

杨浦区 2024-2025 学年度第一学期初三期末质量调研

数学学科

2025.1

(测试时间: 100 分钟, 满分: 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 对一个三角形进行放缩运动时, 下列结论中正确的是 ()

- | | |
|------------------|-----------------|
| A. 各个内角的大小始终保持不变 | B. 各条边的长度始终保持不变 |
| C. 三角形的面积始终保持不变 | D. 三角形的周长始终保持不变 |

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了三角形的面积, 解题的关键是根据相似三角形的性质来判断. 根据相似三角形的对应角相等、对应边成比例的性质来判断.

【详解】 解: 一个三角形进行放缩运动, 各个内角的大小始终保持不变, 故 A 符合题意;

一个三角形进行放缩运动, 各条边的长度也进行变化, 故 B 选项不符合题意;

一个三角形进行放缩运动, 各条边的长度也进行变化, 面积也进行变化, 故 C 选项不符合题意;

一个三角形进行放缩运动, 各条边的长度也进行变化, 周长也进行变化, 故 D 选项不符合题意,

故选: A.

2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 4$, $AC = 1$, 那么 $\sin B$ 的值是 ()

- | | | | |
|------------------|---------------------------|--------------------------|----------------|
| A. $\frac{1}{4}$ | B. $\frac{\sqrt{15}}{15}$ | C. $\frac{\sqrt{15}}{4}$ | D. $\sqrt{15}$ |
|------------------|---------------------------|--------------------------|----------------|

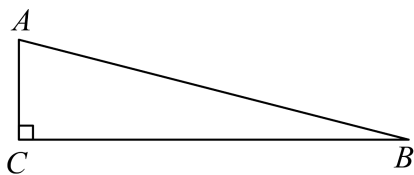
【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了求角的正弦值, 熟练掌握正弦的定义是解题的关键.

由正弦的定义即可直接得出答案.

【详解】解: 如图,



$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{4},$$

故选: A.

3. 下列二次函数中, 如果函数图像的顶点在 x 轴上, 那么这个函数是 ()

A. $y = x^2 - 2x$

B. $y = x^2 - 2x - 1$

C. $y = x^2 + 1$

D. $y = (x-1)^2$

【答案】D

【解析】

【分析】此题考查了二次函数的性质, 熟练掌握二次函数的顶点式是解答本题的关键.

分别写出各个二次函数的顶点坐标, 然后判断其位置即可解答.

【详解】解: A、 $y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$, 顶点坐标为 $(1, -1)$, 不在 x 轴上, 故 A 选项不符合题意;

B、 $y = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$, 顶点坐标为 $(1, -2)$, 不在 x 轴上, 故 B 选项不符合题意;

C、 $y = x^2 + 1$, 顶点坐标为 $(0, 1)$, 在 y 轴上, 故 C 选项不符合题意;

D、 $y = (x-1)^2$, 顶点坐标为 $(1, 0)$, 在 x 轴上, 故 D 选项符合题意;

故选: D.

4. 已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 都是非零向量, 下列结论中不能判定 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 的是 ()

A. $\vec{a} \parallel \vec{c}$, $\vec{b} \parallel \vec{c}$

B. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

C. $\vec{a} = 2\vec{b}$

D. $\vec{a} = 3\vec{c}$, $\vec{b} = 2\vec{c}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了平面向量的知识, 理解并掌握平行向量的定义是解题关键.

根据方向相同或相反的非零向量叫做平行向量, 对各选项分析判断即可.

【详解】解：A、 $\because a \parallel c, b \parallel c, \therefore \vec{a} \parallel \vec{b}$ ，故本选项不符合题意；

B、 $a+b=c$ ，但不一定平行，故本选项符合题意；

C、 $\because a=2b, \therefore \vec{a} \parallel \vec{b}$ ，故本选项不符合题意；

D、 $\because a=3c, b=2c, \therefore \vec{a} \parallel \vec{b}$ ，故本选项不符合题意。

故选：B.

5. 小海在距离地面高 60 米的热气球中测得地面上的着落点 P 的俯角为 37° ，那么此时热气球离着落点 P 的距离约是（ ）（参考数据： $\sin 37^\circ \approx 0.6, \cos 37^\circ \approx 0.8, \tan 37^\circ \approx 0.75$ ）

A. 75 米

B. 80 米

C. 100 米

D. $\frac{400}{3}$ 米

【答案】C

【解析】

【分析】 本题主要考查了解直角三角形的应用，根据题意画出图形，根据平行线的性质得出 $\angle EAP = \angle APC = 37^\circ$ ，根据正弦函数定义得出 $AP = \frac{AC}{\sin 37^\circ} \approx \frac{60}{0.6} = 100$ （米）即可.

【详解】解：由题意得： $AC \perp CP, AE \parallel CP$ ，

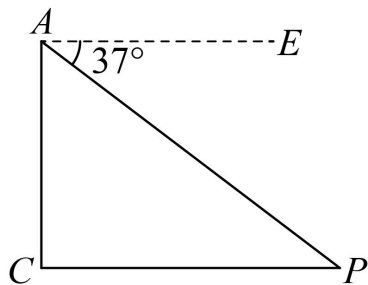
$\therefore \angle EAP = \angle APC = 37^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ACP$ 中， $AC = 60$ 米，

$\therefore AP = \frac{AC}{\sin 37^\circ} \approx \frac{60}{0.6} = 100$ （米），

此时热气球离着落点 P 的距离约是 100 米，

故选：C.



6. 在学习了“利用函数的图象研究函数”后，为了研究函数 $y = \frac{1}{-x^2 - 2x - 2}$ 的性质，小华用“描点法”

画它的图象，列出了如下表格：

x		-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	
-----	--	----	----	----	----	----	---	---	---	---	--

$y = \frac{1}{-x^2 - 2x - 2}$		$-\frac{1}{17}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{17}$	
-------------------------------	--	-----------------	-----------------	----------------	----------------	------	----------------	----------------	-----------------	-----------------	--

那么下列说法中正确的是 ()

- A. 该函数的图象关于 y 轴对称
- B. 该函数的图象没有最低点也没有最高点
- C. 该函数的图象经过第一、二、三、四象限
- D. 沿 x 轴的正方向看, 该函数的图象在对称轴左侧的部分是下降的

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了由表格法判断函数的图象, 根据 $x = 0$ 时, $y = -\frac{1}{2}$; $x = -2$ 时, $y = -\frac{1}{2}$, 可得对称轴为直线 $x = \frac{0-2}{2} = -1$, 可判断 A; 由当 $x < -1$ 时, y 随着 x 的增大而减小, 当 $x > -1$ 时, y 随着 x 的增大而增大, 当 $x = -1$ 时, y 取最小值 -1 , 可判断 B; 由 $-x^2 - 2x - 2 = -(x^2 + 2x + 2) = -[(x+1)^2 + 1] < 0$ 可知 $y < 0$, 可判断 C; 由函数图象的对称轴为直线 $x = -1$, 当 $x < -1$ 时, y 随着 x 的增大而减小, 可判断 D, 据此即可求解, 看懂表格中的数值是解题的关键.

【详解】解: A、 $\because x = 0$ 时, $y = -\frac{1}{2}$; $x = -2$ 时, $y = -\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = \frac{0-2}{2} = -1$, 故选项 A 错误;

B、由表可知, 当 $x < -1$ 时, y 随着 x 的增大而减小, 当 $x > -1$ 时, y 随着 x 的增大而增大, 当 $x = -1$ 时, y 取最小值 -1 ,

$\therefore$ 该函数的图象有最低点没有最高点, 故选项 B 错误;

C、 $\because -x^2 - 2x - 2 = -(x^2 + 2x + 2) = -[(x+1)^2 + 1] < 0$,

$\therefore y < 0$,

$\therefore$ 该函数的图像经过三、四象限, 不经过第一、二象限, 故选项 C 错误;

D、 $\because$ 函数图象的对称轴为直线 $x = -1$, 当 $x < -1$ 时, y 随着 x 的增大而减小,

$\therefore$ 沿 x 轴的正方向看, 该函数的图像在对称轴左侧的部分是下降的, 故选项 D 正确;

故选: D.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分) 【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 如果 $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$, 那么 $\frac{x}{x+y} =$ _____.

【答案】 $\frac{3}{7}$

【解析】

【分析】 本题考查比例的性质, 根据比例的基本性质, 可分别设出 x 和 y , 再代入进行计算即可得出结果. 解题的关键: 已知几个量的比值时, 常用的解法是: 设一个未知数, 把题目中的几个量用所设的未知数表示出来, 实现约分.

【详解】 解: $\because \frac{x}{y} = \frac{3}{4}$,

$\therefore$ 设 $x = 3k$, $y = 4k (k \neq 0)$,

$$\therefore \frac{x}{x+y} = \frac{3k}{3k+4k} = \frac{3k}{7k} = \frac{3}{7}.$$

故答案为: $\frac{3}{7}$.

8. 已知函数 $f(x) = 2x^2 + x - 1$, 那么 $f(2) =$ _____.

【答案】 9

【解析】

【分析】 本题考查了求函数值, 熟练掌握函数的相关知识是解题的关键. 将 $x = 2$ 直接代入函数解析式求值即可.

【详解】 解: $\because f(x) = 2x^2 + x - 1$,

$$\therefore f(2) = 2 \times 2^2 + 2 - 1 = 8 + 2 - 1 = 9,$$

故答案为: 9.

9. 已知抛物线 $y = (a-3)x^2$ 有最高点, 那么 a 的取值范围是 _____.

【答案】 $a < 3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次函数的图象与系数的关系, 解一元一次不等式等知识点, 熟练掌握二次函数的图象与系数的关系是解题的关键.

由抛物线 $y = (a-3)x^2$ 有最高点可知抛物线开口向下, 于是可得 $a-3 < 0$, 解不等式即可求出 a 的取值范

围.

【详解】解：∵抛物线 $y = (a-3)x^2$ 有最高点，

∴抛物线开口向下，

$$\therefore a-3 < 0,$$

解得： $a < 3$ ，

即： a 的取值范围是 $a < 3$ ，

故答案为： $a < 3$.

10. 如果两个相似三角形对应高的比是 $2:3$ ，那么它们的面积比是_____.

【答案】 $4:9$

【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的性质，熟练掌握相似三角形的性质是解题的关键.

由相似三角形的性质可知，相似三角形对应高的比等于相似比，而相似三角形的面积比等于相似比的平方，由此即可得出答案.

【详解】解：由相似三角形的性质可知，相似三角形对应高的比等于相似比，而相似三角形的面积比等于相似比的平方，

$$\therefore \text{它们的面积比是：} \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} = 4:9,$$

故答案为： $4:9$.

11. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ，垂足为点 D ， $BC = 9$ ， $\cos \angle ACD = \frac{3}{4}$ ，那么 AB 的长为_____

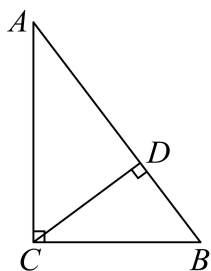
【答案】 12

【解析】

【分析】 本题主要考查了直角三角形的两个锐角互余，余弦的定义，已知余弦求边长等知识点，熟练掌握余弦的定义是解题的关键.

由 $\angle ACB = 90^\circ$ 可得 $\angle ACD + \angle BCD = 90^\circ$ ，由 $CD \perp AB$ 可得 $\angle CDB = 90^\circ$ ，由直角三角形的两个锐角互余可得 $\angle BCD + \angle B = 90^\circ$ ，进而可得 $\angle B = \angle ACD$ ，则 $\cos \angle B = \cos \angle ACD = \frac{3}{4}$ ，即 $\cos \angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$ ，由此即可求出 AB 的长.

【详解】解：如图，



$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\because CD \perp AB,$$

$$\therefore \angle CDB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD + \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle ACD,$$

$$\therefore \cos \angle B = \cos \angle ACD = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \cos \angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore AB = \frac{4}{3}BC = \frac{4}{3} \times 9 = 12,$$

故答案为：12.

12. 已知在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别是边 AB 、 AC 上的一点， $\frac{AD}{BD} = \frac{2}{3}$ ， $AC = 15$ ，要使 $DE \parallel BC$ ，那么 $AE =$ _____.

【答案】6

【解析】

【分析】本题考查了平行线分线段成比例，能灵活运用平行线分线段成比例的性质得出比例式是解此题的关键。根据平行线分线段成比例即可得出答案。

【详解】解：当 $DE \parallel BC$ 时，

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{BD} = \frac{2}{3},$$

$$\because AC = 15,$$

$$\therefore \frac{AE}{15 - AE} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore AE = 6.$$

故答案为：6.

13. 已知二次函数 $y = ax^2 - 2ax$ 的图像开口向上, 点 $A(-2, y_1)$ 和点 $B(0, y_2)$ 是该抛物线上的两点, 那么 y_1 _____ y_2 . (填 “>”、“=” 或 “<”)

【答案】>

【解析】

【分析】 本题考查了二次函数的图象与性质, 熟练掌握二次函数的图象与性质是解题的关键.

由二次函数的图象与性质可知抛物线对称轴为直线 $x = 1$, 结合二次函数 $y = ax^2 - 2ax$ 的图象开口向上可知, 当 $x < 1$ 时 y 随 x 的增大而减小, 然后由 $-2 < 0 < 1$ 即可得出答案.

【详解】 解: 抛物线对称轴为直线 $x = -\frac{-2a}{2a} = 1$,

$\because$ 二次函数 $y = ax^2 - 2ax$ 的图象开口向上,

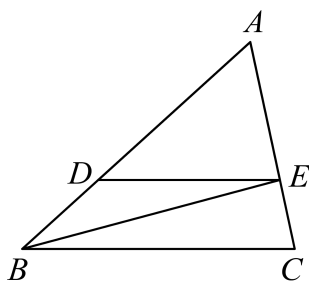
$\therefore$ 当 $x < 1$ 时, y 随 x 的增大而减小,

$\because -2 < 0 < 1$,

$\therefore y_1 > y_2$,

故答案为: >.

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, $DE \parallel BC$, $AD = 2DB$, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{BE} =$ _____. (用含 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示)



【答案】 $\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$

【解析】

【分析】 本题考查平面向量, 相似三角形的判定和性质, 根据已知推出 $\overrightarrow{DB} = \frac{1}{3}\vec{a}$, 根据相似三角形的性质推出 $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{b}$, 再根据平面向量的减法运算法则即可得出结果. 熟记平面向量的加减运算法则是解题的关键.

【详解】 解: $\because AD = 2DB$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$,

$$\therefore \overrightarrow{DB} = \frac{1}{3}\vec{a}, \quad AD = \frac{2}{3}AB,$$

$$\therefore DE \parallel BC, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{b},$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ABC, \quad \angle AED = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

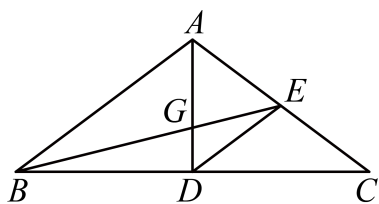
$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{2}{3}AB}{AB} = \frac{2}{3}, \quad \text{即 } DE = \frac{2}{3}BC,$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DB} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}.$$

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $BC = 8$, 中线 BE 与高 AD 交于点 G , 如果 $DE = \frac{5}{2}$, 那么 $BE = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{3\sqrt{17}}{2}$ $\frac{3}{2}\sqrt{17}$

【解析】

【分析】 本题考查了等腰三角形的性质、勾股定理、直角三角形斜边上的中线及三角形中位线定义, 熟知等腰三角形的性质及三角形中位线定理是解题的关键. 先根据等腰三角形的性质及 BE 为 $\triangle ABC$ 的中线, 得出 DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线, 进而可求出 AB 的长, 进一步可求出 AD 的长, 再过点 E 作 CD 的垂线, 构造出直角三角形, 利用勾股定理即可解决问题.

【详解】 解: 由题知,

$$\because AB = AC, \text{ 且 } AD \text{ 为高线}, \quad BC = 8,$$

$$\therefore BD = CD = \frac{1}{2}BC = 4.$$

又 $\because BE$ 是 $\triangle ABC$ 的中线,

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线.

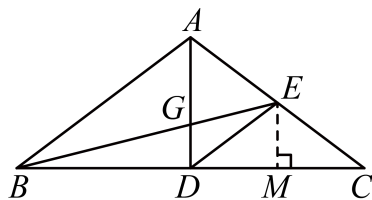
$$\because DE = \frac{5}{2},$$

$$\therefore AB = 2DE = 5.$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中,

$$AD = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

过点 E 作 BC 的垂线, 垂足为 M ,



$$\therefore DE = CE = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore DM = \frac{1}{2}DC = 2,$$

$$\therefore BM = BD + DM = 6.$$

又 $\because E$ 为 AC 中点,

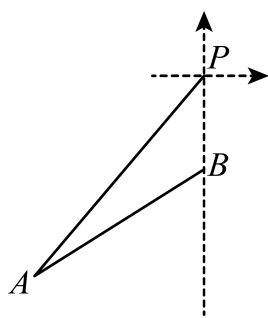
$$\therefore EM = \frac{1}{2}AD = \frac{3}{2}.$$

在 $\text{Rt}\triangle BEM$ 中,

$$BE = \sqrt{6^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{17}.$$

故答案为: $\frac{3}{2}\sqrt{17}$.

16. 如图, 小岛 A 在港口 P 的西南方向, 一艘船从港口 P 沿正南方向航行 12 海里后到达 B 处, 在 B 处测得小岛 A 在它的南偏西 60° 方向, 那么小岛 A 离港口 P 有_____海里. (结果保留根号)

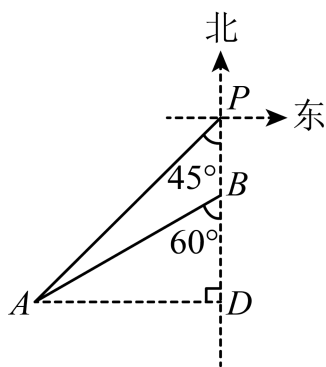


【答案】 $18\sqrt{2} + 6\sqrt{6}$ ## $6\sqrt{6} + 18\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查的是解直角三角形的应用-方向角问题, 正确标注方向角、熟记锐角三角函数的定义是解题的关键. 作 $AD \perp PB$ 于 D , 设 $BD = x$ 海里, 则 $AD = \sqrt{3}x$, 根据 $\angle APD = 45^\circ$ 可得 $AD = PD$, 列出方程, 求出 x 的值, 根据勾股定理计算即可.

【详解】解：过点 A 作 $AD \perp PB$ 于点 D ，



根据题意得：在 $\triangle APD$ 中， $\angle APD = 45^\circ$ ，在 $\triangle ABD$ 中， $\angle ABD = 60^\circ$ ， $PB = 12$ (海里)，

$$\therefore AD = PD,$$

设 $BD = x$ 海里，则 $AD = \sqrt{3}x$ 海里，

$$\therefore x + 12 = \sqrt{3}x,$$

$$\text{解得： } x = 6 + 6\sqrt{3},$$

$$\therefore AD = 18 + 6\sqrt{3},$$

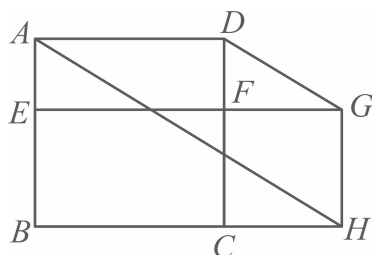
$$\therefore \angle APD = 45^\circ,$$

$$\therefore \frac{AD}{AP} = \frac{18 + 6\sqrt{3}}{AP} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{解得， } AP = 18\sqrt{2} + 6\sqrt{6}.$$

17. 如图，已知正方形 $ABCD$ 与正方形 $CFGH$ ， F 为 CD 边上一点， GF 的延长线交 AB 于点 E ，如果

$$AH \parallel DG, \text{ 连接 } CE, \text{ 那么 } \frac{S_{\triangle DFG}}{S_{\triangle BEC}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$



【答案】 $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

【解析】

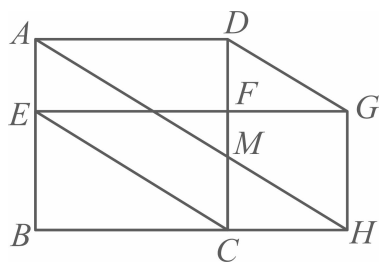
【分析】 本题考查了正方形的性质，相似三角形的判定与性质，解一元二次方程等知识点，掌握以上知识点是解答本题的关键.

先用含 a 、 b 的代数式表示出 $S_{\triangle DFG}$ 和 $S_{\triangle BEC}$ ，证明 $\triangle ABH \sim \triangle DFG$ ，得到 $\frac{AB}{DF} = \frac{BH}{FG}$ ，即 $\frac{a}{a-b} = \frac{a+b}{b}$ ，

化简得 $1 = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ ，设 $\frac{b}{a} = t$ ，化简得到关于 t 的一元二次方程，解出 t 的值，即得到 $\frac{b}{a}$ 的值，再由 $\frac{S_{\triangle DFG}}{S_{\triangle BEC}} = 1 - \frac{b}{a}$ ，

代入数据即可解答。

【详解】解：连接 CE ，如图：



设正方形 $ABCD$ 的边长为 a ，正方形 $CFGH$ 的边长为 b ，

则 $BC = a = AB$ ， $BE = CF = FG = b$ ，

$\therefore DF = a - b$ ，

$\therefore S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2}ab$ ， $S_{\triangle DFG} = \frac{1}{2}b \cdot (a - b)$ ，

$\therefore \frac{S_{\triangle DFG}}{S_{\triangle BEC}} = \frac{b(a-b)}{ab} = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$ ，

$\therefore AH \parallel DG$ ，

$\therefore \angle CMH = \angle FDG$ ，

$\therefore \angle CMH + \angle AHB = 90^\circ$ ， $\angle FDG + \angle DGF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AHB = \angle DGF$ ，

$\therefore \angle DFG = \angle DCH = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABH \sim \triangle DFG$ ，

$\therefore \frac{AB}{DF} = \frac{BH}{FG}$ ，

即 $\frac{a}{a-b} = \frac{a+b}{b}$ ，

$\therefore ab = a^2 - b^2$ ，

两边同除以 ab 得： $1 = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ ，

令 $\frac{b}{a} = t$ ，则 $\frac{a}{b} = \frac{1}{t}$ ，

$\therefore a > b$ ，

$$\therefore 0 < t < 1,$$

$$\therefore t - \frac{1}{t} + 1 = 0, \text{ 即 } t^2 + t - 1 = 0,$$

$$\text{解得: } t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$\because 0 < t < 1,$$

$$\therefore t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

$$\text{即 } \frac{b}{a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle DFG}}{S_{\triangle BEC}} = \frac{b(a-b)}{ab} = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a} = 1 - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) = \frac{3 - \sqrt{5}}{2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

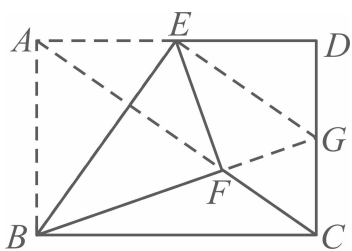
18. 已知矩形 $ABCD$ ($AD > AB$), 点 E 是边 AD 的中点, 将 $\triangle ABE$ 沿 BE 翻折, 点 A 的对应点 F 恰好落在对角线 AC 上, 那么 $\tan \angle FBC =$ _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 或 $\frac{1}{4}\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 延长 BF 交 CD 于点 G , 连接 EG , 由矩形的性质可得 $AB = CD$, $AB \parallel CD$, $\angle BAE = \angle BCD = \angle D = 90^\circ$, 由两直线平行内错角相等可得 $\angle BAF = \angle GCF$, 由折叠的性质可得 $AE = FE$, $AB = FB$, $\angle BAE = \angle BFE = 90^\circ$, 由等边对等角可得 $\angle BAF = \angle AFB$, 利用邻补角互补可得 $\angle EFG = 180^\circ - \angle BFE = 90^\circ$, 由对顶角相等可得 $\angle AFB = \angle CFG$, 进而可得 $\angle GCF = \angle CFG$, 由等角对等边可得 $FG = CG$, 由点 E 是 AD 边的中点可得 $AE = DE$, 进而可得 $DE = FE$, 利用 HL 可证得 $\text{Rt}\triangle EFG \cong \text{Rt}\triangle EDG$, 于是可得 $FG = DG$, 进而可得 $DG = CG$, 则 $CG = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB$, $FG = \frac{1}{2}AB$, 即 $AB = 2FG$, $BF = 2FG$, $BG = 3FG = 3CG$, 利用勾股定理可得 $BC = \sqrt{BG^2 - CG^2} = 2\sqrt{2}CG$, 然后根据 $\tan \angle FBC = \frac{CG}{BC}$ 即可得出答案.

【详解】 解: 如图, 延长 BF 交 CD 于点 G , 连接 EG ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AB = CD, \quad AB \parallel CD, \quad \angle BAE = \angle BCD = \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle GCF,$$

$\because$ 将 $\triangle ABE$ 沿 BE 翻折, 点 A 落到点 F 处,

$$\therefore AE = FE, \quad AB = FB, \quad \angle BAE = \angle BFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle AFB,$$

$$\because \angle BFE + \angle EFG = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EFG = 180^\circ - \angle BFE = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle AFB = \angle CFG,$$

$$\therefore \angle GCF = \angle CFG,$$

$$\therefore FG = CG,$$

$$\because \angle EFG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EFG = \angle D = 90^\circ,$$

$\because$ 点 E 是 AD 边的中点,

$$\therefore AE = DE,$$

$$\therefore DE = FE,$$

$$\text{又} \because EG = EG,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle EFG \cong \text{Rt}\triangle EDG \text{ (HL)},$$

$$\therefore FG = DG,$$

$$\therefore DG = CG,$$

$$\therefore CG = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore FG = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore AB = 2FG,$$

$$\therefore BF = 2FG,$$

$$\therefore BG = 3FG = 3CG,$$

$$\therefore BC = \sqrt{BG^2 - CG^2} = \sqrt{(3CG)^2 - CG^2} = 2\sqrt{2}CG,$$

$$\therefore \tan \angle FBC = \frac{CG}{BC} = \frac{CG}{2\sqrt{2}CG} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

故答案为: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

【点睛】本题主要考查了求角的正切值，矩形的性质，两直线平行内错角相等，折叠的性质，等边对等角，利用邻补角互补求角度，对顶角相等，等角对等边，线段中点的有关计算，全等三角形的判定与性质，线段的和与差，勾股定理等知识点，熟练掌握折叠的性质及勾股定理是解题的关键.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\cos 30^\circ - 2\sin^2 45^\circ + \frac{2}{2\sin 60^\circ - \tan 45^\circ}.$

【答案】 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】本题考查特殊角的三角函数值，涉及二次根式混合运算、分母有理化等知识，先由特殊角的三角函数值求出各部分，再由二次根式混合运算法则求解即可得到答案，熟记特殊角的三角函数值是解决问题的关键.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \cos 30^\circ - 2\sin^2 45^\circ + \frac{2}{2\sin 60^\circ - \tan 45^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{2}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \sqrt{3} + 1 \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

20. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(0, 3)$ 、点 $B(4, 3)$ 、点 $C(1, 0)$.

(1) 求此抛物线的表达式;

(2) 将上述抛物线平移, 使它的顶点移动到点 $(-2, 2)$ 的位置, 那么平移的方法是_____.

【答案】(1) $y = x^2 - 4x + 3$

(2) 向左平移 4 个单位, 再向上平移 3 个单位

【解析】

【分析】本题考查待定系数法求二次函数的解析式, 二次函数的性质、二次函数图象上点的坐标特征、二次函数的平移, 解答本题的关键是明确题意, 利用二次函数的性质解答.

(1) 根据待定系数法可以求得该抛物线的解析式;

(2) 先将原抛物线化为顶点式, 求得顶点坐标, 然后根据平移的特点, 即可写出平移的方法.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 经过点 $A(0, 3)$ 、点 $B(4, 3)$ 、点 $C(1, 0)$.

$$\therefore \begin{cases} c = 3 \\ 16a + 4b + c = 3 \\ a + b + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$$

即该抛物线的解析式为 $y = x^2 - 4x + 3$;

【小问 2 详解】

解: $\because y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$,

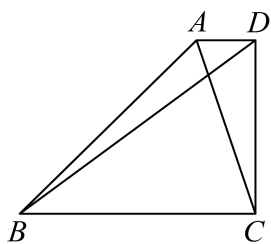
$\therefore$ 抛物线的顶点为 $(2, -1)$,

$\therefore$ 的顶点移动到点 $(-2, 2)$ 的位置,

$\therefore$ 抛物线应向左平移 4 个单位, 向上平移 3 个单位长度.

故答案为: 向左平移 4 个单位, 向上平移 3 个单位长度.

21. 如图, 已知在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle BCD = 90^\circ$, $BC = 8$, $AC = 2\sqrt{10}$, $\sin \angle DAC = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.



- (1) 求 BD 的长;
 (2) 求 $\angle ABD$ 的正切值.

【答案】 (1) 10

(2) $\frac{1}{7}$

【解析】

【分析】 (1) 由两直线平行同旁内角互补可得 $\angle ADC = 180^\circ - \angle BCD = 90^\circ$, 在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, 根据 $CD = AC \cdot \sin \angle DAC$ 即可求出 CD 的长, 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, 由勾股定理可得 $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2}$, 由此即可求出 BD 的长;

(2) 由 (1) 可得 $CD = 6$, $BD = 10$, 由勾股定理可得 $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = 2$, 可求得 $\cos \angle DBC = \frac{BC}{BD} = \frac{4}{5}$, 过点 A 作 $AE \perp BD$, 垂足为点 E , 则 $\angle AEB = \angle AED = 90^\circ$, 由两直线平行内错角相等可得 $\angle ADE = \angle DBC$, 进而可得 $\cos \angle ADE = \cos \angle DBC = \frac{4}{5}$, 在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中, 根据 $DE = AD \cdot \cos \angle ADE$ 可求得 DE 的长, 由勾股定理可得 $AE = \sqrt{AD^2 - DE^2}$, 由此可求得 AE 的长, 在 $\text{Rt}\triangle AEB$ 中, 根据 $BE = BD - DE$ 可求得 BE 的长, 然后根据 $\tan \angle ABD = \frac{AE}{BE}$ 即可求出 $\angle ABD$ 的正切值.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 梯形 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $\angle BCD = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle BCD = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中,

$$\because AC = 2\sqrt{10}, \sin \angle DAC = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\therefore CD = AC \cdot \sin \angle DAC = 2\sqrt{10} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = 6,$$

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $BC = 8$, $CD = 6$,

由勾股定理得:

$$BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10;$$

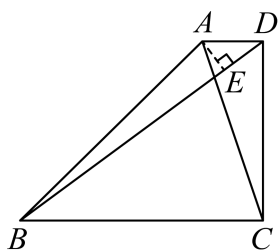
【小问 2 详解】

解：由 (1) 可得： $CD = 6$ ， $BD = 10$ ，

$$\therefore AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 - 6^2} = 2,$$

$$\cos \angle DBC = \frac{BC}{BD} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5},$$

如图，过点 A 作 $AE \perp BD$ ，垂足为点 E，



$$\therefore \angle AEB = \angle AED = 90^\circ,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle DBC,$$

$$\therefore \cos \angle ADE = \cos \angle DBC = \frac{4}{5},$$

$$\text{在 Rt}\triangle AED \text{ 中, } AD = 2, \cos \angle ADE = \frac{4}{5},$$

$$\therefore DE = AD \cdot \cos \angle ADE = 2 \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5},$$

$$\therefore AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{6}{5},$$

$$\text{在 Rt}\triangle AEB \text{ 中, } AE = \frac{6}{5},$$

$$BE = BD - DE = 10 - \frac{8}{5} = \frac{42}{5},$$

$$\therefore \tan \angle ABD = \frac{AE}{BE} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{42}{5}} = \frac{1}{7}.$$

【点睛】 本题主要考查了求角的余弦值，求角的正切值，已知余弦求边长，已知正弦值求边长，勾股定理，两直线平行内错角相等，两直线平行同旁内角互补，线段的和与差等知识点，熟练掌握勾股定理及解直角三角形的相关计算是解题的关键.

22. 定义：如图 1，已知点 Q、R 是 $\angle MON$ 的边 ON 上的两个定点，点 P 是边 OM 上的一个动点，当

$OP^2 = OQ \cdot OR$ 时，称点 P 是线段 QR 的最佳视野点. 如图 2，某商业广场上安装了一块巨型显示屏 AB ，点 A 到水平地面的距离 AC 为 5 米，在水平地面 CD 的 E 处有一个自动扶梯 EF ，点 A 、 B 、 C 在同一直线上. 已知自动扶梯 EF 的坡度是 1:2，点 E 到点 C 的距离是 10 米.

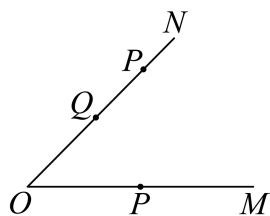


图1

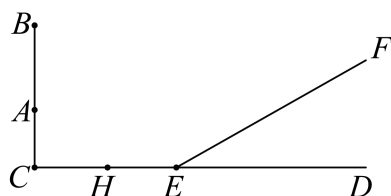


图2

(1) 当行人行走在水平地面 CE 时，发现点 H 恰好是屏幕 AB 的最佳视野点，且从点 H 测得点 B 的仰角为 60° . 求 AB 的长；(忽略行人的高度)

(2) 在 (1) 的条件下，如果要在自动扶梯 EF 上找到屏幕 AB 的最佳视野点，有人说“最佳视野点就是屏幕 AB 的垂直平分线与 EF 的交点”. 你同意这个说法吗？请通过计算说明理由. (忽略行人的高度)

【答案】 (1) AB 的长是 10 米

(2) 不同意，理由见解析

【解析】

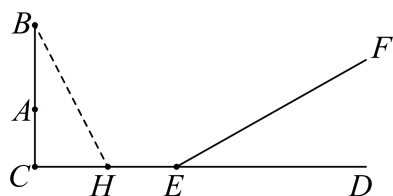
【分析】 本题主要考查了解直角三角形的应用-仰角俯角.

(1) 连接 BH ，由题意得 $\angle BHC = 60^\circ$ ， $\angle BCH = 90^\circ$ ， $AC = 5\text{m}$ ，设 CH 为 x ，则 BC 为 $\sqrt{3}x$ ，根据点 H 恰好是屏幕 AB 的最佳视野点列方程求出 x 即可解答；

(2) 作 AB 的垂直平分线交 AB 于 K ，交 EF 于点 G ，分别延长 FE 与 BC 交于点 L ，分别求出 LG ， LA ， LB ，计算得出 $LG^2 \neq LA \cdot LB$ ，从而判断点 G 不是屏幕 AB 的最佳视野点.

【小问 1 详解】

解：如图，连接 BH ，



由题意得， $\angle BHC = 60^\circ$ ， $\angle BCH = 90^\circ$ ， $AC = 5\text{m}$ ，

设 $CH = x$ ，则 $BH = 2x$ ， $BC = \sqrt{3}x$ ，

$\therefore$ 点 H 恰好是屏幕 AB 的最佳视野点，

$\therefore CH^2 = CA \cdot CB$ ，

$$\therefore x^2 = \sqrt{3}x \cdot 5,$$

解得: $x_1 = 0$ (舍去), $x_2 = 5\sqrt{3}$,

$$\therefore BC = \sqrt{3} \times 5\sqrt{3} = 15 \text{ (米)},$$

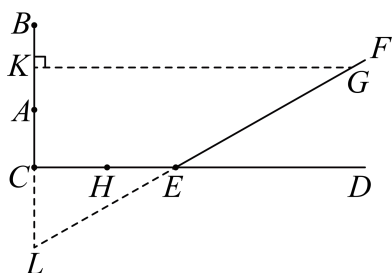
$$\therefore AB = BC - AC = 15 - 5 = 10 \text{ (米)},$$

$\therefore AB$ 的长是 10 米;

【小问 2 详解】

解: 不同意. 理由如下:

作 AB 的垂直平分线交 AB 于 K , 交 EF 于点 G , 分别延长 FE 与 BC 交于点 L ,



由题意, 可得: $\angle KGL = \angle CEL$, $AK = 5$,

$\therefore$ 自动扶梯 EF 的坡度是 1:2,

$$\therefore CL : CE = LK : KG = 1 : 2,$$

$$\therefore CE = 10,$$

$$\therefore CL = 5,$$

$$\therefore KL = AK + AC + CL = 15, \quad AL = AC + CL = 10, \quad BL = BC + CL = 20,$$

$$\therefore KG = 2KL = 30,$$

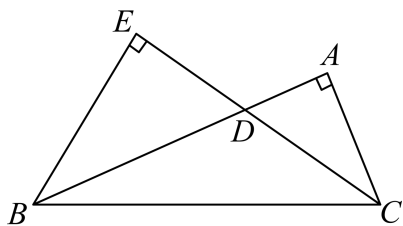
$$\therefore LG^2 = KL^2 + KG^2 = 15^2 + 30^2 = 1125,$$

$$\therefore LA \cdot LB = 10 \times 20 = 200,$$

$$\therefore LG^2 \neq LA \cdot LB,$$

$\therefore$ 点 G 不是自动扶梯 EF 上的最佳视野点.

23. 已知: 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, 点 D 是 AB 边上一点, 过点 B 作 $BE \perp CD$ 交 CD 延长线于点 E , $AD \cdot BC = BE \cdot CD$.



(1) 求证: $BE^2 = ED \cdot EC$;

(2) 求证: $AB \cdot BC = 2CE \cdot BE$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的判定与性质，三角形内角和定理，等腰三角形的判定与性质，掌握以上知识点是解答本题的关键.

(1) 先证明 $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ ，得到 $\angle ACD = \angle BCE$ ， $\angle ADC = \angle EBC$ ，又因为 $\angle ADC = \angle EDB$ ，所以 $\angle EDB = \angle EBC$ ，然后证明 $\triangle EBD \sim \triangle ECB$ ，得到 $\frac{ED}{BE} = \frac{BE}{EC}$ ，即可得证；

(2) 延长 CA 、 BE 交于点 H ，由已知条件得 $BC = CH$ ，又 $\angle ACD = \angle BCE$ ，所以 $\angle EDB = \angle EBC$ ，证明 $\triangle EBD \sim \triangle ECB$ ，得 $\frac{AB}{CE} = \frac{BH}{BC}$ ，即可得证.

【小问 1 详解】

证明: $\because AD \cdot BC = BE \cdot CD$,

$$\therefore \frac{AD}{BE} = \frac{CD}{BC},$$

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 与 $\text{Rt}\triangle BEC$ 中, $\angle E = \angle A = 90^\circ$, $\frac{AD}{BE} = \frac{CD}{BC}$,

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle BEC,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCE, \angle ADC = \angle EBC,$$

$$\text{又 } \angle ADC = \angle EDB,$$

$$\therefore \angle EDB = \angle EBC,$$

在 $\triangle EBD$ 与 $\triangle ECB$ 中, $\angle EDB = \angle EBC$, $\angle E$ 是公共角,

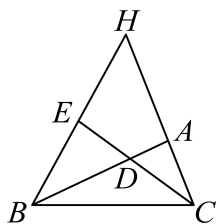
$$\therefore \triangle EBD \sim \triangle ECB,$$

$$\therefore \frac{ED}{BE} = \frac{BE}{EC},$$

$$\text{即 } BE^2 = ED \cdot EC;$$

【小问 2 详解】

解：延长 CA 、 BE 交于点 H ，如图：



$\because \angle ACD = \angle BCE$ ， $\angle BEC = 90^\circ$ ，由三角形内角和可得 $\angle EBC = \angle H$ ，

$\therefore BC = CH$ ，

又 $\angle ACD = \angle BCE$ ，

$\therefore BH = 2BE = 2EH$ ，

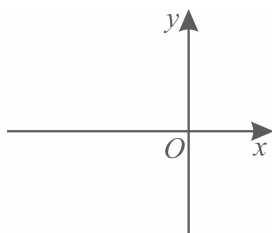
在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 与 $\text{Rt}\triangle BEC$ 中， $\angle BEC = \angle BAH = 90^\circ$ ， $\angle EBC = \angle H$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle ABH \sim \text{Rt}\triangle BEC$ ，

$$\therefore \frac{AB}{CE} = \frac{BH}{BC}，$$

即 $AB \cdot BC = 2BE \cdot CE$ 。

24. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = mx^2 + 6mx + n$ ($m < 0$) 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 B ，顶点为 D 。



(1) 求此抛物线的对称轴及点 B 的坐标；

(2) 点 P 是该抛物线上的一点，设对称轴与 x 轴交于点 E ，如果 BP 恰好平分线段 DE ，求点 P 的坐标 (用含 m 的式子表示)；

(3) 在 (2) 的条件下，连接 PD 、 AP ，当 $\angle DPB = \angle PAB$ 时，求 m 的值。

【答案】 (1) 对称轴是直线 $x = -3$ ，点 B 的坐标为 $(-5, 0)$

(2) 点 P 坐标为 $(-2, -3m)$

(3) $m = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 (1) 先根据对称轴方程求出对称轴，再根据轴对称的性质求出点 B 的坐标；

(2) 过点 P 作 $PG \perp x$ 轴于点 G , 将抛物线先写成交点式, 再化成顶点式求出顶点 D 及线段 DE 的中点坐标, 根据相似三角形的判定列方程求解;

(3) 延长 DP 交 x 轴于点 H , 求出点 H 的坐标, 证 $\triangle BPH \sim \triangle HAP$, 根据相似三角形的性质求出 PH , 然后在 $\text{Rt}\triangle PGH$ 中, 根据勾股定理列方程即可求解.

【小问 1 详解】

解: 抛物线对称轴是直线 $x = -\frac{6m}{2m} = -3$.

$\therefore$ 点 A 与点 B 关于对称轴对称, 点 $A(-1, 0)$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为: $(-5, 0)$.

【小问 2 详解】

$\therefore$ 抛物线与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, $B(-5, 0)$,

$$\therefore y = m(x+1)(x+5) = mx^2 + 6mx + 5m = m(x+3)^2 - 4m,$$

$\therefore n = 5m$, 点 E 坐标为 $(-3, 0)$, 顶点 D 的坐标为 $(-3, -4m)$

如图, 设 DE 的中点为 F , 则点 F 的坐标 $(-3, -2m)$.

设点 P 的坐标为 $[a, m(a^2 + 6a + 5)]$.

作 $PG \perp x$ 轴, 垂足为点 G .

$\therefore PG \perp x$ 轴, $DE \perp x$ 轴,

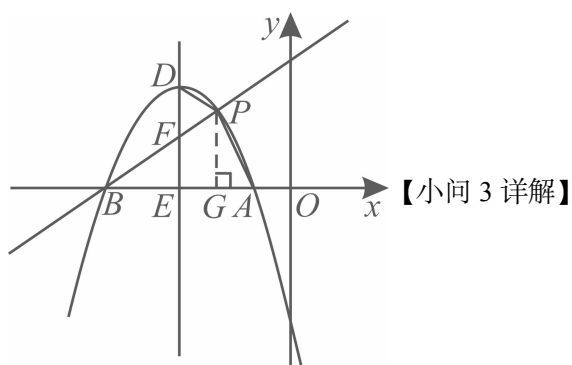
$\therefore PG \parallel DE$,

$\therefore BE : BG = EF : PF$,

$$\therefore \frac{2}{a+5} = \frac{-2m}{m(a^2 + 6a + 5)},$$

解得 $a = -2$ 或 $a = -5$ (舍去),

$\therefore$ 点 P 坐标为 $(-2, -3m)$;



如图，延长 DP 交 x 轴于点 H ，

$\therefore$ 点 $D(-3, -4m)$ ，点 P 坐标为 $(-2, -3m)$ 。

$\therefore$ 直线 PD 的函数解析式为： $y = mx - m$ 。

$\therefore$ 点 H 的坐标为 $(1, 0)$ 。

又 $\because \angle DPB = \angle PAB$ ，

$\therefore \angle BPH = \angle HAP$ 。

在 $\triangle BPH$ 与 $\triangle HAP$ 中， $\angle BPH = \angle HAP$ ， $\angle H$ 是公共角，

$\therefore \triangle BPH \sim \triangle HAP$ 。

$$\therefore \frac{PH}{AH} = \frac{BH}{PH},$$

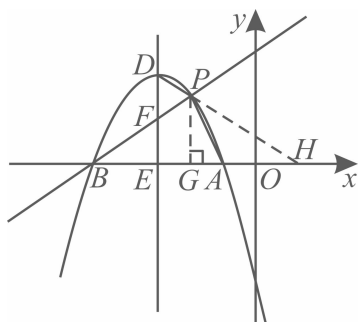
$\therefore PH^2 = AH \cdot BH$ ，又 $AH = 2$ ， $BH = 6$ ，

$\therefore PH = 2\sqrt{3}$ 。

在 $\text{Rt}\triangle PGH$ 中， $PH = 2\sqrt{3}$ ， $GP = -3m$ ， $GH = 3$ ，

$$\therefore (2\sqrt{3})^2 = (-3m)^2 + 3^2,$$

解得： $m_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ （舍去）或 $m_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。



【点睛】 本题考查了二次函数与几何的综合，考查了抛物线的性质，待定系数法求函数解析式，相似三角形的判定和性质，勾股定理等知识。利用点的坐标表示线段的长度、数形结合及构造辅助线是解本题的

关键.

25. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, 点 D 在边 BC 上, $CD = 3BD$.

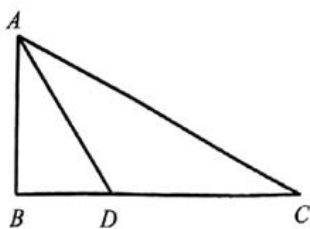


图 1

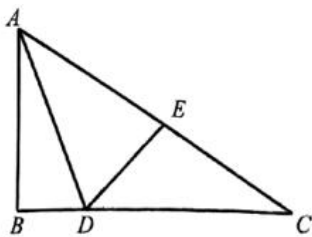


图 2

(1) 如图 1, 当 $AB = 6$, $\sin C = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 时, 求 AD 的长;

(2) 点 E 是 AC 边上一点, 满足 $\angle ADB = \angle ADE$.

①如图 2, 当 $CD^2 = CE \cdot CA$ 时, 求 $\frac{AB}{BC}$ 的值;

②当 $\triangle CDE$ 是等腰三角形时, 求 $\angle C$ 的余弦值.

【答案】 (1) $3\sqrt{5}$

(2) ① $\frac{\sqrt{11}}{4}$

② $\frac{4}{5}$ 或 $\frac{4\sqrt{10}-4}{9}$

【解析】

【分析】 (1) 由 $AC = \frac{AB}{\sin C}$ 可求得 AC , 由勾股定理可求得 $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$, 由 $CD = 3BD$ 可求得 $BD = \frac{1}{4}BC$, 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, 由勾股定理可得 $AD = \sqrt{AB^2 + BD^2}$, 由此即可求出 AD 的长;

(2) ①设 $BD = a$, 则 $CD = 3a$, $BC = 4a$, 过点 A 作 $AG \parallel BC$, 交 DE 延长线于点 G , 由 $CD^2 = CE \cdot CA$ 可得 $\frac{CE}{CD} = \frac{CD}{CA}$, 结合 $\angle C = \angle C$, 可证得 $\triangle CDE \sim \triangle CAD$, 于是可得 $\angle ADC = \angle DEC$, 则 $\angle ADB = \angle AED$, 进而可得 $\angle ADE = \angle AED$, 由等角对等边可得 $AD = AE$, 过点 A 作 $AH \perp DE$ 于点 H , 由三线合一可得 $DH = EH$, 由角平分线的性质可得 $AB = AH$, 由勾股定理可得 $BD = DH$, 则 $DE = 2a$, 由平行线分线段成比例定理可得 $\frac{AG}{CD} = \frac{GE}{DE}$, 由两直线平行内错角相等可得 $\angle ADB = \angle GAD$, 进而可得 $\angle GAD = \angle GDA$, 由等角对等边可得 $GA = GD$, 设 $GA = GD = b$, 则 $GE = b - 2a$, $\frac{b}{3a} = \frac{b-2a}{2a}$, 整理

得 $b = 6a$ ，则 $GH = 5a$ ，由勾股定理可得 $AH = \sqrt{GA^2 - GH^2} = \sqrt{11}a$ ，则 $AB = AH = \sqrt{11}a$ ，由此即可

求出 $\frac{AB}{BC}$ 的值；

②过点 A 作 $AP \parallel CD$ 交 DE 延长线于点 P，然后分三种情况讨论：i) 当 $DE = DC$ 时；ii) 当 $ED = EC$ 时；iii) 当 $CE = CD$ 时；分别求解即可求出 $\angle C$ 的余弦值.

【小问 1 详解】

解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = 6$ ， $\sin C = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

$$\therefore AC = \frac{AB}{\sin C} = 6\sqrt{5},$$

$$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 12,$$

$$\text{又} \because CD = 3BD,$$

$$\therefore BD = \frac{1}{4}BC = 3,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $AB = 6$ ， $BD = 3$ ，

$$\therefore AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = 3\sqrt{5};$$

【小问 2 详解】

解：① $\because CD = 3BD$ ，

$\therefore$ 设 $BD = a$ ，则 $CD = 3a$ ， $BC = 4a$ ，

如图 2，过点 A 作 $AG \parallel BC$ ，交 DE 延长线于点 G，

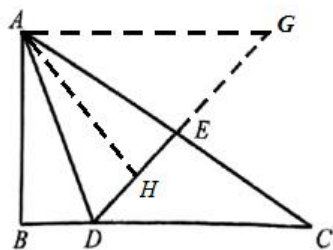


图 2

$$\therefore CD^2 = CE \cdot CA,$$

$$\therefore \frac{CE}{CD} = \frac{CD}{CA},$$

$$\therefore \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle CAD,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle DEC,$$

$$\because \angle ADC + \angle ADB = 180^\circ, \quad \angle DEC + \angle AED = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle AED,$$

$$\because \angle ADB = \angle ADE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED,$$

$$\therefore AD = AE,$$

如图 2, 过点 A 作 $AH \perp DE$ 于点 H, 则可得 $DH = EH$,

$$\text{又} \because \angle ADB = \angle ADH,$$

$$\therefore AB = AH,$$

$$\text{由勾股定理可得: } BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{AD^2 - AH^2} = DH,$$

$$\therefore DE = 2a,$$

$$\because AG \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle AGE \sim \triangle CDE,$$

$$\therefore \frac{AG}{CD} = \frac{GE}{DE}, \quad \angle ADB = \angle GAD,$$

$$\therefore \angle GAD = \angle GDA,$$

$$\therefore GA = GD,$$

设 $GA = GD = b$, 则 $GE = GD - DE = b - 2a$,

$$\therefore \frac{b}{3a} = \frac{b-2a}{2a},$$

整理, 得: $b = 6a$,

$$\therefore GH = 5a,$$

在 $\text{Rt}\triangle AGH$ 中, $GH = 5a$, $GA = 6a$,

$$\therefore AH = \sqrt{GA^2 - GH^2} = \sqrt{(6a)^2 - (5a)^2} = \sqrt{11}a,$$

$$\therefore AB = AH = \sqrt{11}a,$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{11}a}{4a} = \frac{\sqrt{11}}{4};$$

$$\textcircled{2} \because \angle ADB = \angle ADE, \quad \angle ADB + \angle BAD = 90^\circ, \quad \angle ADB + \angle ADE + \angle EDC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EDC = 2\angle BAD,$$

如图3，过点A作 $AP \parallel CD$ 交 DE 延长线于点P，

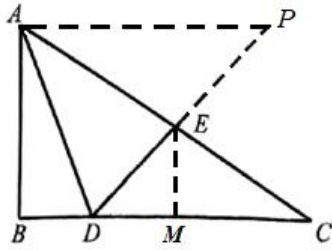


图3

分三种情况讨论：

i) 当 $DE = DC$ 时，

$$\angle DEC = \angle C = \frac{180^\circ - \angle EDC}{2} = \angle ADE,$$

$\therefore CE \parallel AD$,

但 CE 不平行 AD ，故此种情况不存在；

ii) 当 $ED = EC$ 时，

如图3，过点E作 $EM \perp BC$ ，垂足为M，

$$\therefore DM = CM = \frac{1}{2}CD = \frac{3}{2}a,$$

又 $\because \angle B = \angle EMC = 90^\circ$,

$\therefore EM \parallel AB$,

$$\therefore \frac{CE}{AE} = \frac{CM}{BM} = \frac{CM}{BD + DM} = \frac{\frac{3}{2}a}{a + \frac{3}{2}a} = \frac{3}{5},$$

$\because AP \parallel CD$,

$$\therefore \frac{AP}{CD} = \frac{AE}{EC} = \frac{PE}{ED} = \frac{5}{3},$$

$$\therefore AP = \frac{5}{3}CD = \frac{5}{3} \times 3a = 5a,$$

又 $\because ED = EC$,

$$\therefore AE = PE,$$

$$\therefore AC = PD,$$

由①可知：此时 $PA = PD$,

$$\therefore AC = 5a,$$

$$\therefore \cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{BD+CD}{AC} = \frac{a+3a}{5a} = \frac{4}{5};$$

iii) 当 $CE = CD = 3a$ 时,

同理可得: $PA = PD = AE$,

设 $PA = PD = AE = b$,

如图 4, 延长 DB 至点 O , 使得 $DO = DP$, 连接 OA ,

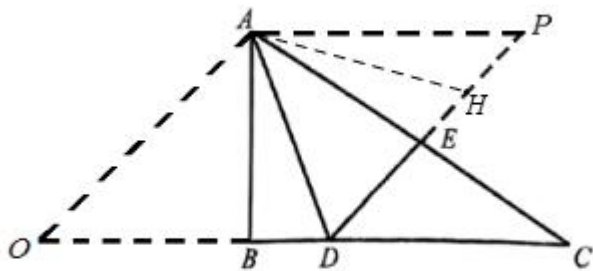


图 4

又 $\angle ADO = \angle ADP$, $AD = AD$,

$\therefore \triangle AOD \cong \triangle APD$ (SAS),

$\therefore AO = AP, \angle O = \angle P$,

过 P 作 $PH \perp PE$ 于 H , 则 $PE = 2PH$, $\angle AEP = \angle ABO = 90^\circ$,

$\therefore \triangle APE \cong \triangle AOB$,

$\therefore PH = BO$,

$\therefore PE = 2OB$,

$\therefore OB = DO - BD = b - a$, $PE = 2b - 2a$,

又 $\because PD = b$,

$\therefore DE = PD - PE = 2a - b$,

$\because AP \parallel BC$,

$\therefore \triangle APE \sim \triangle CDE$,

$$\therefore \frac{AP}{CD} = \frac{PE}{ED},$$

$$\therefore \frac{b}{3a} = \frac{2b-2a}{2a-b},$$

整理, 得: $b^2 + 4ab - 6a^2 = 0$,

解得: $b = (\sqrt{10} - 2)a$,

$$\therefore AC = AE + CE = AE + CD = b + 3a = (\sqrt{10} - 2)a + 3a = (\sqrt{10} + 1)a,$$

$$\therefore \cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{BD + CD}{AC} = \frac{a + 3a}{(\sqrt{10} + 1)a} = \frac{4}{\sqrt{10} + 1} = \frac{4\sqrt{10} - 4}{9};$$

综上, $\cos C = \frac{4}{5}$ 或 $\frac{4\sqrt{10} - 4}{9}$,

即: $\angle C$ 的余弦值为 $\frac{4}{5}$ 或 $\frac{4\sqrt{10} - 4}{9}$.

【点睛】 本题主要考查了已知正弦值求边长, 相似三角形的判定与性质, 等角对等边, 三线合一, 角平分线的性质定理, 勾股定理, 平行线分线段成比例定理, 两直线平行内错角相等, 线段的和与差, 直角三角形的两个锐角互余, 等边对等角, 三角形的内角和定理, 同位角相等两直线平行, 求角的余弦值, 全等三角形的判定与性质, 公式法解一元二次方程等知识点, 熟练掌握相关知识点并能加以综合运用是解题的关键.