解直角三角形的方法是解题的关键.

任务一：①选择方案一：利用正切的定义可得 $\tan \alpha = \frac{AB}{BC}$ ， $\tan \beta = \frac{AB}{BD}$ ，则有 $BC \tan \alpha = BD \tan \beta$ ，代入数据可得 $BC \approx 226.67$ 米，即可求出 AB 的高度；②选择方案二：利用正切的定义可得 $\tan \alpha = \frac{AB}{BC}$ ， $\tan \beta = \frac{AE}{DE}$ ，由题意得可得 $BC = DE$ ， $BE = CD$ ，进而得到 $BC \tan \alpha - BE = DE \tan \beta$ ，代入数据可得 $BC \approx 216.67$ 米，即可求出 AB 的高度；

任务二：从物理（测量）、地理（海拔）或数学（精确度）等角度进行分析，答案不唯一，言之成理即可.

【详解】解：任务一：

①选择方案一，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $\alpha = 12^\circ$ ， $\tan \alpha = \frac{AB}{BC}$ ，

$\therefore AB = BC \tan \alpha$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $\beta = 11.5^\circ$ ， $\tan \beta = \frac{AB}{BD}$ ，

$\therefore AB = BD \tan \beta$ ，

$\therefore BC \tan \alpha = BD \tan \beta$ ，即 $BC \tan \alpha = BC \tan \beta + CD \tan \beta$ ，

$\therefore BC \tan 12^\circ = BC \tan 11.5^\circ + CD \tan 11.5^\circ$ ，

解得： $BC \approx 226.67$ 米，

$\therefore AB \approx 48.3$ 米；

答：双子山主峰 AB 的高度为 48.3 米；

②选择方案二，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $\alpha = 12^\circ$, $\tan \alpha = \frac{AB}{BC}$,

$$\therefore AB = BC \tan \alpha,$$

在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中, $\angle AED = 90^\circ$, $\beta = 11.7^\circ$, $\tan \beta = \frac{AE}{DE}$,

$$\therefore AE = DE \tan \beta,$$

由题意可得: $BC = DE$, $BE = CD$,

$$\therefore AB - BE = AE, \text{ 即 } BC \tan \alpha - BE = DE \tan \beta,$$

$$\therefore BC \tan 12^\circ - 1.3 = BC \tan 11.7^\circ,$$

解得: $BC \approx 216.67$ 米,

$$\therefore AB \approx 46.2 \text{ 米}.$$

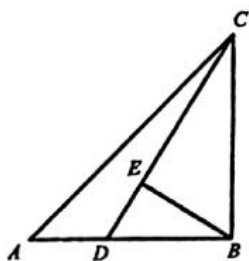
答: 双子山主峰 AB 的高度为 46.2 米.

任务二:

求出的高度与 48 米不一致的原因: 数据精确度不同 (答案不唯一, 言之成理即可).

故答案为: 数据精确度不同 (答案不唯一, 言之成理即可).

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, 点 D 是边 AB 上的一点, 连接 CD , 过点 B 作 $BE \perp CD$, 垂足为点 E .



(1) 求证: $\triangle BDE \sim \triangle CBE$;

(2) 如果 $AB = BC$, 连接 AE 并延长, 与边 BC 相交于点 F . 当点 F 是 BC 的中点时, 求证: $BD^2 = AD \cdot AB$.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 由 $BE \perp CD$ 可得 $\angle CEB = \angle BED = 90^\circ$, 由直角三角形的两个锐角互余可得 $\angle ECB + \angle CBE = 90^\circ$, 由 $\angle ABC = 90^\circ$ 可得 $\angle DBE + \angle CBE = 90^\circ$, 进而可得 $\angle ECB = \angle DBE$, 于是结论得证;

(2) 方法一：由直角三角形斜边中线等于斜边的一半可得 $CF = BF = EF = \frac{1}{2}BC$ ，由等边对等角可得 $\angle ECF = \angle CEF$ ，由 (1) 可知 $\angle ECB = \angle DBE$ ，由对顶角相等可得 $\angle CEF = \angle AED$ ，进而可得 $\angle AED = \angle ABE$ ，于是可证得 $\triangle AED \sim \triangle ABE$ ，由相似三角形的性质可得 $\frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BE} = \frac{AD}{AE}$ ，设 $CF = BF = EF = \frac{1}{2}BC = a$ ，则 $AB = BC = 2a$ ，由勾股定理可得 $AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{5}a$ ， $AE = AF - EF = (\sqrt{5} - 1)a$ ，由 $\frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BE} = \frac{AD}{AE}$ 可得 $AE^2 = AD \cdot AB$ ，进而可得 $AD = \frac{AE^2}{AB} = (3 - \sqrt{5})a$ ， $BD = AB - AD = (\sqrt{5} - 1)a$ ，则 $AE = BD$ ，于是结论得证；

方法二：由直角三角形斜边中线等于斜边的一半可得 $CF = BF = EF = \frac{1}{2}BC$ ，由等边对等角可得 $\angle ECF = \angle CEF$ ，由 (1) 可知 $\angle ECB = \angle DBE$ ，由对顶角相等可得 $\angle CEF = \angle AED$ ，进而可得 $\angle AED = \angle ABE$ ，于是可证得 $\triangle AED \sim \triangle ABE$ ，由相似三角形的性质可得 $\frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BE} = \frac{AD}{AE}$ ，进而可得 $AE^2 = AD \cdot AB$ ，由 $\angle ECB = \angle DBE$ ， $\angle BDE = \angle CDB$ 可证得 $\triangle BED \sim \triangle CBD$ ，由相似三角形的性质可得 $\frac{ED}{BD} = \frac{BE}{BC}$ ，即 $\frac{ED}{BE} = \frac{BD}{BC}$ ，进而可得 $\frac{AE}{AB} = \frac{BD}{BC}$ ，结合 $AB = BC$ ，可得 $AE = BD$ ，于是结论得证。

【小问 1 详解】

证明： $\because BE \perp CD$ ，

$$\therefore \angle CEB = \angle BED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ECB + \angle CBE = 90^\circ,$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ,$$

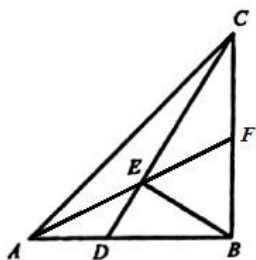
$$\therefore \angle DBE + \angle CBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ECB = \angle DBE,$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle CBE;$$

【小问 2 详解】

证明：如图，



方法一:

$\because BE \perp CD$, 点 F 是 BC 的中点,

$$\therefore CF = BF = EF = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \angle ECF = \angle CEF,$$

由 (1) 可知: $\angle ECB = \angle DBE$,

$$\because \angle CEF = \angle AED,$$

$$\therefore \angle AED = \angle ABE,$$

$$\because \angle EAD = \angle BAE,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle ABE,$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BE} = \frac{AD}{AE},$$

$$\text{设 } CF = BF = EF = \frac{1}{2}BC = a,$$

$$\text{则 } AB = BC = 2a,$$

$$AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{5}a, \quad AE = AF - EF = (\sqrt{5} - 1)a,$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BE} = \frac{AD}{AE},$$

$$\therefore AE^2 = AD \cdot AB,$$

$$\therefore AD = \frac{AE^2}{AB} = \frac{[(\sqrt{5} - 1)a]^2}{2a} = (3 - \sqrt{5})a,$$

$$\therefore BD = AB - AD = 2a - (3 - \sqrt{5})a = (\sqrt{5} - 1)a,$$

$$\therefore AE = BD,$$

$$\therefore BD^2 = AD \cdot AB;$$

方法二:

$\because BE \perp CD$, 点 F 是 BC 的中点,

$$\therefore CF = BF = EF = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \angle ECF = \angle CEF,$$

由 (1) 可知: $\angle ECB = \angle DBE$,

$$\therefore \angle CEF = \angle AED,$$

$$\therefore \angle AED = \angle ABE,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle BAE,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle ABE,$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BE} = \frac{AD}{AE},$$

$$\therefore AE^2 = AD \cdot AB,$$

$$\therefore \angle ECB = \angle DBE, \angle BDE = \angle CDB,$$

$$\therefore \triangle BED \sim \triangle CBD,$$

$$\therefore \frac{ED}{BD} = \frac{BE}{BC},$$

$$\text{即: } \frac{ED}{BE} = \frac{BD}{BC},$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{BD}{BC},$$

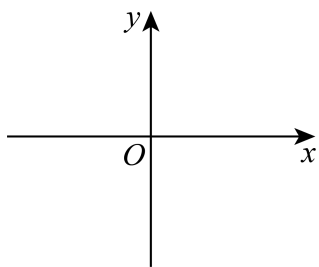
$$\therefore AB = BC,$$

$$\therefore AE = BD,$$

$$\therefore BD^2 = AD \cdot AB.$$

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质，直角三角形的两个锐角互余，线段中点的有关计算，直角三角形斜边中线等于斜边的一半，等边对等角，勾股定理，线段的和与差等知识点，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键.

24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $M_1: y = ax^2 - 2ax + c$ 与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$ 和点 B ，与 y 轴交于点 $C(0, 5)$.



(1) 求抛物线 M_1 的解析式;

(2) 把抛物线 M_1 向下平移 m 个单位 ($m > 0$) 得到抛物线 M_2 ，记抛物线 M_2 的顶点为 D ，与 y 轴交于

点 E ，直线 DE 与 x 轴交于点 P 。

①当点 P 与点 A 重合时，求 m 的值；

②记点 B 平移后的对应点为 B' ，如果 $BD \parallel B'P$ ，求此时点 D 的坐标。

【答案】(1) $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 5$

(2) ① $m = 4$ ；②点 D 的坐标为 $\left(1, \frac{-4 \pm 4\sqrt{5}}{3}\right)$

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求解即可；

(2) ①利用抛物线的平移思想，待定系数法，点重合的意义，解答即可；

②利用分类思想，根据平行线分线段成比例定理，列出比例式，整理解方程解答即可。

【小问 1 详解】

解：将 $A(-3, 0)$ ， $C(0, 5)$ 分别代入解析式，得：
$$\begin{cases} 9a + 6a + c = 0, \\ c = 5. \end{cases}$$

解得： $a = -\frac{1}{3}$ ， $c = 5$ 。

$\therefore$ 抛物线 M_1 的解析式为： $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 5$ 。

【小问 2 详解】

①解：由题意，得 $y = -\frac{1}{3}(x-1)^2 + \frac{16}{3}$ ，

抛物线 M_1 向下平移 m 个单位 ($m > 0$) 得到抛物线 M_2 ，

故抛物线 M_2 的解析式可设为： $y = -\frac{1}{3}(x-1)^2 + \frac{16}{3} - m$ 。

$\therefore D\left(1, \frac{16}{3} - m\right)$ ， $E(0, 5 - m)$ 。

设直线 DE 的解析式为： $y = kx + 5 - m$ ，

$\therefore \frac{16}{3} - m = k + 5 - m$ ，

解得 $k = \frac{1}{3}$ ，

$\therefore$ 直线 DE 的解析式为 $y = \frac{1}{3}x + 5 - m$ ，

$\therefore P(3m - 15, 0)$ ，

又 $\because$ 点 P 与点 $A(-3,0)$ 重合,

$$\therefore 3m - 15 = -3,$$

$$\therefore m = 4.$$

②解: 记抛物线对称轴与 x 轴交于点 H , 那么 $H(1,0)$, 且 $DH \parallel BB' \parallel y$ 轴.

$$\therefore \frac{-3+5}{2} = 1,$$

$$\therefore B(5,0).$$

当点 P 在点 B 左侧时,

$$\therefore BH = 5 - 1 = 4, \quad DH = \frac{16}{3} - m, \quad BP = 5 - (3m - 15) = 20 - 3m, \quad BB' = m,$$

$$\therefore DH \parallel BB' \parallel y,$$

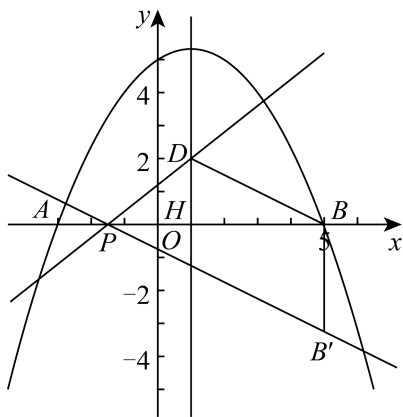
$$\therefore \angle DBH = \angle B'PB,$$

$$\therefore \angle DHB = \angle B'BP = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle B'PB \sim \triangle DBH,$$

$$\therefore \frac{DH}{HB} = \frac{BB'}{PB},$$

$$\therefore \frac{\frac{16}{3} - m}{4} = \frac{m}{20 - 3m},$$



$$\text{解得 } m = \frac{20 \pm 4\sqrt{5}}{3};$$

同理可证, 当点 P 在点 B 右侧时, 仍有 $\frac{DH}{HB} = \frac{BB'}{PB}$ 成立,

$$\text{有: } \frac{m - \frac{16}{3}}{4} = \frac{m}{3m - 20};$$

解得: $m = \frac{20 \pm 4\sqrt{5}}{3}$,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $\left(1, \frac{-4 \pm 4\sqrt{5}}{3}\right)$.

【点睛】 本题考查了待定系数法求解析式，抛物线的平移，三角形相似的判定和性质，解方程，分类思想，熟练掌握待定系数法，三角形相似的判定和性质是解题的关键.

25. 在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 交于点 O ， P 是线段 OC 上一个动点（不与点 O 、点 C 重合），过点 P 分别作 AD 、 CD 的平行线，交 CD 于点 E ，交 BC 、 BD 于点 F 、 G ，连接 EG 。

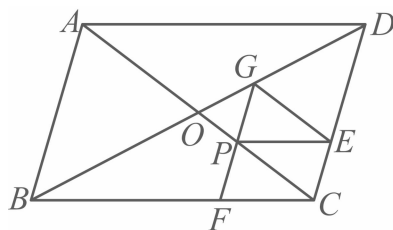


图1

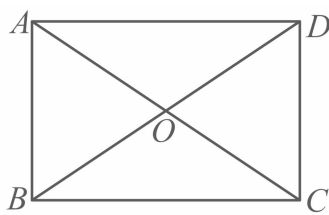


图2

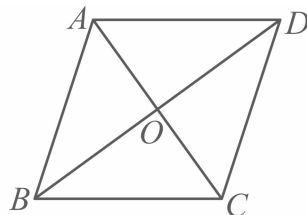


图3

(1) 如图1，如果 $PC = 2OP$ ，求证: $EG \parallel AC$;

(2) 如图2，如果 $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ ，且 $\triangle DGE$ 与 $\triangle PCF$ 相似. 请补全图形，并求 $\frac{OP}{PC}$ 的值;

(3) 如图3，如果 $BA = BG = BC$ ，且射线 EG 过点 A . 请补全图形，并求 $\angle ABC$ 的度数.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) $\frac{OP}{PC} = \frac{9}{8}$

(3) 作图见解析， $\angle ABC = 72^\circ$

【解析】

【分析】 (1) 由平行四边形的性质证出 $\frac{CP}{CA} = \frac{CP}{2CO} = \frac{1}{3}$ ，得出 $\frac{OG}{OD} = \frac{CE}{CD}$ ，则可得出结论;

(2) 证明 $\triangle DGE \sim \triangle PFC \sim \triangle ABC$ ，设 $CE = 4k$ ，那么 $PE = 6k$ ， $PG = 9k$ ，得出 $EG = 3\sqrt{13}k$ ， $DE = 13k$ ，求出 $\frac{OP}{OC} = \frac{PG}{CD} = \frac{9}{17}$ ，则可得出答案;

(3) 由题意画出图形，证明平行四边形 $ABCD$ 为菱形，设 $FB = FG = a$ ， $PF = FC = CE = b$ ，求出 $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ，得出 $\frac{DG}{GB} = \frac{BG}{BD} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，证明 $\triangle DGA \sim \triangle DAB$ ，设 $\angle DAG = \angle DBA = \angle ADB = \alpha$ ，那么 $\angle BAG = \angle BGA = 2\alpha$ ，求出 $\alpha = 36^\circ$ ，即可解答.

【小问1详解】

解：补全图形如下：

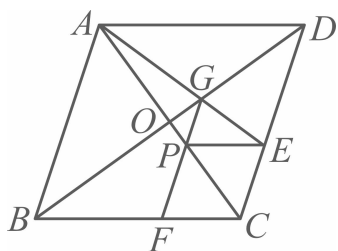


图3

$$\because BA = BC,$$

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 为菱形,

$$\text{设 } FB = FG = a, \quad PF = FC = CE = b,$$

$$\therefore GP = a - b,$$

$$\because GP \parallel CE,$$

$$\therefore \frac{PG}{CE} = \frac{AP}{AC} = \frac{BF}{BC},$$

$$\therefore \frac{a-b}{b} = \frac{a}{a+b},$$

$$\therefore a^2 - ab - b^2 = 0,$$

$$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0,$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad (\text{负根已舍}),$$

$$\therefore \frac{DG}{GB} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore \frac{DG}{GB} = \frac{BG}{BD} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore \frac{DG}{DA} = \frac{DA}{DB},$$

$$\text{又} \because \angle ADG = \angle BDA,$$

$$\therefore \triangle DGA \sim \triangle DAB,$$

$$\therefore \text{设 } \angle DAG = \angle DBA = \angle ADB = \alpha, \quad \text{那么 } \angle BAG = \angle BGA = 2\alpha,$$

$$\therefore \angle DBA + \angle BGA + \angle BAG = 5\alpha = 180^\circ,$$

$$\therefore \alpha = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 72^\circ.$$

【点睛】 本题属于四边形综合题，考查了矩形的判定与性质、平行四边形的性质、菱形的判定与性质、相

似三角形的判定与性质、勾股定理、等边对等角等知识，解答本题的关键是正确寻找相似三角形解决问题.