

2023 年松江区初中毕业生学业模拟考试试卷九年级数学

(满分 150 分, 完卷时间 100 分钟)

2023.04

考生注意:

1. 本考试设试卷和答题纸两部分, 试卷包括试题与答题要求. 所有答题必须涂 (选择题) 或写 (非选择题) 在答题纸上, 做在试卷上一律不得分.
2. 答题前, 务必在答题纸上填写姓名、学校和考号.
3. 答题纸与试卷在试题编号上是一一对应的, 答题时应特别注意, 不能错位.

一、选择题 (本大题共 6 题) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. -3 的倒数是 ()

- A. 3 B. -0.3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】直接利用倒数的定义: 乘积是 1 的两数互为倒数即可得出答案.

【详解】解: -3 的倒数是 $-\frac{1}{3}$;

故选: D

【点睛】本题考查倒数的概念; 熟练掌握倒数的求法是解题的关键.

2. 下列二次根式中, 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式的是 ()

- A. $\sqrt{0.2}$ B. $\sqrt{0.5}$ C. $\sqrt{4}$ D. $\sqrt{12}$

【答案】B

【解析】

【分析】几个二次根式化成最简二次根式后, 如果被开方数相同, 这几个二次根式叫做同类二次根式.

【详解】解: A、 $\sqrt{0.2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式;

B、 $\sqrt{0.5} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式;

C、 $\sqrt{4} = 2$, 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式;

D. $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式;

故选: B.

【点睛】本题考查了同类二次根式的定义, 熟练掌握同类二次根式的概念是解题的关键.

3. 一次函数 $y = -2x + 3$ 的图象不经过 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】C

【解析】

【分析】根据一次函数的图象特点即可得.

【详解】解: $\because$ 一次函数 $y = -2x + 3$ 中的 $k = -2 < 0$, $b = 3 > 0$,

$\therefore$ 它的图象经过第一、二、四象限, 不经过第三象限,

故选: C.

【点睛】本题考查了一次函数的图象, 熟练掌握一次函数的图象特点是解题关键.

4. 下列方程中, 有实数根的是 ()

- A. $x^2 + 2x + 1 = 0$ B. $x^2 + x + 1 = 0$ C. $\sqrt{x} + 1 = 0$ D. $\frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据一元二次方程根的判别式、二次根式的非负性, 以及分式方程的解进行判断即可.

【详解】A: $\because x^2 + 2x + 1 = 0, \therefore \Delta = 4 - 4 = 0$, 方程有两个相等的实根, 符合题意;

B: $\because x^2 + x + 1 = 0, \therefore \Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, 方程无实根, 不符合题意;

C: $\because \sqrt{x} + 1 = 0, \therefore \sqrt{x} = -1 < 0, \therefore$ 方程无解, 不符合题意;

D: $\frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$, 解得 $x = 1$, 分式方程的解使分母为 0, 是原方程的增根, 此方程无解, 不符合题意.

故答案选: A

【点睛】本题一元二次方程根的判别式、二次根式有意义的条件以及分式方程的定义, 掌握相关的定义与计算是解题关键.

5. 下列命题正确的是 ()

- A. 三点确定一个圆 B. 圆的任意一条直径都是它的对称轴
C. 等弧所对的圆心角相等 D. 平分弦的直径垂直于这条弦

【答案】C

【解析】

【分析】根据确定圆的条件对 A 进行判断；根据圆的轴对称性对 B 进行判断；根据圆心角定理对 C 进行判断；根据垂径定理的推论对 D 进行判断.

【详解】A. 不共线的三点确定一个圆，故 A 是假命题；

B. 对称是直线，而圆的直径是线段，故 B 是假命题；

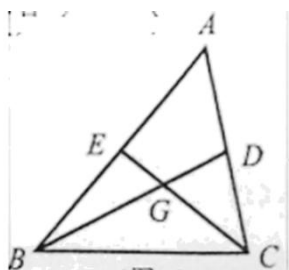
C. 弧相等，则弧所对的圆心角相等，故 C 是真命题；

D. 平分弦（非直径）的直径垂直于弦，故 D 是假命题.

故选：C.

【点睛】本题考查了命题、真命题和假命题的概念，任何一个命题非真即假，要说明一个命题的正确性，一般需要推理、论证，而判断一个命题是假命题，只需举出一个反例即可.

6. 如图，点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，四边形 $AEGD$ 与 $\triangle ABC$ 面积的比值是（ ）



A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{2}{5}$

【答案】B

【解析】

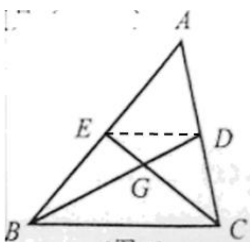
【分析】连接 DE ，根据三角形中位线定理以及中线的性质可得 $DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC$ ， $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ ，

$S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABD}$ ，从而得到 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ ，进而得到 $\frac{DG}{BD} = \frac{EG}{CE} = \frac{1}{3}$ ， $\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ，

继而得到 $S_{\triangle DEG} = \frac{1}{3}S_{\triangle BDE}$ ， $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$ ，可得 $S_{\triangle DEG} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{12}S_{\triangle ABC}$ ，再由

$S_{\text{四边形}AEGD} = S_{\triangle ADE} + S_{\triangle DEG}$ ，即可.

【详解】解：如图，连接 DE ，



∵ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,

∴ 点 D, E 分别为 AC, AB 的中点,

$$\therefore DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC, S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}, S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABD},$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{DG}{BG} = \frac{EG}{CG} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{DG}{BD} = \frac{EG}{CE} = \frac{1}{3}, \frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle DEG} = \frac{1}{3}S_{\triangle BDE}, S_{\triangle ADE} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\triangle DEG} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}S_{\triangle ABD} = \frac{1}{6}S_{\triangle ABD},$$

$$\therefore S_{\triangle DEG} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{12}S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}AECD} = S_{\triangle ADE} + S_{\triangle DEG} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC} + \frac{1}{12}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC},$$

即四边形 $AECD$ 与 $\triangle ABC$ 面积的比值是 $\frac{1}{3}$.

故选: B

【点睛】 本题主要考查了三角形的重心, 相似三角形的判定和性质, 三角形中位线定理, 熟练掌握三角形的重心, 相似三角形的判定和性质, 三角形中位线定理是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题) G 【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 计算: $a^2 \cdot a^3 =$ _____.

【答案】 a^5

【解析】

【分析】 分析: 根据同底数的幂的乘法, 底数不变, 指数相加, 计算即可.

【详解】 解: $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$.

故答案为: a^5

【点睛】 熟练掌握同底数的幂的乘法的运算是解题的关键.

8. 因式分解: $a^2 - 3a =$ _____.

【答案】 $a(a - 3)$

【解析】

【分析】 直接把公因式 a 提出来即可.

【详解】解： $a^2 - 3a = a(a - 3)$.

故答案为 $a(a - 3)$.

9. 不等式组 $\begin{cases} 2x > -6 \\ -x + 2 > 0 \end{cases}$ 的解集是_____.

【答案】 $-3 < x < 2$.

【解析】

【详解】试题分析：解一元一次不等式组，先求出不等式组中每一个不等式的解集，再利用口诀求出这些解集的公共部分：同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小解不了（无解），因此，

$$\begin{cases} 2x > -6 \\ -x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow -3 < x < 2$$

考点：解一元一次不等式组.

10. 一个多边形的每一个外角都是 72° ，则这个多边形是正_____边形.

【答案】 五

【解析】

【分析】根据多边形的外角和等于 360° 进行解答即可得.

【详解】解： $360^\circ \div 72^\circ = 5$,

故答案为：五.

【点睛】本题考查了多边形的外角和，解题的关键是熟记多边形的外角和等于 360° .

11. 在一副扑克牌中拿出 2 张红桃、3 张黑桃共 5 张牌，从中任取 1 张是红桃的概率是_____.

【答案】 $\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】让红桃张数除以总张数 5 即可求得从这 5 张牌中任取 1 张牌恰好是红桃的概率.

【详解】解：因为 2 张红桃、3 张黑桃共 5 张牌，，

所以从中任取 1 张是红桃的概率是 $\frac{2}{5}$.

故答案为： $\frac{2}{5}$.

【点睛】本题考查了用概率公式求概率，解决本题的关键是理解：概率=所求情况数与总情况数之比.

12. 已知点 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$ 在反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图像上，如果 $0 < x_1 < x_2$ ，那么

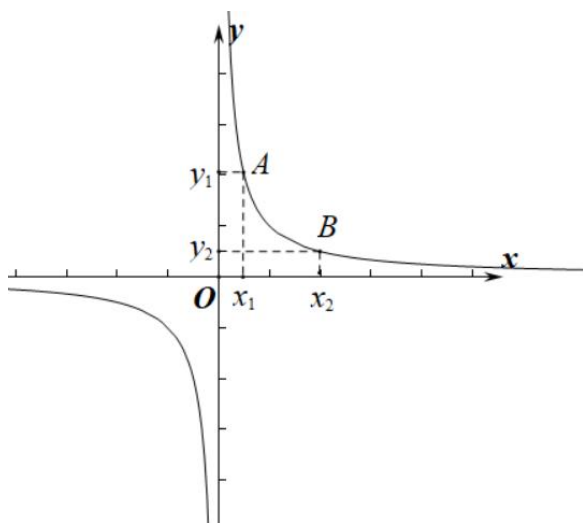
y_1 _____ y_2 . (填 “>”、“=”、“<”)

【答案】 >

【解析】

【分析】先画好 $y = \frac{1}{x}$ 的图象，根据题意描出 A, B 两点，根据图象可得答案.

【详解】解： $y = \frac{1}{x}$ 的图象如图所示，



当 $0 < x_1 < x_2$ ，根据图象可得： $y_1 > y_2$ ，

故答案为： $>$.

【点睛】 本题考查的是反比例函数的图象与性质，熟练的利用数形结合的方法解题是关键.

13. 抛物线 $y = x^2$ 向左平移 1 个单位，所得的新抛物线的解析式为_____.

【答案】 $y = (x+1)^2$

【解析】

【分析】先确定抛物线 $y = x^2$ 的顶点坐标为 $(0,0)$ ，再利用点平移的规律得到点 $(0,0)$ 平移后对应点的坐标为 $(-1,0)$ ，然后根据顶点式写出平移后的抛物线解析式.

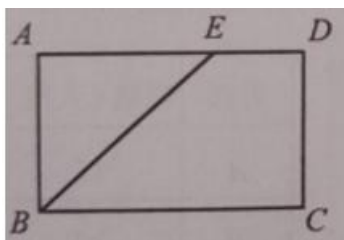
【详解】解：抛物线 $y = x^2$ 的顶点坐标为 $(0,0)$ ，把点 $(0,0)$ 向左平移 1 个单位所得对应点的坐标为 $(-1,0)$ ，所以新抛物线的解析式为 $y = (x+1)^2$.

故答案为 $y = (x+1)^2$.

【点睛】 本题考查了二次函数图象与几何变换，解题关键是熟记求平移后的抛物线解析式通常可利用两种方法：一是求出原抛物线上任意两点平移后的坐标，利用待定系数法求出解析式；二是只考虑平移后的顶点坐标，即可求出解析式.

14. 如图，已知在矩形 $ABCD$ 中，点 E 在边 AD 上，且 $AE = 2ED$ ，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{BE} =$ _____

(用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 的式子表示).



【答案】 $-\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

【解析】

【分析】 根据矩形的性质得出 $AD = BC$ ，根据已知条件得出 $AE = \frac{2}{3}AD$ ，根据三角形法则即可求解.

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AD = BC$$

$$\therefore AE = 2ED,$$

$$\therefore AE = \frac{2}{3}AD$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\text{故答案为: } -\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}.$$

【点睛】 本题考查了矩形的性质，平面向量的线性计算，熟练掌握三角形法则是解题的关键.

15. 已知相交两圆的半径长分别为 R 和 r ，如果两圆的圆心距为 6，且 $R = 2r$ ，试写出一个符合条件的 r 的值: _____.

【答案】 4 (答案不唯一)

【解析】

【分析】 根据相交两圆的半径长分别为 R 和 r ，则 $R - r < d < R + r$ ， $R = 2r$ ，列出不等式即可求解.

【详解】 解：依题意， $r < 6 < 3r$

$$\therefore 2 < r < 6$$

$$\therefore r \text{ 可以是 } 4,$$

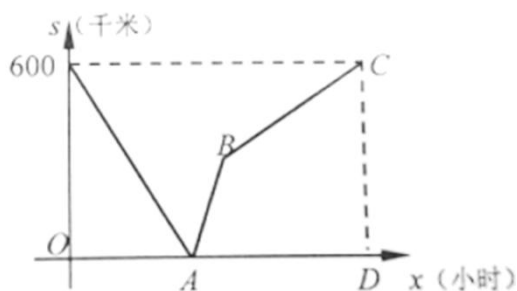
故答案为: 4 (答案不唯一).

【点睛】 本题考查了圆与圆的位置关系：设两圆的圆心距为 d ，两圆半径分别为 R 、 r ，当两圆外离

$\Leftrightarrow d > R + r$ ；两圆外切 $\Leftrightarrow d = R + r$ ；两圆相交 $\Leftrightarrow R - r < d < R + r$ ($R \geq r$)；两圆内切

$\Leftrightarrow d = R - r$ ($R > r$)；两圆内含 $\Leftrightarrow d < R - r$ ($R > r$).

16. 一辆客车从甲地驶往乙地，同时一辆私家车从乙地驶往甲地. 两车之间的距离 s (千米) 与行驶的时间 x (小时) 之间的函数关系如图所示. 已知私家车的速度是 90 千米/时，客车的速度是 60 千米/时，那么点 A 的坐标是_____.



【答案】(4,0)

【解析】

【分析】观察图象得：点 A 的实际意义是两车此时相遇，甲乙两地之间的距离为 600 千米，再根据两车行驶的路程之和等于 600 千米，即可求解.

【详解】解：观察图象得：点 A 的实际意义是两车此时相遇，
甲乙两地之间的距离为 600 千米，

因为私家车的速度是 90 千米/时，客车的速度是 60 千米/时，

$$\therefore 90x + 60x = 600,$$

解得 $x = 4$,

$\therefore$ 点 A 的坐标是 (4,0).

故答案为：(4,0)

【点睛】本题主要考查了函数图象，明确题意准确从函数图象获取信息是解题的关键.

17. 已知 $\square ABCD$ 中， $AB=4$ ， $\angle ABC$ 与 $\angle DCB$ 的角平分线交 AD 边于点 E ， F ，且 $EF=3$ ，则边 AD 的长为_____.

【答案】5 或 11

【解析】

【分析】由平行四边形的性质和角平分线的定义证出 $\angle ABE = \angle AEB$ ，得出 $AE = AB = 4$ ，同理： $DF = CD = 4$ ，再分两种情况计算即可.

【详解】 $\because BE$ 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle ABE = \angle CBE,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel CB, CD=AB=4,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle CBE$$

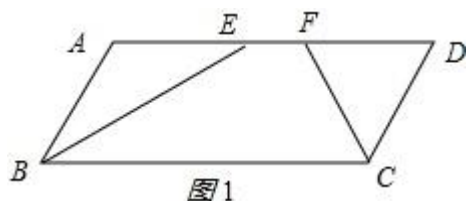
$$\therefore \angle ABE = \angle AEB,$$

$$\therefore AE=AB=4,$$

$$\text{同理: } DF=CD=4,$$

分两种情况:

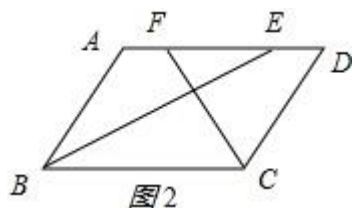
①如图 1 所示:



$$\therefore EF=3,$$

$$\therefore AD=AE+EF+DF=4+3+4=11;$$

②如图 2 所示:



$$\therefore EF=4, AE=DF=4,$$

$$\therefore AF=1, \therefore AD=AF+DF=1+4=5;$$

综上所述: AD 的长为 11 或 5;

故答案为 5 或 11.

【点睛】此题主要考查了角平分线的定义、平行四边形的性质、平行线的性质、等腰三角形的判定等知识;熟练掌握平行四边形的性质,证明三角形是等腰三角形是解决问题的关键.

18. 我们定义:二次项系数之和为1,图像都经过原点且对称轴相同的两个二次函数称作互为友好函数,那么 $y = 2x^2 + 4x$ 的友好函数是_____.

【答案】 $y = -x^2 - 2x$

【解析】

【分析】函数 $y = 2x^2 + 4x$ 的对称轴为 $x = -1$, 设 $y = 2x^2 + 4x$ 的友好函数是 $y = ax^2 + bx$, 根据二次项系数之和为1, 图像都经过原点且对称轴相同可列出方程组, 解出即可求出.

【详解】解: 函数 $y = 2x^2 + 4x$ 的对称轴为 $x = -1$,

设 $y = 2x^2 + 4x$ 的友好函数是 $y = ax^2 + bx$,

$$\therefore \begin{cases} 2 + a = 1 \\ -\frac{b}{2a} = -1 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases},$$

$\therefore y = 2x^2 + 4x$ 的友好函数是 $y = -x^2 - 2x$.

故答案为: $y = -x^2 - 2x$.

【点睛】 本题主要考查了二次函数的性质, 解题的关键是读懂“友好对称二次函数”的定义.

三、解答题 (本大题共 7 题)

19. 计算: $\pi^0 - 18^{\frac{1}{2}} + (2 - \sqrt{3})^{-1} + |3\sqrt{2} - 1|$

【答案】 $2 + \sqrt{3}$

【解析】

【分析】 根据零指数幂, 分数指数幂, 负整数指数幂, 二次根式的混合运算进行计算即可求解.

【详解】 解: $\pi^0 - 18^{\frac{1}{2}} + (2 - \sqrt{3})^{-1} + |3\sqrt{2} - 1|$

$$= 1 - \sqrt{18} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}} + 3\sqrt{2} - 1$$
$$= 1 - 3\sqrt{2} + 2 + \sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 1$$
$$= 2 + \sqrt{3}.$$

【点睛】 本题考查了零指数幂, 分数指数幂, 负整数指数幂, 二次根式的混合运算, 熟练掌握以上运算法则是解题的关键.

20. 解方程组: $\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 4 \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

【解析】

【分析】 将原方程组转化为两个二元一次方程组, 然后解方程组即可.

【详解】解：
$$\begin{cases} x-2y-1=0 \textcircled{1} \\ x^2+2xy+y^2=4 \textcircled{2} \end{cases}$$

由②得： $(x+y)^2=4$,

$\therefore x+y=2 \textcircled{3}$ 或 $x+y=-2 \textcircled{4}$,

由①③得
$$\begin{cases} x-2y-1=0 \textcircled{1} \\ x+y=2 \textcircled{3} \end{cases}$$

①-②得： $-3y=-1$,

解得： $y=\frac{1}{3}$,

把 $y=\frac{1}{3}$ 代入③得： $x=\frac{5}{3}$,

$\therefore$ 方程解为
$$\begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases};$$

由①④得
$$\begin{cases} x-2y-1=0 \textcircled{1} \\ x+y=-2 \textcircled{4} \end{cases}$$

①-④得： $-3y=3$,

解得： $y=-1$,

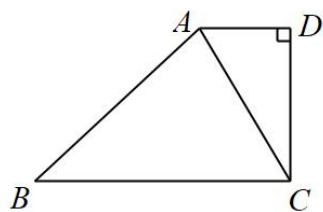
把 $y=-1$ 代入④得： $x=-1$,

$\therefore$ 方程解为
$$\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases};$$

综上所述：原方程解为：
$$\begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$$

【点睛】 本题考查了二元二次方程组的解法. 把原二元二次方程组降幂, 转化为二元一次方程组是解题的关键.

21. 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, AD \perp CD, AD=1, CD=2$.



- (1) 如果 $BC = 3$ ，求 $\cot B$ 的值；
 (2) 如果 $AB = BC$ ，求四边形 $ABCD$ 的面积.

【答案】 (1) 1 (2) 3.5

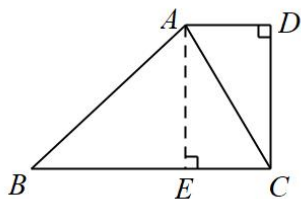
【解析】

【分析】 (1) 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E ，可得四边形 $ADCE$ 是矩形，从而得到 $CE = AD = 1, AE = CD = 2$ ，继而得到 $BE = 2$ ，再由锐角三角函数，即可求解；

(2) 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E ，可得四边形 $ADCE$ 是矩形，从而得到 $CE = AD = 1, AE = CD = 2$ ，设 $AB = BC = x$ ，则 $BE = x - 1$ ，在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中，利用勾股定理求出 x 的值，再根据四边形 $ABCD$ 的面积 $= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD}$ ，即可求解.

【小问 1 详解】

解：如图，过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E ，



$$\therefore AD \parallel BC, AD \perp CD,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle D = \angle BCD = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是矩形，

$$\therefore CE = AD = 1, AE = CD = 2,$$

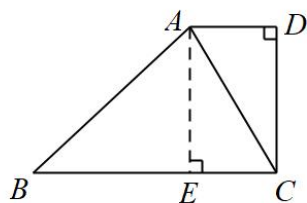
$$\therefore BC = 3,$$

$$\therefore BE = BC - CE = 3 - 1 = 2,$$

$$\therefore \cot B = \frac{BE}{AE} = \frac{2}{2} = 1;$$

【小问 2 详解】

解：如图，过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E ,



$\therefore AD \parallel BC, AD \perp CD,$

$\therefore \angle AEC = \angle D = \angle BCD = 90^\circ,$

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是矩形,

$\therefore CE = AD = 1, AE = CD = 2,$

设 $AB = BC = x$, 则 $BE = x - 1$,

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $AB^2 = BE^2 + AE^2$,

$\therefore x^2 = (x - 1)^2 + 2^2,$

解得: $x = 2.5$,

即 $BC = 2.5$,

四边形 $ABCD$ 的面积 $= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AE \times BC + \frac{1}{2} AD \times CD = \frac{1}{2} \times 2 \times 2.5 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 3.5$.

【点睛】 本题主要考查了解直角三角形，矩形的判定和性质，勾股定理，熟练掌握相关知识点是解题的关键.

22. 某校对六年级学生进行了一次安全知识测试，按成绩 x 分 (x 为整数) 评定为 A 、 B 、 C 、 D 四个等级，其中 A 等级: $90 \leq x \leq 100$, B 等级: $80 \leq x < 90$, C 等级: $60 \leq x < 80$, D 等级: $0 \leq x < 60$. 从中随机抽取了一部分学生的成绩进行分析，绘制成如下的统计图表 (部分信息缺失).

等级	频数 (人数)	频率
A	15	
B	30	40%
C	a	
D	b	



请根据所给信息，回答下列问题：

- (1) 扇形图中， B 等级所在扇形的圆心角为_____°；
- (2) 此次测试成绩的中位数处在等级_____中；(填 A 、 B 、 C 、 D)
- (3) 该校决定对 D 等级的学生进行安全再教育，已知 a 是 b 的 5 倍，那么该校六年级 300 名学生中，需接受安全再教育的约有多少人？

【答案】 (1) 144

(2) B

(3) 20 人

【解析】

【分析】 (1) 用 40% 乘以 360° 即可求解；

(2) 根据中位数的定义即可求解；

(3) 根据题意求得 $b = 5$ ，然后根据样本估计总体即可求解。

【小问 1 详解】

解：扇形图中， B 等级所在扇形的圆心角为 $360^\circ \times 40\% = 144^\circ$

故答案为：144.

【小问 2 详解】

$\because A$ 等级的人数为 15 人， B 等级的人数为 30 人，频率为 40%，

$\therefore A$ 等级的频率为 20%，

$\therefore$ 中位数在 B 等级，

故答案为： B 。

【小问 3 详解】

解：总人数为 $\frac{30}{40\%} = 75$ 人

$\because a$ 是 b 的 5 倍，

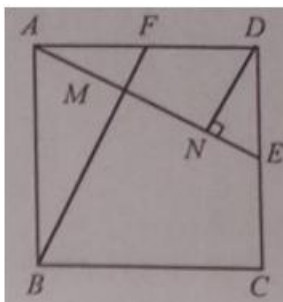
$\therefore a + b = 6b = 75 - 15 - 30 = 30$ (人)

$$\therefore b = 5$$

$\therefore$ 该校六年级 300 名学生中，需接受安全再教育的约有 $\frac{5}{75} \times 300 = 20$ 人.

【点睛】本题考查了频数分布表，中位数的定义，样本估计总体，熟练掌握频数与频率的关系是解题的关键.

23. 如图，已知正方形 $ABCD$ ， E 、 F 分别为边 CD 、 AD 的中点， AE 与 BF 交于点 M ， $DN \perp AE$ ，垂足为点 N .



(1) 求证: $AM = MN$;

(2) 连接 BE ，求 $\angle MBE$ 正弦值.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle ABF \cong \triangle DAE$ ，进而得出 $BF \perp AE$ ，则 $FM \parallel DN$ ，根据平行线分线段成比例即可得证；

(2) 根据 $\angle NDE = \angle DAN$ 得出 $NE = \frac{1}{2}DN$ ，设 $NE = a$ ，则 $DN = 2a$ ， $EC = DE = \sqrt{5}a$ ，在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中， $BE = \sqrt{5}EC = 5a$ ，进而根据正弦的定义即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = CD = DA, \angle BAF = \angle ADE,$$

$\because E$ 、 F 分别为边 CD 、 AD 的中点,

$$\therefore AF = DE,$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle DAE (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle DAE = \angle ABF,$$

$$\therefore \angle DAE + \angle EAB = \angle DAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF + \angle EAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AMF = 90^\circ,$$

即 $AM \perp BF$,

$$\because DN \perp AE,$$

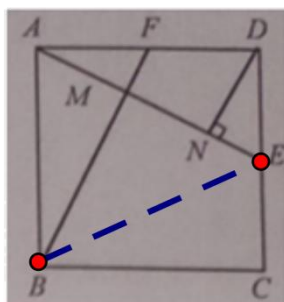
$$\therefore FM \parallel DN,$$

$$\therefore \frac{AF}{FD} = \frac{AM}{MN} = 1,$$

$$\therefore AM = MN;$$

【小问 2 详解】

解：如图所示，连接 BE ，



$$\because \tan \angle DAE = \frac{DE}{AD} = \frac{1}{2} = \frac{DN}{AN}$$

$$\text{又} \because AM = MN,$$

$$\therefore DN = \frac{1}{2} AN = MN,$$

$$\because \angle NDE + \angle ADN = \angle ADE = 90^\circ, \angle ADN + \angle DAN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NDE = \angle DAN,$$

$$\therefore \tan \angle NDE = \frac{NE}{DN} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore NE = \frac{1}{2} DN,$$

$$\text{设 } NE = a, \text{ 则 } DN = 2a,$$

$$\text{在 Rt}\triangle DEN \text{ 中, } DE = \sqrt{5}a,$$

$$\therefore ME = MN + NE = 3a,$$

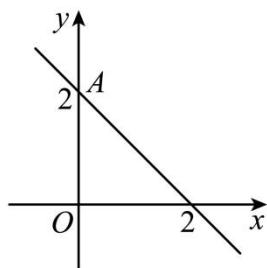
$$\therefore EC = DE = \sqrt{5}a,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BCE \text{ 中, } BE = \sqrt{5}EC = 5a,$$

$$\therefore \sin \angle MBE = \frac{ME}{BE} = \frac{3a}{5a} = \frac{3}{5}.$$

【点睛】本题考查了正方形的性质，全等三角形的性质与判定，正切的定义，求角的正弦值，熟练掌握是正方形的性质以及三角函数的定义解题的关键.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 已知直线 $y = -x + 2$ 与 y 轴交于点 A , 抛物线 $y = (x - t)^2 - 1 (t > 0)$ 的顶点为 B .



- (1) 若抛物线经过点 A , 求抛物线解析式;
- (2) 将线段 OB 绕点 B 顺时针旋转 90° , 点 O 落在点 C 处, 如果点 C 在抛物线上, 求点 C 的坐标;
- (3) 设抛物线的对称轴与直线 $y = -x + 2$ 交于点 D , 且点 D 位于 x 轴上方, 如果 $\angle BOD = 45^\circ$, 求 t 的值.

【答案】(1) $y = (x - \sqrt{3})^2 - 1$

(2) $C(2, 0)$

(3) $t = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

【解析】

【分析】(1) 根据一次函数解析式, 求得点 $A(0, 2)$, 代入 $y = (x - t)^2 - 1 (t > 0)$, 即可求解;

(2) 过点 B 作 $DE \perp y$ 轴, 垂足为 E , 过点 C 作 $CD \perp DE$ 于点 D , 证明 $\triangle BEO \cong \triangle CDB$ 得出 $C(t+1, t-1)$, 代入抛物线解析式即可求解;

(3) 设直线 $y = -x + 2$ 与 x 轴交于点 H , BD 与 x 轴交于点 F , 过点 O 作 $OE \perp AH$, 由 $\angle BOD = 45^\circ$ 得出 $\angle EOD = \angle FCB$, 根据 $\tan \angle EOD = \tan \angle FOB$, 列方程, 解方程即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 直线 $y = -x + 2$ 与 y 轴交于点 A ,

当 $x = 0$ 时, $y = 2$,

$\therefore A(0, 2)$,

若抛物线经过点 A , 则 $2 = (0 - t)^2 - 1$

解得: $t = \sqrt{3}$ 或 $t = -\sqrt{3}$ (舍去)

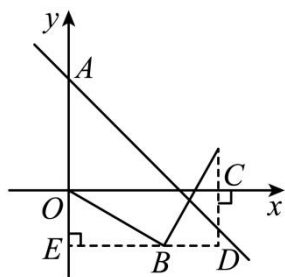
$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = (x - \sqrt{3})^2 - 1$;

【小问 2 详解】

$\because y = (x - t)^2 - 1 (t > 0)$ 的顶点为 B .

$\therefore B(t, -1)$

如图所示, 过点 B 作 $DE \perp y$ 轴, 垂足为 E , 过点 C 作 $CD \perp DE$ 于点 D ,



$\because$ 旋转,

$\therefore OB = OC, \angle OBC = 90^\circ$,

$\therefore \angle BEO = \angle OBC = \angle BDC = 90^\circ$,

$\therefore \angle OBE = 90^\circ - \angle CBD = \angle BCD$,

$\therefore \triangle BEO \cong \triangle CDB$

$\therefore OE = BD = 1, BE = CD = t$,

$\therefore C(t+1, t-1)$

$\because C(t+1, t-1)$ 在抛物线上,

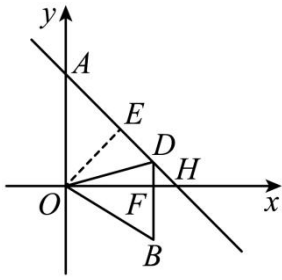
$\therefore t-1 = (t+1-t)^2 - 1$

解得: $t = 1$,

$\therefore C(2, 0)$,

【小问 3 详解】

解: 如图所示, 设直线 $y = -x + 2$ 与 x 轴交于点 H , BD 与 x 轴交于点 F ,



由 $y = -x + 2$ ，令 $y = 0$ ，得 $x = 2$ ，则 $H(2, 0)$ ，

$$\therefore OA = OH = 2, \quad AH = 2\sqrt{2}$$

$\therefore \triangle OAH$ 是等腰直角三角形

$\because BD \parallel y$ 轴，

$\therefore \triangle DFH$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore DF = FH = 2 - t, \quad \text{则 } DH = \sqrt{2}DF = \sqrt{2}(2 - t)$$

过点 O 作 $OE \perp AH$ ，则 $\triangle OEH$ 是等腰直角三角形，则 $OE = EH = \frac{1}{2}AH = \sqrt{2}$ ，则

$$ED = EH - DH = \sqrt{2} - \sqrt{2}(2 - t) = \sqrt{2}(t - 1)$$

$$\therefore \angle EOH = \angle EOD + \angle DOH = 45^\circ$$

$$\therefore \angle BOD = \angle FOB + \angle DOH = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EOD = \angle FOB$$

又 $OE \perp ED, BF \perp OF$

$$\therefore \tan \angle EOD = \tan \angle FOB$$

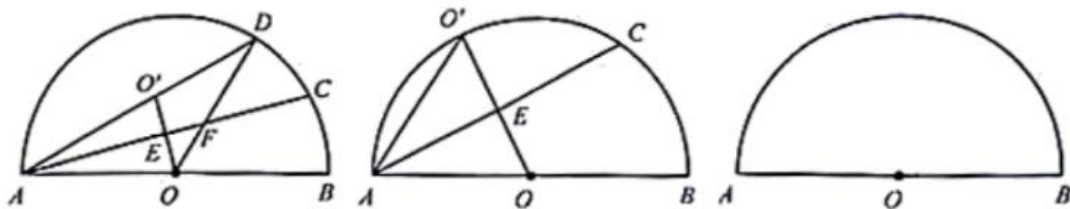
$$\text{即 } \frac{DE}{OE} = \frac{FB}{OF}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}(t-1)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{t}$$

$$\text{解得: } t = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ 或 } t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ (舍去)}$$

【点睛】本题考查了二次函数的性质，正切的定义，解一元二次方程，全等三角形的性质与判定，熟练以上知识掌握是解题的关键.

25. 如图， AB 是半圆 O 的直径， C 是半圆 O 上一点，点 O' 与点 O 关于直线 AC 对称，射线 AO' 交半圆 O 于点 D ，弦 AC 交 $O'O$ 于点 E 、交 OD 于点 F .



(1) 如图, 如果点 O' 恰好落在半圆 O 上, 求证: $\widehat{O'A} = \widehat{BC}$;

(2) 如果 $\angle DAB = 30^\circ$, 求 $\frac{EF}{O'D}$ 的值;

(3) 如果 $OA = 3, O'D = 1$, 求 OF 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

(3) $OF = \frac{9}{7}$ 或 $OF = \frac{9}{5}$.

【解析】

【分析】(1) 如图: 连接 $OC, O'C$, 先根据圆的性质和对称的性质说明 $\triangle OAO'$ 是等边三角形, $\widehat{O'C} = \widehat{BC}$, 然后再说明 $\angle COO' = \angle BOC = 60^\circ$ 即可证明结论;

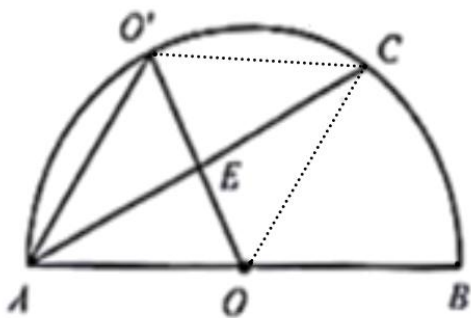
(2) 设圆 O 的半径为 $2a$, 则 $O'A = OA = 2a$, 如图: 作 $ON \perp AD$ 于 N ; 先根据对称的性质和等腰三角形的性质可得 $\angle ODA = \angle OAD = 30^\circ, \angle AOD = 120^\circ$, 然后解直角三角形可得 $O'D = (2\sqrt{3} - 2)a$,

$EF = OE = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}a$, 最后代入计算即可;

(3) 分 O' 在半圆 O 内和圆外两种情况, 分别利用面积法解答即可.

【小问 1 详解】

解: 如图: 连接 $OC, O'C$,



$\therefore$ 点 O' 恰好落在半圆 O 上,

$\therefore OO' = OA$,

∵ 点 O' 与点 O 关于直线 AC 对称

$$\therefore AO' = OA = CO' = CO, \angle O'AC = \angle OAC,$$

$$\therefore \triangle OAO' \text{ 是等边三角形, } \widehat{O'C} = \widehat{BC},$$

$$\therefore \angle OAO' = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle COO' = \angle BOC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle OAO') = 60^\circ,$$

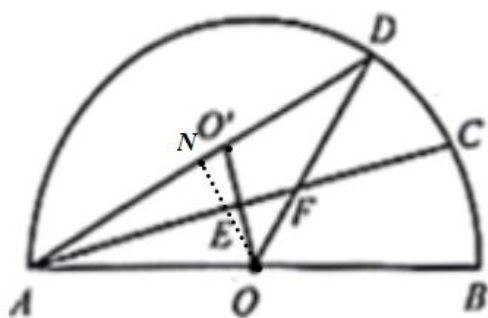
$$\therefore \angle AOO' = \angle BOC = 60^\circ,$$

$$\therefore \widehat{O'A} = \widehat{BC}.$$

【小问 2 详解】

解：设圆 O 的半径为 $2a$ ，则 $O'A = OA = 2a$ ，

如图：作 $ON \perp AD$ 于 N



$$\therefore OA = OD, \angle OAD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ODA = \angle OAD = 30^\circ, \angle AOD = 120^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle AON$ 中， $ON = OA \cdot \sin 30^\circ = a$ ， $AN = OA \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3}a$ ，

$$\therefore ON \perp AD,$$

$$\therefore AD = 2AN = 2\sqrt{3}a,$$

$$\text{又} \because O'A = OA = 2a,$$

$$\therefore O'D = (2\sqrt{3} - 2)a,$$

$$\therefore O'N = 2a - \sqrt{3}a,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle O'ON \text{ 中, } OO' = \sqrt{ON^2 + O'N^2} = \sqrt{a^2 + (2a - \sqrt{3}a)^2} = (\sqrt{6} - \sqrt{2})a,$$

$$\text{由轴对称可得: } O'E = OE = \frac{1}{2}OO' = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}a, \angle DAC = \angle OAC = 15^\circ, OE \perp AF$$

$$\therefore \angle AFO = \angle D + \angle DAC = 45^\circ, \angle OEF = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle OEF$ 为等腰直角三角形

$$\therefore EF = OE = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} a,$$

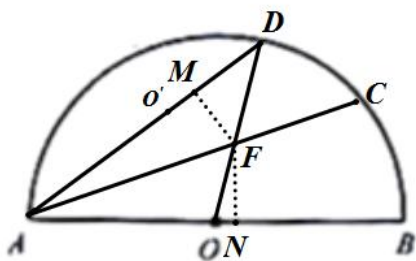
$$\therefore \frac{EF}{O'D} = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{3} - 2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

【小问 3 详解】

解：当 O' 在半圆 O 内时，则 $AD = O'A + O'D = OA + O'D = 4$,

由对称性可得： $\angle OAF = \angle OAF$,

如图：过 F 作 $FN \perp AB$ 于 N , $FM \perp AD$ 于 M ,



$$\therefore FN = FM$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AFD}}{S_{\triangle OFA}} = \frac{\frac{1}{2} AD \times FM}{\frac{1}{2} AO \times FN} = \frac{AD}{AO},$$

$$\text{又} \because \frac{S_{\triangle AFD}}{S_{\triangle OFA}} = \frac{DF}{OF},$$

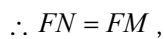
$$\therefore \frac{AD}{AO} = \frac{DF}{OF} = \frac{4}{3}, \text{ 即 } DF = \frac{4}{3} OF,$$

$$\text{又} \because OF + DF = OD = 3,$$

$$\therefore OF = \frac{9}{7};$$

当 O' 在半圆 O 外时，由对称性可得： $\angle DAF = \angle OAF$,

如图：作 $FM \perp AO'$ 于 M , $FN \perp AO$ 于 N ,



$$\therefore \frac{S_{\triangle AFD}}{S_{\triangle OFA}} = \frac{\frac{1}{2} AD \times FM}{\frac{1}{2} AO \times FN} = \frac{AD}{AO},$$

$$\text{又} \because \frac{S_{\triangle AFD}}{S_{\triangle OFA}} = \frac{DF}{OF},$$

$$\therefore \frac{AD}{AO} = \frac{DF}{OF},$$

$$\text{又} \because AD = O'A - O'D = OA - O'D = 3 - 1 = 2,$$

$$\therefore \frac{DF}{OF} = \frac{2}{3}, \text{即 } DF = \frac{2}{3}OF,$$

又 $\because OF + DF = 3$,

$$\therefore OF = \frac{9}{5}.$$

综上, $OF = \frac{9}{7}$ 或 $OF = \frac{9}{5}$.

【点睛】本题主要考查了圆的基本性质、圆周角定理、解直角三角形、对称的性质等知识点，正确作出辅助线是解答本题的关键.

