

黄浦区 2023 年九年级学业水平考试模拟考数学试卷

(满分 150 分, 考试时间 100 分钟)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题;
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

(下列各题的四个选项中, 有且只有一个是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上)

1. 下列各数中, 最小的数是 ()

- A. 0 B. -2 C. 1 D. $-\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据正实数都大于 0, 负实数都小于 0, 正实数大于一切负实数, 两个负实数绝对值大的反而小, 进行比较.

【详解】最小的数是 -2 , 故选 B.

【点睛】本题考查了比较实数的大小, 要熟练掌握任意两个实数比较大小的方法. (1) 正实数都大于 0, 负实数都小于 0, 正实数大于一切负实数, 两个负实数绝对值大的反而小. (2) 利用数轴也可以比较任意两个实数的大小, 即在数轴上表示的两个实数, 右边的总比左边的大, 在原点左侧, 绝对值大的反而小.

2. 下列轴对称图形中, 对称轴条数最多的是 ()

- A. 等边三角形 B. 菱形 C. 等腰梯形 D. 圆

【答案】D

【解析】

【分析】依据轴对称图形的意义, 即在同一个平面内, 一个图形沿某条直线对折, 对折后的两部分都能完全重合, 则这个图形就是轴对称图形, 这条直线就是其对称轴, 从而可以画出它们的对称轴.

【详解】解: 等边三角形有 3 条对称轴, 菱形有 2 条对称轴, 等腰梯形有 1 条对称轴, 圆形有无数条对称轴, 圆的对称轴条数最多,

故选: D.

【点睛】此题主要考查如何确定轴对称图形的对称轴条数及位置，解题的关键是掌握轴对称的概念.

3. 设 a 是一个不为零的实数，下列式子中，一定成立的是 ()

- A. $3-a > 2-a$ B. $3a > 2a$ C. $-3a > -2a$ D. $\frac{3}{a} > \frac{2}{a}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据不等式的性质，逐项判断即可求解.

【详解】解：A、 $3-a > 2-a$ ，一定成立，故本选项符合题意；

B、当 $a > 0$ 时， $3a > 2a$ ，故本选项不符合题意；

C、当 $a < 0$ 时， $-3a > -2a$ ，故本选项不符合题意；

D、当 $a > 0$ 时， $\frac{3}{a} > \frac{2}{a}$ ，故本选项不符合题意；

故选：A

【点睛】本题主要考查了不等式的性质，熟练掌握不等式的性质是解题的关键.

4. 某校为了解学生在假期阅读课外书籍的情况，将调查所得的 50 个数据整理成下表：

课外书籍（本）	1	2	3	4	5
人数（人）	10	10	20	5	5

对于这组数据，下列判断中，正确的是 ()

- A. 众数和平均数相等 B. 中位数和平均数相等
C. 中位数和众数相等 D. 中位数、众数和平均数都相等

【答案】C

【解析】

【分析】利用数据处理中各参考量的定义求解判断即可.

【详解】众数是指出现最多的数，为 3；

中位数是指大小排序后位于中间的一位数或中间两位数的平均值，为 3；

平均数为总数除以总量的值，为 $\frac{1 \times 10 + 2 \times 10 + 3 \times 20 + 4 \times 5 + 5 \times 5}{50} = 2.7$ ；

中位数和众数相等，只有选项 C 正确.

故选 C.

【点睛】本题考查数据处理中中位数、众数、平均数的定义和算法，熟悉数据参考量的算法和正确的计算是解题的关系.

5. “利用描点法画出函数图像，探究函数的一些简单性质”是初中阶段研究函数的主要方式，请试着探究

函数 $y = -x^3$ ，其图像经过（ ）

- A. 第一、二象限
- B. 第三、四象限
- C. 第一、三象限
- D. 第二、四象限

【答案】D

【解析】

【分析】根据 x 的取值，判断 y 的范围即可求解.

【详解】解：当 $x < 0$ 时， $y > 0$ ；此时点在二象限；

当 $x > 0$ 时， $y < 0$ ；此时点在四象限.

故选：D.

【点睛】本题主要考查函数的图像、描点法等知识点，掌握分类讨论思想是解答本题的关键.

6. 要检验一个四边形的桌面是矩形，可行的测量方案是（ ）

- A. 任选两个角，测量它们的角度；
- B. 测量四条边的长度；
- C. 测量两条对角线的长度；
- D. 测量两条对角线的交点到四个顶点的距离.

【答案】D

【解析】

【分析】利用矩形的判定定理逐个选项查看即可.

【详解】选项 A 中任意两个角只能判定一对角互补或相等，或两个直角，有可能为直角梯形，判断四边形为矩形需要 3 个角是直角，选项 A 错误；

选项 B 中，四条边的关系为对边相等，可能仅是平行四边形，选项 B 错误；

选项 C 中，对角线长度相等但是不是平行四边形时，仅为普通四边形，选项 C 错误；

选项 D 中，根据对角线交点到四个顶点的距离分别相等，判断对角线互相平分则为平行四边形，又通过对角线相等判断为矩形.

故选 D.

【点睛】矩形的判定定理有 3 条，三个角是直角的四边形；对角线相等的平行四边形；有一个角是直角的平行四边形. 熟练的应用判定定理是解题的关键.

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. 冬季某日中午 12 时的气温是 3°C ，经过 10 小时后气温下降 8°C ，那么该时刻的气温是_____ $^{\circ}\text{C}$.

【答案】-5

【解析】

【分析】用 $3-8$ 进行计算即可.

【详解】解：由题意，得：该时刻的气温是 $3-8=-5^{\circ}\text{C}$ ；

故答案为：-5.

【点睛】本题考查有理数减法的实际应用. 熟练掌握有理数的减法法则，是解题的关键.

8. 计算： $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $-\frac{1}{2}$ ## -0.5

【解析】

【分析】如果一个数 x ，使得 $x^3 = a$ ，则 x 就是 a 的立方根，据此进行求解即可得到答案.

【详解】解： $\because \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8},$

$$\therefore \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2},$$

故答案为： $-\frac{1}{2}.$

【点睛】本题考查了立方根的计算，熟练掌握立方根的定义是解题关键.

9. 已知 $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ，那么 $f(-1) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{1}{2}$ ## 0.5

【解析】

【分析】根据自变量与函数值的对应关系，把 $x=-1$ 代入计算可得答案.

【详解】解：当 $x=-1$ 时， $f(-1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$

故答案为： $\frac{1}{2}$

【点睛】本题考查了函数值，把自变量的值代入函数解析式是解题关键.

10. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 3x + k = 0$ 无实数根，那么 k 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $k > \frac{9}{4}$

【解析】

【分析】利用一元二次方程根的判别式进行计算即可.

【详解】 $x^2 - 3x + k = 0$ 为关于 x 的一元二次方程，无实根则 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$$(-3)^2 - 4k < 0$$

$$\therefore k > \frac{9}{4}$$

故答案为: $k > \frac{9}{4}$

【点睛】本题考查一元二次方程根的判别式，须注意确保方程的二次项系数不为 0，才能保证是一元二次方程，才能使用根的判别式。熟悉一元二次方程根的判别式的公式和正确的计算是解题的关键。

11. 小聪和小明两个同学玩“石头、剪刀、布”的游戏，随机出手一次是平局的概率是_____。

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】列表表示所有可能出现的结果，再确定符合条件的结果，根据概率公式计算即可。

【详解】解：列表如下：

	石头	剪子	布
石头	(石头，石头)	(石头，剪子)	(石头，布)
剪子	(剪子，石头)	(剪子，剪子)	(剪子，布)
布	(布，石头)	(布，剪子)	(布，布)

一共有 9 种可能出现的结果，每种结果出现的可能性相同，出手相同的时候即为平局，有 3 种，所以随机出手一次平局的概率是 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ，

故答案为: $\frac{1}{3}$ 。

【点睛】本题主要考查了列表求概率，掌握概率计算公式是解题的关键。

12. 已知某反比例函数的图像在其所在的每个象限内，y 的值随 x 的值增大而增大，那么这个反比例函数可以是_____。（只需写出一个）

【答案】 $y = -\frac{1}{x}$ （答案不唯一）

【解析】

【分析】根据反比例函数的性质，即可求解。

【详解】解：∵反比例函数的图像在其所在的每个象限内，y 的值随 x 的值增大而增大，

∴这个反比例函数可以是 $y = -\frac{1}{x}$ 。

故答案为: $y = -\frac{1}{x}$ （答案不唯一）

【点睛】本题主要考查了反比例函数的图象和性质，熟练掌握反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ ，当 $k > 0$ 时，图象

位于第一、三象限内，在每一象限内， y 随 x 的增大而减小；当 $k < 0$ 时，图象位于第二、四象限内，在每一象限内， y 随 x 的增大而增大是解题的关键.

13. 已知一次函数的图像经过点 $(1, 3)$ ，且与直线 $y = 2x + 6$ 平行，那么这个一次函数的解析式是_____.

【答案】 $y = 2x + 1$ ## $y = 1 + 2x$

【解析】

【分析】 设一次函数的解析式为 $y = kx + b$ ，由题可知， $k = 2$ ，再代入点 $(1, 3)$ 求出 b ，进而得出一次函数解析式.

【详解】 解：设一次函数解析式是 $y = kx + b$ ，

$\because$ 该一次函数与直线 $y = 2x + 6$ 平行，

$\therefore k = 2$ ，

$\because$ 一次函数的图象经过点 $(1, 3)$ ，

$\therefore 2 + b = 3$ ，

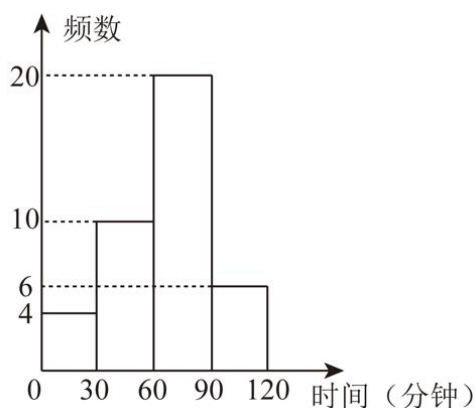
解得： $b = 1$ ，

$\therefore$ 一次函数的解析式是 $y = 2x + 1$.

故答案为： $y = 2x + 1$.

【点睛】 本题主要考查了一次函数的图象和性质，熟练掌握一次函数的图象和性质是解题的关键.

14. 某学校为了解七年级学生某天书面作业完成时间的情况，从该校七年级学生中随机抽取 40 人进行调查，调查结果绘制成如图所示的频数分布直方图（每个小组包括最小值，不包括最大值）. 根据图中信息，该校七年级 200 名学生中，这一天书面作业完成时间少于 90 分钟的约有_____人.



【答案】 170

【解析】

【分析】根据频数直方图可知 40 人中有 34 人完成时间少于 90 分钟，求出所占百分比，再估计 200 人中完成时间少于 90 分钟的人数即可.

【详解】解：由题意得：

$$200 \times \frac{4+10+20}{40} = 170 \text{ (人)}$$

故答案为：170.

【点睛】本题主要考查样本与总体的关系，熟练掌握用样本估计总体是解决本题的关键.

15. 已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，设 $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{CG}$ 用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 可表示为_____.

【答案】 $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】如图，先根据向量的减法法则求出 $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$ ，根据 D 点是 AB 边的中点求出 $\overrightarrow{BD}$ ，再由向量的加法法则求出 $\overrightarrow{CD}$ ，然后根据 G 是 $\triangle ABC$ 的重心即可求出 $\overrightarrow{CG}$.

【详解】如图， D 点是 AB 边的中点， G 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\because \overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$$

$\because D$ 点是 AB 边的中点，

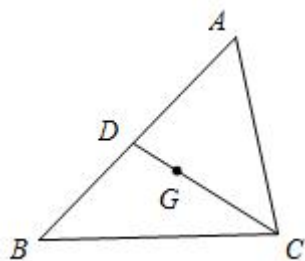
$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

$\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}.$$

故答案为： $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.



【点睛】本题考查三角形的重心，向量的计算等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

16. 在直角坐标平面内, 已知点 $A(1, -3)$, $B(4, -1)$, 将线段 AB 平移得到线段 A_1B_1 (点 A 的对应点是点 A_1 , 点 B 的对应点是点 B_1), 如果点 A_1 坐标是 $(-2, 0)$, 那么点 B_1 的坐标是_____.

【答案】 $(1, 2)$

【解析】

【分析】各对应点之间的关系是横坐标减 3, 纵坐标加 3, 那么让点 B 的横坐标减 3, 纵坐标加 3 即为点 B_1 的坐标.

【详解】解: $\because A(1, -3)$ 平移后对应点 A_1 的坐标为 $(-2, 0)$,

$\therefore A$ 点的平移方法是: 先向左平移 3 个单位, 再向上平移 3 个单位,

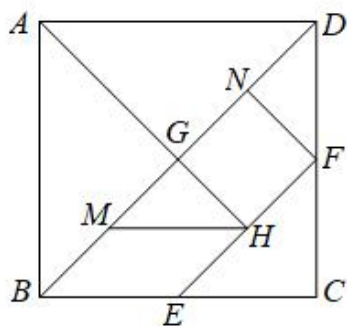
$\therefore B$ 点的平移方法与 A 点的平移方法是相同的,

$\therefore B(4, -1)$ 平移后的坐标是: $(4-3, -1+3)$ 即 $(1, 2)$.

故答案为: $(1, 2)$.

【点睛】此题主要考查了点的平移规律与图形的平移, 关键是掌握平移规律, 左右移, 纵不变, 横减加, 上下移, 横不变, 纵加减.

17. 七巧板是中国传统智力玩具, 现用以下方法制作一副七巧板: 如图所示, 取一张边长为 20 厘米的正方形纸板, 联结对角线 BD ; 分别取 BC 、 CD 中点 E 、 F , 联结 EF ; 过点 A 作 EF 垂线, 分别交 BD 、 EF 于 G 、 H 两点; 分别取 BG 、 DG 中点 M 、 N , 联结 MH 、 NF , 沿图中实线剪开即可得到一副七巧板. 其中四边形 $GHEF$ 的面积是_____平方厘米.



【答案】 50

【解析】

【分析】根据勾股定理求出 BD , 证明四边形 $GHEF$ 是正方形, 即可解得.

【详解】根据勾股定理可得,

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 20\sqrt{2},$$

$\because BC、CD$ 中点 $E、F$ ，联结 EF ，

$\therefore EF \parallel BD$ ，

$$EF = \frac{1}{2}BD = 10\sqrt{2}，$$

$\because N$ 是 DG 的中点，

$$\therefore GN = 5\sqrt{2}$$

$\because$ 根据对称性， $EF \perp AH$ ，

$$\therefore EH = HF = 5\sqrt{2}，$$

$$\because GN = HF = 5\sqrt{2}，$$

$$GN \parallel HF，$$

$\therefore$ 四边形 $GHFN$ 是平行四边形，

又 $\because \angle NGH = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $GHFN$ 是矩形，

$$\because \angle NDF = \angle DFN = 45^\circ，$$

$$\therefore DN = NF = 5\sqrt{2}，$$

$\therefore$ 四边形 $GHFN$ 是正方形，

$$\therefore S_{GHFN} = 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 50\text{cm}^2，$$

故答案为：50.

【点睛】此题考查了正方形的证明和面积，解题的关键是熟悉正方形的性质.

18. 我们规定：在四边形 $ABCD$ 中， O 是边 BC 上的一点. 如果 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OCD$ 全等，那么点 O 叫做该四边形的“等形点”. 在四边形 $EFGH$ 中， $\angle EFG = 90^\circ$ ， $EF \parallel GH$ ， $EF = 1$ ， $FG = 3$ ，如果该四边形的“等形点”在边 FG 上，那么四边形 $EFGH$ 的周长是_____.

【答案】8 或 $6 + \sqrt{10}$

【解析】

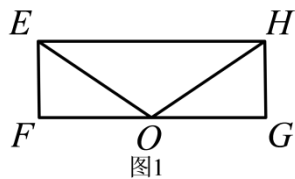
【分析】根据平行线的性质，得到 $\angle FGH = 90^\circ$ ，分两种情况讨论：当 $\triangle OEF \cong \triangle OHG$ 时，证明四边形 $EFGH$ 是平行四边形，据此即可求出四边形 $EFGH$ 的周长；当 $\triangle OEF \cong \triangle OGH$ 时，根据全等三角形的性质，推出 $GH = 2$ ， $\angle EOH = 90^\circ$ ，利用勾股定理，依次求出 $OE = \sqrt{5}$ ， $EH = \sqrt{10}$ ，即可求出四边形 $EFGH$ 的周长.

【详解】解： $\because \angle EFG = 90^\circ$ ， $EF \parallel GH$ ，

$$\therefore \angle FGH = 90^\circ,$$

$\because$ 四边形 $EFGH$ 的“等形点”在边 FG 上,

如图 1, 当 $\triangle OEF \cong \triangle OHG$ 时, 则 $EF = HG = 1$,



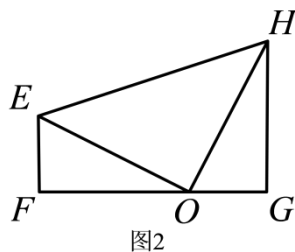
$$\because EF \parallel GH,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形,

$$\therefore EH = FG = 3,$$

$$\therefore \text{四边形 } EFGH \text{ 的周长为 } (1+3) \times 2 = 8;$$

如图 2, 当 $\triangle OEF \cong \triangle HOG$ 时,



$$\therefore EF = OG = 1, \quad OF = GH, \quad OE = OH, \quad \angle OEF = \angle HOG,$$

$$\because FG = 3,$$

$$\therefore OF = FG - OG = 3 - 1 = 2,$$

$$\therefore GH = 2,$$

$$\because \angle EFO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OEF + \angle EOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HOG + \angle EOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EOH = 180^\circ - (\angle HOG + \angle EOF) = 90^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle EFO \text{ 中, } OE = \sqrt{EF^2 + OF^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore OE = OH = \sqrt{5},$$

$$\text{在 Rt}\triangle EOH \text{ 中, } EH = \sqrt{OE^2 + OH^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore \text{四边形 } EFGH \text{ 的周长为 } 1 + 3 + 2 + \sqrt{10} = 6 + \sqrt{10},$$

故答案为: 8 或 $6 + \sqrt{10}$.

【点睛】 本题考查了全等三角形的性质, 平行四边形的判定和性质, 勾股定理等知识, 熟练掌握全等三角形的性质是解题关键.

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 计算: $\left(\frac{x+2}{x-3} - \frac{8x}{x^2-x-6}\right) \div \frac{x-2}{x+2}$.

【答案】 $\frac{x-2}{x-3}$

【解析】

【分析】 把括号内通分进行减法运算, 再将除法运算转化为乘法运算, 然后约分即可.

【详解】 解: 原式 = $\left[\frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-3)} - \frac{8x}{(x+2)(x-3)}\right] \cdot \frac{x+2}{x-2}$

$$= \frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-3)} \cdot \frac{x+2}{x-2}$$
$$= \frac{x-2}{x-3}.$$

【点睛】 本题考查了分式的混合运算, 熟练掌握运算法则及运算顺序是解题的关键.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 - y = -1 & \text{①} \\ x - y = 1 & \text{②} \end{cases}$$

【答案】 $\begin{cases} x = 0 \\ y_1 = -1 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 2 \end{cases}$

【解析】

【分析】 由方程②, 得 $x = y + 1$ ③, 将③代入①, 得 $(y+1)^2 - 2y^2 - y = -1$, 解得 $y_1 = -1, y_2 = 2$, 将 $y_1 = -1$ 代入③, 得 $x_1 = 0$; 将 $y_1 = 2$ 代入③, 得 $x_2 = 3$, 即可得到方程组的解

【详解】 解: 由方程②, 得 $x = y + 1$ ③

将③代入①, 得 $(y+1)^2 - 2y^2 - y = -1$

解, 得 $y_1 = -1, y_2 = 2$

将 $y_1 = -1$ 代入③, 得 $x_1 = 0$;

将 $y_1 = 2$ 代入③, 得 $x_2 = 3$

所以，原方程的解是 $\begin{cases} x = 0 \\ y_1 = -1 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 2 \end{cases}$.

【点睛】此题考查了二元二次方程组，熟练掌握二元二次方程组的解法是解题的关键.

21. 小丽与妈妈去商场购物，商场正在进行打折促销，规则如下：

优惠活动一：任选两件商品，第二件半价（两件商品价格不同时，低价商品享受折扣）；

优惠活动二：所有商品打八折.

（两种优惠活动不能同享）

（1）如果小丽的妈妈看中一件价格 600 元的衣服和一双 500 元的鞋子，那么她选择哪个优惠活动会更划算？请通过计算说明；

（2）如果小丽的妈妈想将之前看中的鞋子换成一条裤子，当裤子价格（裤子价格低于衣服价格）低于多少元时，小丽会推荐妈妈选择优惠活动二？为什么？

【答案】（1）选择优惠活动一更划算，见解析

（2）当裤子价格低于 400 元时，推荐选择优惠活动二，见解析

【解析】

【分析】（1）分别计算出两种优惠活动的总价格，再比较那个价格更低即可得解答；

（2）按照优惠活动列出不等式解答.

【小问 1 详解】

解：选择优惠活动一更划算，理由如下：

活动一价格： $600 + 500 \times 0.5 = 850$ （元），

活动二价格： $(600 + 500) \times 0.8 = 880$ （元），

$\therefore 850 < 880$,

$\therefore$ 选择优惠活动一更划算.

【小问 2 详解】

解：当裤子价低于 400 元时，推荐选择优惠活动二，

设裤子的价格为 $x(x < 600)$ 元，

则活动一的价格为 $(600 + 0.5x)$ 元；

活动二的价格为 $(480 + 0.8x)$ 元，

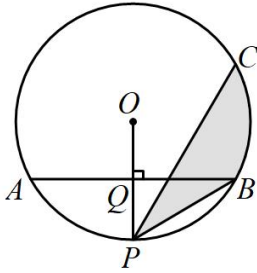
由题意，得 $600 + 0.5x > 480 + 0.8x$,

解，得 $x < 400$.

∴当裤子价格低于 400 元时，推荐选择优惠活动二.

【点睛】 本题考查了方案选择问题，一元一次不等式与实际问题，审清题意找出等量关系是解题的关键.

22. 已知，如图， $\odot O$ 的半径为 2，半径 OP 被弦 AB 垂直平分，交点为 Q ，点 C 在圆上，且 $\widehat{BC} = \widehat{BP}$.



- (1) 求弦 AB 的长；
- (2) 求图中阴影部分面积 (结果保留 π).

【答案】 (1) $AB = 2\sqrt{3}$

$$(2) S_{\text{阴}} = \frac{2}{3}\pi$$

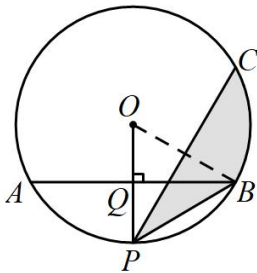
【解析】

【分析】 (1) 连接 OB ，则 $OB = 2$ ，由线段垂直平分线性质得 $OQ = \frac{1}{2}OP = 1$. 进而由勾股定理得 $BQ = \sqrt{3}$ ，再由垂径定理即可求解；

(2) 连接 OC ， BC ，先证 $\triangle OBC$ 是等边三角形，再证 $S_{\triangle PBC} = S_{\triangle OBC}$ ，利用扇形面积公式即可求解.

【小问 1 详解】

解：连接 OB ，则 $OB = 2$ ，



∵弦 AB 垂直平分 OP ，

$$\therefore OQ = \frac{1}{2}OP = 1.$$

在 $Rt\triangle OBQ$ 中， $BQ = \sqrt{OB^2 - OQ^2} = \sqrt{3}$

∵半径 OP 垂直 AB ，

$$\therefore AQ = BQ$$

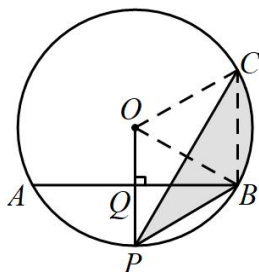
$$\therefore AB = 2\sqrt{3};$$

【小问 2 详解】

解：在 $\text{Rt}\triangle OBQ$ 中， $\cos\angle POB = \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore \angle POB = 60^\circ.$$

连接 OC ， BC ，



$$\therefore \widehat{BC} = \widehat{BP},$$

$$\therefore BC = BP, \quad \angle BOC = \angle POB = 60^\circ.$$

又 $\because OC = OB$ ，

$\therefore \triangle OBC$ 是等边三角形.

$$\therefore \angle BCO = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle POB = 60^\circ, \quad \angle BOC = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle BCO + \angle POC = 180^\circ,$$

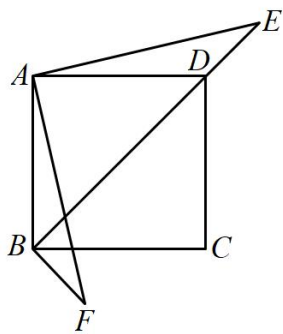
$$\therefore BC \parallel OP$$

$$\therefore S_{\triangle PBC} = S_{\triangle OBC},$$

$$\therefore S_{\text{阴}} = S_{\text{扇形}OBC} = \frac{60}{360} \pi \cdot 2^2 = \frac{2}{3} \pi.$$

【点睛】 本题考查垂径定理，线段垂直平分线的性质，解直角三角形，扇形面积的计算以及勾股定理关键是由条件推出阴影的面积=扇形的面积.

23. 已知：如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 在对角线 BD 的延长线上，作 $AF \perp AE$ ，且 $AF = AE$ ，连接 BF .



(1) 求证: $BF = DE$;

(2) 延长 AB 交射线 EF 于点 G , 求证: $\frac{BF}{FG} = \frac{AD}{AE}$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 由正方形的性质可得 $\angle BAD = 90^\circ$, $AB = AD$, 再由 $AF \perp AE$, $\angle EAF = 90^\circ$, 可得 $\angle BAF = \angle EAD$, 则 $\triangle ABF \cong \triangle ADE$ (SAS), 根据全等三角形的性质即可得到结论;

(2) 根据等腰直角三角形的性质, 正方形的性质及补角的性质可得 $\angle ADE = \angle AFG = 135^\circ$, 再由 $\angle EAD = \angle BAF$, 推出 $\triangle ADE \sim \triangle AFG$, 根据相似三角形的性质可得 $\frac{DE}{FG} = \frac{AD}{AF}$, 由 $\triangle ABF \cong \triangle ADE$, 等量代换, 即可得出结论;

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ, \quad AB = AD,$$

$$\because AF \perp AE,$$

$$\therefore \angle EAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD - \angle FAD = \angle EAF - \angle FAD,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle EAD,$$

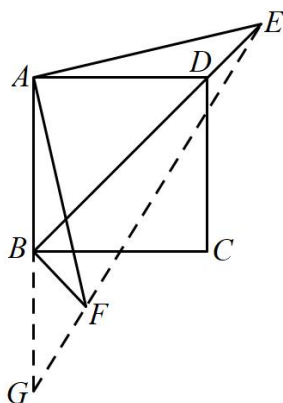
$$\text{又} \because AF = AE,$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle ADE \text{ (SAS)}$$

$$\therefore BF = DE.$$

【小问 2 详解】

证明: 如图, 延长 AB 交射线 EF 于点 G ,



$$\because AF = AE, \quad \angle EAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle AEF = 45^\circ,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle ADB = \angle BDC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AFG = 135^\circ,$$

由 (1) 知 $\angle EAD = \angle BAF$,

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle AFG,$$

$$\therefore \frac{DE}{FG} = \frac{AD}{AF},$$

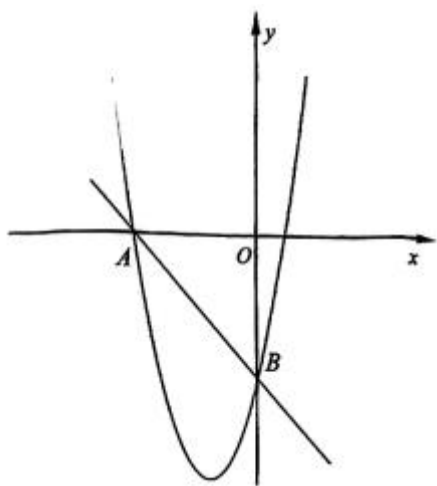
$$\text{又} \because \triangle ABF \cong \triangle ADE$$

$$\therefore DE = BF, \quad AF = AE,$$

$$\therefore \frac{BF}{FG} = \frac{AD}{AE}.$$

【点睛】 本题考查了正方形的性质，等腰直角三角形的性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，熟练掌握并灵活运用知识点是解题的关键.

24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = -x - 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B ，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 A 、 B .



- (1) 求抛物线的表达式;
- (2) 设抛物线与 x 轴的另一个交点为 C , 点 P 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心, 求点 P 坐标;
- (3) 点 D 坐标是 $(0, 4)$, 点 M 、 N 在抛物线上, 且四边形 $MBND$ 是平行四边形, 求线段 MN 的长.

【答案】(1) $y = x^2 + 3x - 4$

(2) 点 P 的坐标是 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

(3) $MN = 4\sqrt{10}$

【解析】

【分析】(1) 先利用一次函数解析式求出点 A 和点 B 的坐标, 再用待定系数法求出抛物线的表达式即可;

(2) 先求出抛物线的对称轴是直线 $x = -\frac{3}{2}$, 由点 P 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心得到点 P 在 AC 的垂直平分线上, 即抛物线的对称轴上. 点 P 横坐标是 $-\frac{3}{2}$. 设点 P 坐标为 $\left(-\frac{3}{2}, a\right)$, 由 $PB = PA$, 求出 $a = -\frac{3}{2}$, 即可得到点 P 的坐标;

(3) 先说明点 M , N 关于原点对称. 设点 M 的横坐标为 m ($m \geq 0$), 则点 M 坐标是 $(m, m^2 + 3m - 4)$, 点 N 坐标是 $(-m, -m^2 - 3m + 4)$, 把点 $(-m, -m^2 - 3m + 4)$ 坐标代入 $y = x^2 + 3x - 4$, 解得 $m = 2$ (负值已舍), 得到点 M 坐标是 $(2, 6)$, 点 N 坐标是 $(-2, -6)$, 利用两点间距离公式即可得到线段 MN 的长.

【小问 1 详解】

解: 把 $x = 0$ 代入 $y = -x - 4$ 得 $y = -4$,

$\therefore$ 点 B 坐标是 $(0, -4)$,

把 $y=0$ 代入 $y=-x-4$, 得 $x=-4$,

$\therefore$ 点 A 坐标是 $(-4, 0)$,

将点 A 、 B 坐标代入 $y=x^2+bx+c$, 得
$$\begin{cases} c=-4 \\ 0=(-4)^2+(-4)b+c \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} b=3 \\ c=-4 \end{cases}.$$

$\therefore$ 抛物线的表达式是 $y=x^2+3x-4$.

【小问 2 详解】

$\because y=x^2+3x-4=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4},$

$\therefore$ 抛物线的对称轴是直线 $x=-\frac{3}{2},$

$\because$ 点 P 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心.

$\therefore$ 点 P 在 AC 的垂直平分线上, 即抛物线的对称轴上.

$\therefore$ 点 P 横坐标是 $-\frac{3}{2}.$

设点 P 坐标为 $\left(-\frac{3}{2}, a\right),$

$\because PB=PA,$

$\therefore \sqrt{\left(-\frac{3}{2}-0\right)^2+\left[a-(-4)\right]^2}=\sqrt{\left[-\frac{3}{2}-(-4)\right]^2+(a-0)^2},$

解得 $a=-\frac{3}{2},$

$\therefore$ 点 P 的坐标是 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right).$

【小问 3 详解】

$\because$ 点 O 是 BD 中点, 即 O 是平行四边形 $MBND$ 对角线交点,

又 $\because$ 四边形 $MBND$ 是平行四边形,

$\therefore$ 点 M , N 关于原点对称.

设点 M 的横坐标为 m ($m \geq 0$),

则点 M 坐标是 (m, m^2+3m-4) , 点 N 坐标是 $(-m, -m^2-3m+4),$

把点 $(-m, -m^2 - 3m + 4)$ 坐标代入 $y = x^2 + 3x - 4$,

$$\text{得 } -m^2 - 3m + 4 = m^2 - 3m - 4,$$

解得 $m = 2$ (负值已舍),

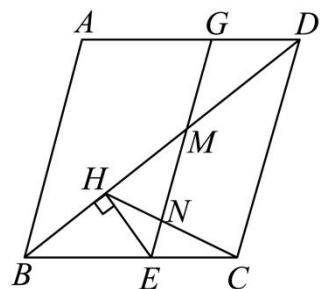
$$\text{当 } m = 2 \text{ 时, } m^2 + 3m - 4 = 2^2 + 3 \times 2 - 4 = 6,$$

$\therefore$ 点 M 坐标是 $(2, 6)$, 点 N 坐标是 $(-2, -6)$,

$$\therefore MN = \sqrt{[2 - (-2)]^2 + [6 - (-6)]^2} = 4\sqrt{10}.$$

【点睛】此题是二次函数综合题,考查了待定系数法、平行四边形的性质、两点间距离公式、三角形的外接圆等知识,读懂题意,准确计算是解题的关键.

25. 如图,在菱形 $ABCD$ 中, $BC = 10$, E 是边 BC 上一点,过点 E 作 $EH \perp BD$, 垂足为点 H , 点 G 在边 AD 上,且 $GD = CE$, 联结 GE , 分别交 BD 、 CH 于点 M 、 N .



(1) 已知 $\sin \angle DBC = \frac{3}{5}$,

①当 $EC = 4$ 时, 求 BCH 的面积;

②以点 H 为圆心, HM 为半径作圆 H , 以点 C 为圆心, 半径为 1 作圆 C , 圆 H 与圆 C 有且仅有一个公共点, 求 CE 的值;

(2) 延长 AH 交边 BC 于点 P , 当设 $CE = x$, 请用含 x 的代数式表示 $\frac{HP}{CN}$ 的值.

【答案】(1) ① $S_{\triangle BHC} = \frac{72}{5}$; ② $\frac{25}{8}$ 或 $\frac{65}{56}$

(2) $\frac{10-x}{2x}$

【解析】

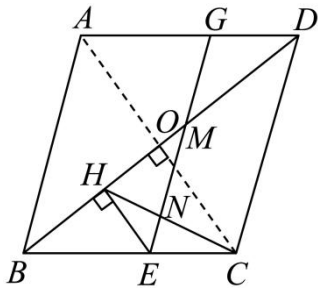
【分析】(1) ①联结 AC 交 BD 于点 O , 根据菱形的性质可得 $OC \perp BO$, 再由锐角三角函数可得 CO, BO 的长, 再由 $EH \parallel CO$, 可得 $BH = \frac{24}{5}$, 即可求解; ②先证明四边形 $CEGD$ 是平行四边形, 可得 $EG \parallel CD$, 从而得到 $EG \parallel AB$, 进而得到 $\angle EMB = \angle ABD$, 继而得到 $BE = ME$, 再由 $EH \perp BD$, 可得 $HM = BH$, 再由 $EH \parallel CO$, 可得 $r_H = BH = 8 - \frac{4}{5}x$, $OH = \frac{4}{5}x$, 在 $Rt\triangle HOC$ 中, 根据勾股定理可得

$$HC = \sqrt{\left(\frac{4}{5}x\right)^2 + 6^2} \text{ 然后分两种情况: 当两圆外切时, 当两圆内切时, 即可求解;}$$

(2) 先证明 $\triangle ABH \cong \triangle CBH$. $\angle BAH = \angle BCN$. 取 BE 中点 Q , 联结 HQ , 再证明 $\triangle HQP \sim \triangle CEN$, 可得 $\frac{HP}{CN} = \frac{HQ}{CE}$, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: ①联结 AC 交 BD 于点 O ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore OC \perp BO$.

在 $\text{Rt}\triangle BOC$ 中, $BC = 10$, $\sin \angle DBC = \frac{3}{5}$,

$\therefore CO = BC \cdot \sin \angle DBC = 6$,

$\therefore BO = 8$,

$\because EH \perp BD$,

$\therefore EH \parallel CO$,

$\therefore \frac{BH}{BO} = \frac{BE}{BC}$, 即 $\frac{BH}{8} = \frac{10-4}{10}$

$\therefore BH = \frac{24}{5}$.

$\therefore S_{\triangle BHC} = \frac{1}{2} OC \times BH = \frac{1}{2} \times \frac{24}{5} \times 6 = \frac{72}{5}$;

②在菱形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, 即 $GD \parallel CE$,

又 $\because GD = CE$,

$\therefore$ 四边形 $CEGD$ 是平行四边形,

$\therefore EG \parallel CD$,

$\therefore EG \parallel AB$,

$\therefore \angle EMB = \angle ABD$.

又 $\because \angle ABD = \angle CBD$,

$\therefore \angle EMB = \angle CBD$,

由 (1) 得: $HM = BH$, $EG \parallel AB$

$\therefore HQ \parallel EN \parallel AB$,

$\therefore \angle HQP = \angle CEN, \angle QHP = \angle BAH = \angle BCN$,

$\therefore \triangle HQP \sim \triangle CEN$,

$$\therefore \frac{HP}{CN} = \frac{HQ}{CE},$$

又 $\because EH \perp BD$,

$$\therefore HQ = \frac{1}{2}BE = \frac{10-x}{2}.$$

$$\therefore \frac{HP}{CN} = \frac{10-x}{2x}.$$

【点睛】 本题主要考查了四边形的综合题，相似三角形的判定和性质，圆与圆的位置关系，勾股定理等知识，熟练掌握相似三角形的判定和性质，圆与圆的位置关系，勾股定理是解题的关键.

