

松江区 2023 学年度第一学期期末质量监控试卷初三数学

(满分 150 分, 完卷时间 100 分钟)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题; 没有特殊说明, 几何题均视为在同一个平面内研究问题.
2. 答题时, 务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明. 或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 下列函数中, 属于二次函数的是 ()

- A. $y = x - 2$ B. $y = x^2$ C. $y = x^2 - (x + 1)^2$ D. $y = \frac{2}{x^2}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数的定义, 解题的关键是掌握一般地, 形如 $y = ax^2 + bx + c$ (a 、 b 、 c 是常数, $a \neq 0$) 的函数, 叫做二次函数.

根据二次函数的定义选择正确的选项即可.

【详解】A、 $y = x - 2$ 是一次函数, 不是二次函数, 故此选项不符合题意;

B、 $y = x^2$ 符合二次函数的定义, 是二次函数, 故此选项符合题意;

C、 $y = x^2 - (x + 1)^2 = -2x - 1$ 是一次函数, 不是二次函数, 故此选项不符合题意;

D、 $y = \frac{2}{x^2}$ 不是二次函数, 故此选项不符合题意.

故选: B.

2. 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$, $BC = m$, 那么 AB 的长为 ()

- A. $m \sin \alpha$; B. $m \cos \alpha$; C. $\frac{m}{\sin \alpha}$; D. $\frac{m}{\cos \alpha}$.

【答案】C

【解析】

【详解】试题分析: 解直角三角形得出 $\sin A = \frac{BC}{AB}$, 代入求出即可.

在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $BC = m$, $\angle A = \alpha$,

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB},$$

$$\therefore AB = \frac{BC}{\sin A} = \frac{m}{\sin a}$$

故选 C.

考点：锐角三角函数的定义.

3. 关于二次函数 $y = -2(x-1)^2$ 的图像，下列说法正确的是 ()

A. 开口向上

B. 经过原点

C. 对称轴右侧的部分是下降的

D. 顶点坐标是 $(-1, 0)$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查二次函数的性质，解题关键是掌握二次函数图象与系数的关系；

由抛物线解析式可得抛物线开口方向及顶点坐标，进而求解.

【详解】 $\because y = -2(x-1)^2$,

$\therefore$ 抛物线开口向下，顶点坐标为 $(1, 0)$,

$\therefore x > 1$ 时， y 随 x 增大而减小，对称轴右侧的部分是下降的，

把 $x = 0$ 代入 $y = -2(x-1)^2$ 得 $y = -2$,

$\therefore$ 抛物线经过 $(0, -2)$,

故选：C.

4. 下列条件中，不能判定 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 的是 ()

A. $\vec{a} \parallel \vec{c}$, $\vec{b} \parallel \vec{c}$;

B. $\vec{a} = -\vec{c}$, $\vec{b} = 2\vec{c}$

C. $\vec{a} = -2\vec{b}$

D. $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了平面向量的平行，熟记平面向量平行的定义是解题的关键.

根据平面向量的相关定义逐一判断即可.

【详解】解： $\because \vec{a} \parallel \vec{c}, \vec{b} \parallel \vec{c}$,

$\therefore \vec{a} \parallel \vec{b}$;

$\because \vec{a} = -\vec{c}, \vec{b} = 2\vec{c}$,

$$\therefore a \parallel c \parallel b;$$

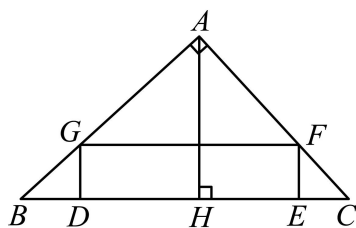
$$\therefore a = -2b,$$

$$\therefore \vec{a} \parallel \vec{b},$$

由 $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$ 不能得到 $\vec{a} \parallel \vec{b}$,

故选: D.

5. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, 斜边 BC 上的高 $AH = 3$, 矩形 $DEFG$ 的边 DE 在边 BC 上, 顶点 G 、 F 分别在边 AB 、 AC 上, 如果 GF 正好经过 $\triangle ABC$ 的重心, 那么 $BD \cdot EC$ 的积等于 ()



A. 4

B. 1

C. $\frac{16}{25}$

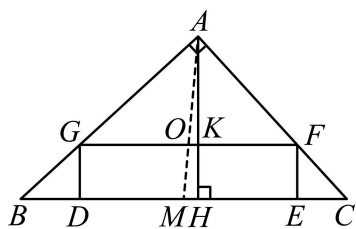
D. $\frac{9}{25}$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了三角形的重心, 相似三角形的判定和性质, 矩形的性质, 设 $\triangle ABC$ 的重心是 O , 连接 AO , 延长 AO 交 BC 于 M , 由三角形的重心的性质可得 $AO = 2OM$, 再结合矩形的性质和平行线分线段成比例及余角的性质证明 $\triangle BDG \sim \triangle FEC$, 即可推出 $BD \cdot CE = FE \cdot DG = 1$.

【详解】解: 设 $\triangle ABC$ 的重心是 O , 连接 AO , 延长 AO 交 BC 于 M ,



$$\therefore AO = 2OM,$$

$\because$ 四边形 $DEFG$ 是矩形,

$$\therefore GF \parallel DE, \angle GDE = \angle FED = 90^\circ,$$

$$\therefore AK : KH = AO : OM,$$

$$\therefore AK = 2KH,$$

$$\therefore AH = 3,$$

$$\therefore KH = \frac{1}{3}AH = 1,$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle C = 90^\circ,$$

$$\because \angle EFC + \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle EFC,$$

$$\because \angle BDG = \angle CEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BDG \sim \triangle FEC,$$

$$\therefore BD:FE = GD:EC,$$

$$\therefore BD \cdot CE = FE \cdot DG,$$

$$\because FG \parallel BC, \quad GD \perp BC, \quad KH \perp BC, \quad FE \perp BC,$$

$$\therefore DG = FE = KH = 1,$$

$$\therefore BD \cdot CE = 1 \times 1 = 1.$$

故选: B.

6. 某同学对“两个相似的四边形”进行探究. 四边形 $ABCD$ 和四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是相似的图形, 点 A 与点 A_1 、

点 B 与点 B_1 、点 C 与点 C_1 、点 D 与点 D_1 分别是对应顶点, 已知 $\frac{AB}{A_1B_1} = k$. 该同学得到以下两个结论: ①

四边形 $ABCD$ 和四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积比等于 k^2 ; ②四边形 $ABCD$ 和四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的两条对角线的和

之比等于 k . 对于结论①和②, 下列说法正确的是 ()

- A. ①正确, ②错误 B. ①错误, ②正确 C. ①和②都错误 D. ①和②都正确

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查的是相似多边形的性质, 熟记相似多边形的对角线的比等于相似比、面积比等于相似比的平方是解题的关键;

根据相似多边形的对角线的比等于相似比、面积比等于相似比的平方解答即可.

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是相似的图形, $\frac{AB}{A_1B_1} = k$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是相似比为 k ,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积比等于 k^2 , 四边形 $ABCD$ 和四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的两条对角线之比等于 k ,

∴ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的两条对角线的和之比等于 k ，则①和②都正确，

故选：D.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. 若 $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$ ，则 $\frac{y}{x+y} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了比例的性质，熟练掌握比例的性质是解题的关键.

利用比例的性质进行计算，即可解答.

【详解】 解： ∵ $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$,

∴ $x = 2y$,

∴ $\frac{y}{x+y} = \frac{y}{2y+y} = \frac{1}{3}$,

故答案为： $\frac{1}{3}$.

8. A、B 两地的实际距离 $AB = 250$ 米，画在地图上的距离为 5 厘米，则地图上的距离与实际距离的比是_____.

【答案】 1:5000

【解析】

【分析】 根据比例尺=图上距离:实际距离，直接求出即可.

【详解】 解： 250 米 = 25000 厘米，

∴ 比例尺 = $5:25000 = 1:5000$ ；

故答案为： 1:5000.

【点睛】 本题主要考查了比例尺，掌握比例尺的计算方法，注意在求比的过程中，单位要统一.

9. 某印刷厂一月份印书 50 万册，如果从二月份起，每月印书量的增长率都为 x ，那么三月份的印书量 y （万册）与 x 的函数解析式是_____.

【答案】 $y = 50(x+1)^2$ 或 $y = 50x^2 + 100x + 50$

【解析】

【详解】 因为一月份印书 50 万册，每月印书量的增长率都为 x ，所以二月份印书 $50(1+x)$

三月份印书 $50(1+x) \cdot (1+x) = 50(x+1)^2 = 50x^2 + 100x + 50$

【点睛】一元二次方程的实际应用是常考内容，解题关键是要读懂题目的信息，根据题目给出的条件，找出合适的等量关系，列出方程再求解，属于中档题.

10. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AP > BP$ ，如果 $AB = 5$ ，那么 $AP =$ _____.

【答案】 $\frac{-5+5\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】本题考查了黄金分割点的应用，把一条线段分割为两部分，使较大部分与全长的比值等于较小部分与较大的比值，则这个比值即为黄金分割；根据黄金分割点的定义列方程是解题的关键.

【详解】解：设 AP 长为 x ，则 BP 长为 $5-x$ ，

列方程得： $x^2 = 5(5-x)$ ，

解得： $x_1 = \frac{-5+5\sqrt{5}}{2}$ ， $x_2 = \frac{-5-5\sqrt{5}}{2}$ (舍去)

$\therefore AP$ 长为 $\frac{-5+5\sqrt{5}}{2}$ ，

故答案为： $\frac{-5+5\sqrt{5}}{2}$.

11. 在直角坐标平面中，将抛物线 $y = -(x+1)^2 + 2$ ，先向左平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位，那么平移后的抛物线表达式是_____.

【答案】 $y = -(x+2)^2$

【解析】

【分析】此题考查的是二次函数图象的平移，根据二次函数的平移规律：括号内左加右减，括号外上加下减求解即可.

【详解】解：将抛物线 $y = -(x+1)^2 + 2$ ，先向左平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位，那么平移后的抛物线表达式是 $y = -(x+1+1)^2 + 2 - 2 = -(x+2)^2$ ，

故答案为： $y = -(x+2)^2$.

12. 如果一个二次函数图像的顶点在 x 轴上，且在 y 轴的右侧部分是上升的. 请写出一个符合条件的函数解析式：_____.

【答案】 $y = 4x^2$ ，答案不唯一

【解析】

【分析】 此题主要考查了二次函数的性质，解题的关键是会利用函数的性质确定解析式的各项系数。

由于二次函数的顶点在 x 轴上，且在 y 轴的右侧部分是上升的，由此可以确定二次函数的二次项系数为正数，由此可以确定函数解析式不唯一。

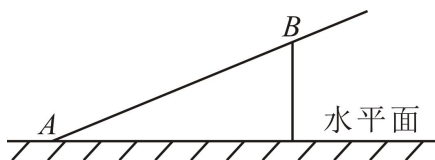
【详解】 解： $\because$ 二次函数的顶点在 x 轴上，且在 y 轴的右侧部分是上升的，

$\therefore$ 这个二次函数的二次项系数为正数，

$\therefore$ 符合条件的函数有 $y = 4x^2$ ，答案不唯一。

答案为： $y = 4x^2$ ，答案不唯一。

13. 如图，一辆小车沿着坡度为1:2.4的斜坡从 A 点向上行驶了 50 米，到达 B 点，那么此时该小车上升的高度为_____米。



【答案】 $\frac{250}{13}$

【解析】

【分析】 本题考查的是解直角三角形的应用-坡度坡角问题，熟记坡度是坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比是解题的关键。

设小车上升的高度为 x 米，根据坡度的概念得到 $AC = 2.4x$ 米，再根据勾股定理计算，得到答案。

【详解】 设小车上升的高度为 $BC = x$ 米，斜坡的坡度为1:2.4，

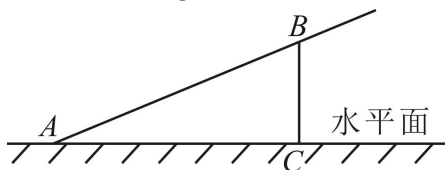
$\therefore AC = 2.4x$ 米，

由勾股定理得： $x^2 + (2.4x)^2 = 50^2$ ，

解得： $x = \frac{250}{13}$ (负值舍去)，

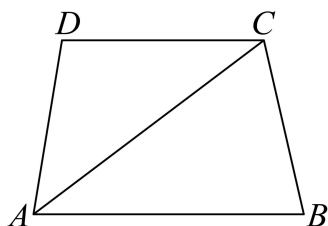
$\therefore$ 小车上升的高度为 $\frac{250}{13}$ 米，

故答案为： $\frac{250}{13}$ 。



14. 如图, 梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 且 $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{3}$, 若 $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{n}$. 请用 $\vec{m}$, $\vec{n}$ 来表示

$\overrightarrow{AC} =$ _____.



【答案】 $\vec{n} + \frac{3}{4}\vec{m}$

【解析】

【分析】 此题考查了平面向量, 根据平行四边形法则得到 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$, 即可用 $\vec{m}$ 、 $\vec{n}$ 表示 $\overrightarrow{AC}$.

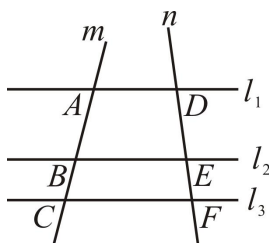
【详解】 $\because AB \parallel CD$, $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{3}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$,

$$\therefore \overrightarrow{DC} = \frac{3}{4}\vec{m},$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{n} + \frac{3}{4}\vec{m},$$

故答案为: $\vec{n} + \frac{3}{4}\vec{m}$.

15. 如图, 已知直线 l_1 、 l_2 、 l_3 分别交直线 m 于点 A 、 B 、 C , 交直线 n 于点 D 、 E 、 F , 且 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, $AB = 2BC$, $DF = 6$, 那么 $EF =$ _____.



【答案】 2

【解析】

【分析】 本题主要考查了平行线分线段成比例, 掌握平行线分线段成比例是解题的关键.

先由 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, 运用平行线分线段成比例的内容可得 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = 2$, 再将 $DE = DF - EF = 6 - EF$ 代入求出 EF , 即可求解.

【详解】 解: $\because l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, $AB = 2BC$,

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = 2,$$

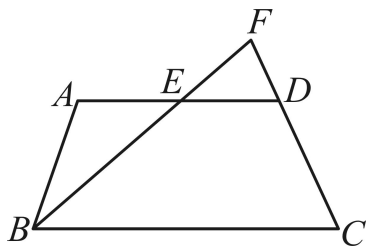
$$\therefore DE = DF - EF = 6 - EF,$$

$$\therefore \frac{6 - EF}{EF} = 2,$$

解得 $EF = 2$.

故答案为: 2.

16. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 点 E 是 AD 的中点, BE 、 CD 的延长线交于点 F , 如果 $AD:BC = 2:3$, 那么 $S_{\triangle EDF}:S_{\triangle AEB} =$ _____.



【答案】 1:2

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的判定与性质, 熟练掌握相似三角形的判定与性质是解答本题的关键. 过点 F 作 BC 的垂线交 BC 于点 H , 交 DE 于点 G , 过点 B 作 $BK \perp DA$, 交 DA 的延长线于点 K , 可得四边形 $BHGK$ 为矩形, 则 $BK = GH$, 由题意可得 $DE:BC = 1:3$, 证明 $\triangle DEF \sim \triangle CBF$, 则 $FG:FH = DE:BC = 1:3$, 即 $FG:GH = FG:BK = 1:2$, 将 $S_{\triangle EDF}:S_{\triangle AEB}$ 化简为 $FG:BK$, 即可得出答案.

【详解】 过点 F 作 BC 的垂线交 BC 于点 H , 交 DE 于点 G , 过点 B 作 $BK \perp DA$, 交 DA 的延长线于点 K ,
 $\because AD \parallel BC$,
 $\therefore FG \perp AD$,
 $\therefore$ 四边形 $BHGK$ 为矩形,
 $\therefore BK = GH$,
 $\because$ 点 E 是 AD 的中点,
 $\therefore AE = DE$,
 $\because AD:BC = 2:3$,
 $\therefore DE:BC = 1:3$,
 $\because AD \parallel BC$,
 $\therefore \angle FED = \angle FBC, \angle FDE = \angle FCB$,

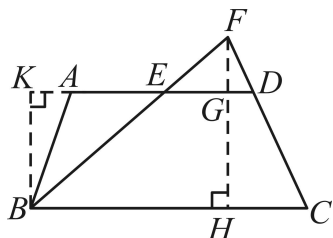
$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle CBF,$$

$$\therefore FG:FH = DE:BC = 1:3,$$

$$\therefore FG:GH = FG:BK = 1:2,$$

$$\therefore S_{\triangle EDF}:S_{\triangle AEB} = \left(\frac{1}{2}DE \cdot FG\right):\left(\frac{1}{2}AE \cdot BK\right) = FG:BK = 1:2,$$

故答案为：1:2.



17. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 D 、 E 分别是边 AB 、 AC 的中点, BE 与 CD 相交于点 O , 如果 $\triangle OBC$ 是等边三角形, 那么 $\tan \angle ABC =$ _____.

【答案】 $3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查相似三角形的判定与性质, 等边三角形的性质以及特殊角的三角函数值, 掌握相似三角形的判定与性质是解答本题的关键.

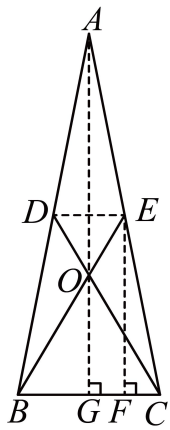
过点 A 作 $AG \perp BC$ 于点 G , 过点 E 作 $EF \perp BC$ 于点 F , 连接 DE , 根据 $\triangle OBC$ 是等边三角形, 得出 $\angle OBC = \angle OCB = \angle BOC = 60^\circ$, $OB = OC = BC$, 设 $OB = OC = BC = 2m$, 根据点 D 、 E 分别是边 AB 、 AC 的中点, 得出 $DE = m$, $DE \parallel BC$, $AE = CE = \frac{1}{2}AC$, 证明 $\triangle DOE \sim \triangle COB$, 得出 $OE = m$,

$BE = 3m$, 根据 $EF \perp BC$, $\angle OBC = 60^\circ$, 得出 $\sin \angle OBC = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $EF = \frac{3\sqrt{3}}{2}m$, 证明 $\triangle CEF \sim \triangle CAG$,

从而得出 $AG = 3\sqrt{3}m$,

再求出 $AG = 3\sqrt{3}m$, $BG = m$, 即可求解;

【详解】 过点 A 作 $AG \perp BC$ 于点 G , 过点 E 作 $EF \perp BC$ 于点 F , 连接 DE ,



$\therefore \triangle OBC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle OBC = \angle OCB = \angle BOC = 60^\circ$, $OB = OC = BC$,

设 $OB = OC = BC = 2m (m > 0)$,

$\because$ 点 D 、 E 分别是边 AB 、 AC 的中点,

$\therefore DE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 2m = m$, $DE \parallel BC$, $AE = CE = \frac{1}{2}AC$,

$\therefore \triangle DOE \sim \triangle COB$,

$\therefore \frac{OE}{OB} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$,

$\therefore OE = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2} \cdot 2m = m$,

$\therefore BE = OB + OE = 2m + m = 3m$,

$\therefore EF \perp BC, \angle OBC = 60^\circ$,

$\therefore \sin \angle OBC = \frac{EF}{BE} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore EF = \frac{\sqrt{3}}{2}BE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3m = \frac{3\sqrt{3}}{2}m$,

$\therefore AG \perp BC, EF \perp BC$,

$\therefore AG \parallel EF$,

$\therefore \triangle CEF \sim \triangle CAG$,

$\therefore \frac{EF}{AG} = \frac{CE}{AC} = \frac{1}{2}$,

$\therefore EF = \frac{1}{2}AG$,

$$\therefore AG = 2EF = 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}m = 3\sqrt{3}m,$$

$$\therefore AB = AC, AG \perp BC,$$

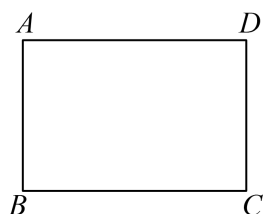
$$\therefore BG = CG = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 2m = m,$$

$$\therefore AG \perp BC, AG = 3\sqrt{3}m, BG = m,$$

$$\therefore \tan \angle ABC = \frac{AG}{BG} = \frac{3\sqrt{3}m}{m} = 3\sqrt{3},$$

故答案为: $3\sqrt{3}$.

18. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $BC = 3$, 将边 AB 绕点 A 逆时针旋转, 点 B 落在 B' 处, 连接 BB' 、 CB' , 若 $\angle BB'C = 90^\circ$, 则 $BB' =$ _____.



【答案】 $\frac{12}{5}$

【解析】

【分析】该题主要考查了相似三角形的性质和判定, 勾股定理, 矩形的性质, 旋转的性质, 解答该题的关键是掌握以上知识点;

过 A 作 $AE \perp BB'$, 设 $BE = B'E = x$, 证明 $\triangle ABE \sim \triangle BCB'$, 根据相似三角形的性质得出 $B'E = \frac{3}{2}x$, 再运用勾股定理列方程解答即可;

【详解】将边 AB 绕点 A 逆时针旋转, 如图所示, 过 A 作 $AE \perp BB'$,
则 $AB' = AB$, $BE = B'E$, $\angle BB'C = 90^\circ$,

设 $BE = B'E = x$,

$$\therefore \angle ABC = \angle ABE + \angle EBC = 90^\circ, \angle BCB' + \angle B'BC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle BCB',$$

$$\therefore \angle BB'C = \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle BCB',$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BE}{B'C},$$

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{x}{B'C},$$

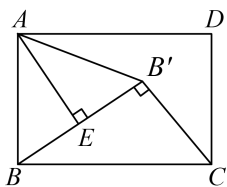
$$\therefore B'C = \frac{3}{2}x,$$

$$\therefore \text{在 } BCB' \text{ 中, } 9 = (2x)^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2,$$

$$\therefore x = \frac{6}{5} \text{ (负值舍去),}$$

$$\therefore BB' = \frac{12}{5}.$$

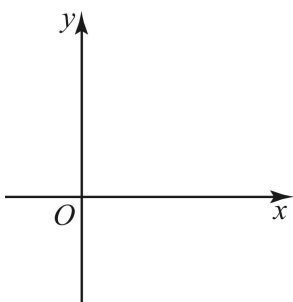
故答案为: $\frac{12}{5}$.



三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图像上部分点的横坐标 x 、纵坐标 y 的对应值如下表.

x	...	0	1	2	3	4	...
y	...	3	0	-1	?	3	...



(1) 由表格信息, 求出该二次函数解析式, 并写出该二次函数图像的顶点 D 的坐标;

(2) 如果该二次函数图像与 y 轴交于点 A , 点 $P(5, t)$ 是图像上一点, 求 $\triangle PAD$ 的面积.

【答案】 (1) $y = x^2 - 4x + 3$, 顶点 D 的坐标为 $(2, -1)$

(2) 15

【解析】

【分析】 本题考查二次函数的解析式, 二次函数的图像和性质, 掌握待定系数法是解题的关键.

(1) 运用待定系数法求出函数解析式，并配方找到顶点坐标即可；

(2) 求出直线 AP 的解析式，过点 D 作 $DE \perp x$ 轴交 PA 于点 E ，得到点 E 的坐标，根据

$$S_{\triangle ADP} = \frac{1}{2} DE \cdot |x_P - x_A| \text{ 计算即可.}$$

【小问 1 详解】

解：把 $(0,3)$ 、 $(1,0)$ 、 $(2,-1)$ 代入得：

$$\begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases},$$

$$\therefore \text{函数关系式为: } y = x^2 - 4x + 3,$$

$$y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1,$$

$$\therefore \text{顶点 } D \text{ 的坐标为 } (2, -1);$$

【小问 2 详解】

解：当 $x = 5$ 时， $y = 8$ ，

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (5, 8),$$

设直线 AP 的解析式为 $y = mx + n$ ，把点 $(0,3)$ 和 $(5,8)$ 代入得：

$$\begin{cases} n = 3 \\ 5m + n = 8 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases},$$

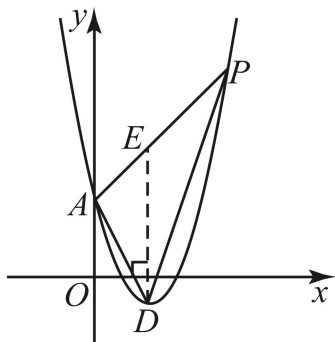
$$\therefore \text{解析式为 } y = x + 3,$$

过点 D 作 $DE \perp x$ 轴交 PA 于点 E ，

$$\text{当 } x = 2 \text{ 时， } y = 5,$$

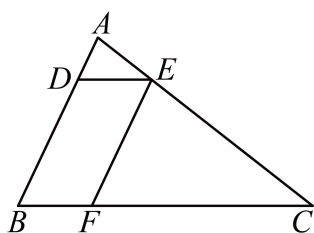
$$\therefore \text{点 } E \text{ 的坐标为 } (2, 5),$$

$$\therefore DE = 5 - (-1) = 6,$$



$$\therefore S_{\triangle ADP} = \frac{1}{2} DE \cdot |x_P - x_A| = \frac{1}{2} \times 6 \times (5 - 0) = 15.$$

20. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 、 F 分别在边 AB 、 AC 、 BC 上, 连接 DE 、 EF . 已知 $ED \parallel BC$, $EF \parallel AB$, $AD = 3$, $DB = 9$.



(1) 求 $\frac{BF}{FC}$ 的值;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 16, 求四边形 $BFED$ 的面积.

【答案】(1) $\frac{1}{3}$

(2) 6

【解析】

【分析】 本题考查了平行线分线段成比例, 相似三角形的判定和性质:

(1) 根据平行线分线段成比例求解即可;

(2) 证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, $\triangle EFC \sim \triangle ABC$, 根据相似三角形面积的比等于相似比的平方求得 $\triangle ADE$ 和 $\triangle EFC$ 的面积, 再根据四边形 $BFED$ 的面积为 $= S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADE} - S_{\triangle EFC}$ 求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because ED \parallel BC$, $EF \parallel AB$,

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}, \quad \frac{BF}{FC} = \frac{AE}{EC},$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{BF}{FC},$$

又 $\because AD = 3$, $DB = 9$,

$$\therefore \frac{BF}{FC} = \frac{AD}{DB} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3};$$

【小问 2 详解】

解: $\because AD = 3, DB = 9,$

$$\therefore AB = AD + DB = 12,$$

$\because ED \parallel BC,$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \triangle ADE \text{ 与 } \triangle ABC \text{ 的相似比是: } \frac{AD}{AB} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{1}{16},$$

$\because \triangle ABC$ 的面积为 16,

$$\therefore S_{\triangle ADE} = 1,$$

$\because EF \parallel AB,$

$$\therefore \triangle EFC \sim \triangle ABC,$$

由 (1) 知 $BF : FC = 1 : 3,$

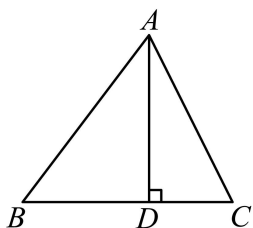
$$\therefore FC : BC = 3 : 4,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle EFC}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{FC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{3}{1+3}\right)^2 = \frac{9}{16},$$

$$\therefore S_{\triangle EFC} = 9,$$

$$\therefore \text{四边形 } BFED \text{ 的面积} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADE} - S_{\triangle EFC} = 16 - 1 - 9 = 6.$$

21. 已知: 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = 15, BC = 14, \sin B = \frac{4}{5}, AD \perp BC$ 于 D .



(1) 求 AC 的长;

(2) 如果点 E 是边 AC 的中点, 求 $\cot \angle EBC$ 大小.

【答案】 (1) 13 (2) $\frac{23}{12}$

【解析】

【分析】 本题考查解直角三角形, 相似三角形性质和判定, 三角形中位线定理, 勾股定理, 关键是由锐角的正弦求出 AD 长, 证明 EH 是 $\triangle ADC$ 的中位线.

(1) 由锐角的正弦求出 AD 长, 由勾股定理求出 BD 长, 得到 CD 长, 由勾股定理即可求出 AC 长.

(2) 过 E 作 $EH \perp CD$, 由相似三角形性质, 推出 $DH = CH = \frac{1}{2}CD = \frac{5}{2}$, 得到 EH 是 $\triangle ADC$ 的中位线, 因此 $EH = \frac{1}{2}AD = 6$, 求出 $BH = BD + DH = \frac{23}{2}$, 即可求出 $\cot \angle EBC = \frac{BH}{EH} = \frac{23}{12}$.

【小问 1 详解】

解: $\because AD \perp BC$,

$$\therefore \sin \angle ABC = \frac{AD}{BA} = \frac{4}{5},$$

$$\because AB = 15,$$

$$\therefore AD = 12,$$

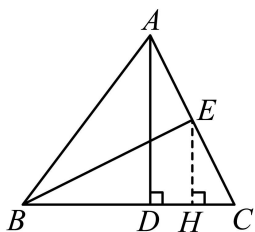
$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = 9,$$

$$\therefore CD = BC - BD = 14 - 9 = 5,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 13;$$

【小问 2 详解】

解: 过 E 作 $EH \perp CD$ 于 H ,



$$\because AD \perp BC,$$

$$\therefore EH \parallel AD,$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle EHC,$$

$$\therefore AE : EC = DH : HC,$$

$\because$ 点 E 是边 AC 的中点,

$$\therefore AE = EC,$$

$$\therefore DH = CH = \frac{1}{2}CD = \frac{5}{2},$$

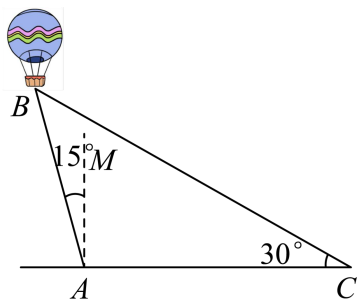
$\therefore EH$ 是 $\triangle ADC$ 的中位线,

$$\therefore EH = \frac{1}{2}AD = 6,$$

$$\therefore BH = BD + DH = \frac{23}{2},$$

$$\therefore \cot \angle EBC = \frac{BH}{EH} = \frac{23}{12}.$$

22. 如图, A 处有一垂直于地面的标杆 AM , 热气球沿着与 AM 的夹角为 15° 的方向升空, 到达 B 处, 这时在 A 处的正东方向 200 米的 C 处测得 B 的仰角为 30° (AM 、 B 、 C 在同一平面内). 求 A 、 B 之间的距离. (结果精确到 1 米, $\sqrt{2} \approx 1.414$)



【答案】 A 、 B 之间的距离约为 141 米

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形的应用-仰角俯角问题, 根据题目的已知条件并结合图形添加适当的辅助线是解题的关键;

过点 A 作 $AD \perp BC$, 垂足为 D , 根据题意可得: $AC = 200$ 米, $\angle BAC = 105^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, 从而利用三角形内角和定理可得 $\angle ABD = 45^\circ$, 然后在 $Rt\triangle ACD$ 中, 利用含 30 度角的直角三角形的性质可得 $AD = 100$ 米, 再在 $Rt\triangle ABD$ 中, 利用锐角三角函数的定义进行计算, 即可解答.

【详解】 解: 过点 A 作 $AD \perp BC$, 垂足为 D ,

由题意得: $AC = 200$ 米, $\angle BAC = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$, $\angle C = 30^\circ$,

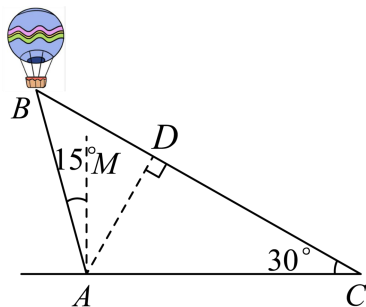
$$\therefore \angle ABD = 180^\circ - \angle BAC - \angle C = 45^\circ,$$

在 $Rt\triangle ACD$ 中, $\angle C = 30^\circ$,

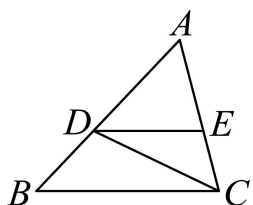
$$\therefore AD = \frac{1}{2} AC = 100 \text{ (米)},$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABD \text{ 中, } AB = \frac{AD}{\sin 45^\circ} = \frac{100}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 100\sqrt{2} \approx 141 \text{ (米)},$$

$\therefore A$ 、 B 之间的距离约为 141 米.



23. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上， $DE \parallel BC$ ， $\angle BDC = \angle DEC$ ．求证：



(1) $\triangle ADE \sim \triangle ACD$ ；

$$(2) \frac{CD^2}{BC^2} = \frac{AE}{AC}$$

【答案】(1) 见详解 (2) 见详解

【解析】

【分析】本题主要考查了平行线的性质，相似三角形的判定与性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键．

(1) 利用三角形的内角和定理的推论和相似三角形的判定定理解答即可；

(2) 利用三角形的内角和定理的推论和相似三角形的判定定理得到 $\triangle DEC \sim \triangle CDB$ ，利用相似三角形的性质得到 $CD^2 = DE \cdot BC$ ，再证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，利用相似三角形的性质和等量代换的性质解答即可．

【小问 1 详解】

证明： $\because \angle BDC = \angle DEC, \angle BDC = \angle A + \angle ACD, \angle DEC = \angle A + \angle ADE$ ，

$$\therefore \angle ADE = \angle ACD,$$

$$\because \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACD;$$

【小问 2 详解】

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle BCD,$$

$$\because \angle BDC = \angle DEC,$$

$$\therefore \triangle DEC \sim \triangle CDB,$$

$$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{DE}{CD},$$

$$\therefore CD^2 = DE \cdot BC.$$

$$\therefore \frac{CD^2}{BC^2} = \frac{DE}{BC}.$$

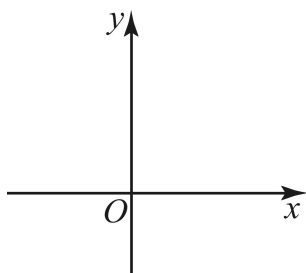
$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC},$$

$$\therefore \frac{CD^2}{BC^2} = \frac{AE}{AC}.$$

24. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的图像经过原点 $O(0,0)$ 、点 $A(1,3a)$ ，此抛物线的对称轴与 x 轴交于点 C ，顶点为 B 。



(1) 求抛物线的对称轴；

(2) 如果该抛物线与 x 轴负半轴的交点为 D ，且 $\angle ADC$ 的正切值为 2，求 a 的值；

(3) 将这条抛物线平移，平移后，原抛物线上的点 A 、 B 分别对应新抛物线上的点 E 、 P 。联结 PA ，如果点 P 在 y 轴上， $PA \parallel x$ 轴，且 $\angle EPA = \angle CBO$ ，求新抛物线的表达式。

【答案】 (1) 直线 $x = -1$

(2) $a = 2$

(3) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 该题主要考查了二次函数综合，涉及知识点主要有解直角三角形，二次函数的图象和性质，全等三角形的性质和判断，函数平移等知识点，解题的关键是掌握以上知识点；

(1) 将 $O(0,0)$ 、 $A(1,3a)$ 代入解析式再求解即可；

(2) 过 A 作 $AN \perp x$ 轴, 根据 $\tan \angle ADC = 2 = \frac{AN}{DN}$, 求解即可;

(3) 由 (1) 算出 $B(-1, a)$, $C(-1, 0)$, 再根据点 P 在 y 轴上, $PA \parallel x$ 轴, 作 $BK \perp y$ 轴于 K , 得出 $BK = AP = 1$, $\angle ALP = \angle BLK$, 证明 $\triangle APL \cong \triangle BKL$, 得出 $PL = LK = 2a$, 又结合平移得出 $\tan \angle PAL = \frac{PL}{AP} = 2a$, 在 $\triangle BCO$ 中, $\tan \angle CBO = \frac{OC}{BC} = \frac{1}{a}$, 由 $\tan \angle PAL = \tan \angle CBO$, 列方程解出 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 即可求解;

【小问 1 详解】

$\because y = ax^2 + bx + c$ 过 $O(0, 0)$,

$\therefore c = 0$,

又过 $A(1, 3a)$,

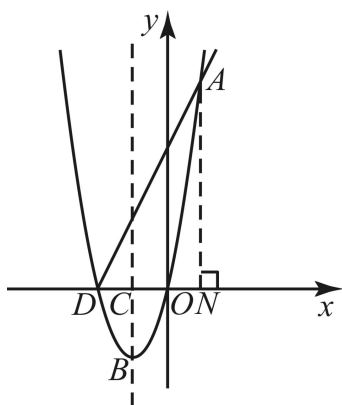
$\therefore a + b + c = 3a$,

$\therefore b = 2a$,

$\therefore y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2a}{2a} = -1$,

【小问 2 详解】

由 (1) 知 $b = 2a$, $c = 0$,



$\therefore y = ax^2 + 2ax = ax(x + 2) = 0$,

$\therefore x_1 = 0, x_2 = -2$,

$\therefore D(-2, 0)$,

过 A 作 $AN \perp x$ 轴,

$\therefore DN = 1 - (-2) = 3$,

$$\therefore \tan \angle ADC = 2 = \frac{AN}{DN},$$

$$\therefore AN = 2DN = 6,$$

$$\therefore 3a = 6,$$

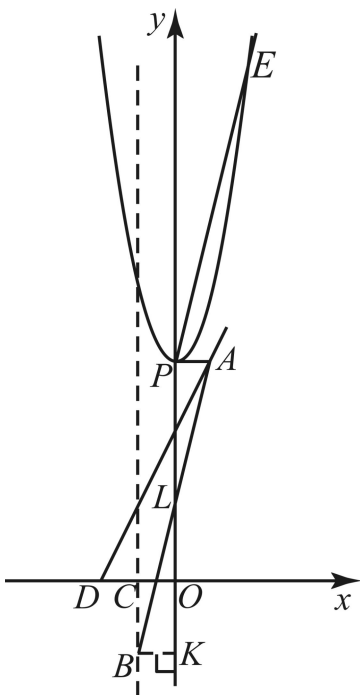
$$\therefore a = 2.$$

【小问3 详解】

$$\text{由 (1) 得, } y = ax^2 + 2ax = a(x^2 + 2x + 1 - 1) = a(x+1)^2 - a,$$

$$\therefore B(-1, a), \text{ 对称轴为直线 } x = -1,$$

$$\text{故 } C(-1, 0),$$



$\because$ 点 P 在 y 轴上, $PA \parallel x$ 轴,

作 $BK \perp y$ 轴于 K ,

$$\therefore BK = AP = 1,$$

设 AB 交 y 轴于 L ,

$$\therefore P(0, 3a),$$

$$\therefore \angle ALP = \angle BLK,$$

$$\text{又 } \angle APL = \angle BKL = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle APL \cong \triangle BKL,$$

$$\therefore PL = LK,$$

$$\text{又 } PK = 3a - (-a) = 4a,$$

$$\therefore PL = LK = 2a,$$

$$\therefore PL = LK = 2a,$$

又由平移知 $EP \parallel AB$,

$$\therefore \angle EPA = \angle PAL,$$

$$\therefore \tan \angle PAL = \frac{PL}{AP} = 2a,$$

$$\text{又在 } \triangle BCO \text{ 中, } \tan \angle CBO = \frac{OC}{BC} = \frac{1}{a},$$

$$\therefore \angle CBO = \angle EPA,$$

$$\therefore \angle PAL = \angle CBO,$$

$$\therefore \tan \angle PAL = \tan \angle CBO,$$

$$\therefore 2a = \frac{1}{a},$$

$$\therefore 2a^2 = 1,$$

$$\therefore a^2 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore a > 0,$$

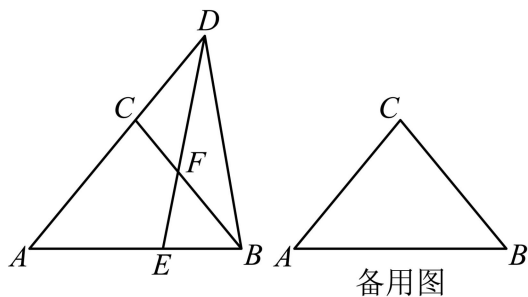
$$\therefore a = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \text{二次函数解析式为 } y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \sqrt{2}x,$$

$$\therefore P \text{ 为 } \left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\therefore \text{新抛物线解析式为 } y = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

25. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = BC$. 点 D 是射线 AC 上一点 (不与 A 、 C 重合), 点 F 在线段 BC 上, 直线 DF 交直线 AB 于点 E , $CD^2 = CF \cdot CB$.



(1) 如图, 如果点 D 在 AC 的延长线上

①求证: $DE = BD$;

②联结 CE , 如果 $CE \parallel BD$, $CE = 2$, 求 EF 的长.

(2) 如果 $DF : DE = 1 : 2$, 求: $AE : EB$ 的值.

【答案】 (1) ①见详解; ② $EF = \sqrt{5} - 1$

(2) $AE : EB$ 的值为 1

【解析】

【分析】 此题重点考查相似三角形的判定与性质、三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和、等腰三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质等知识, 证明 $FCD \sim DCB$ 是解题的关键.

(1) ①由 $CD^2 = CF \cdot CB$, 得 $\frac{CD}{CB} = \frac{CF}{CD}$, 因为 $\angle FCD = \angle DCB$, 所以 $FCD \sim DCB$, 得 $\angle CDF = \angle CBD$, 由 $AC = BC$, 得 $\angle A = \angle ABC$, 所以 $\angle A + \angle CDF = \angle ABC + \angle CBD$, 则 $\angle DEB = \angle DBE$, 即可证明 $DE = BD$;

②由 $CE \parallel BD$, 得 $\angle FCE = \angle CBD$, 则 $\angle FCE = \angle CDE$, 可证明 $FCE \sim CDE$, 得 $\frac{CE}{DE} = \frac{EF}{CE}$, 所以 $EF \cdot DE = CE^2 = 4$, 而 $\triangle CEF \sim \triangle BDF$, 得 $\frac{EF}{DF} = \frac{CE}{BD} = \frac{CE}{DE}$, 所以 $EF \cdot DE = 2DF$, 则 $2DF = 4$, 求得 $DF = 2$, 于是得 $EF(EF + 2) = 4$, 求得 $EF = \sqrt{5} - 1$;

(2) 分两种情况, 一是当点 D 在 AC 的延长线上, 联结 CE , 作 $EG \parallel BD$ 交 BC 的延长线于点 G , 可证明 $GEF \cong BDF$, 得 $GE = BD = DE$, 再证明 $BEG \cong AED$, 得 $BE = AE$, 则 $\frac{AE}{EB} = 1$; 二是当点 D 在线段 AC 上, 可证明 $\triangle FCD$ 与 $\triangle DCB$ 不相似, 则不存在 $CD^2 = CF \cdot CB$ 的情况.

【小问 1 详解】

证明: 如图 1, $\because CD^2 = CF \cdot CB$,

$$\therefore \frac{CD}{CB} = \frac{CF}{CD},$$

$$\because \angle FCD = \angle DCB,$$

$$\therefore FCD \sim DCB,$$

$$\therefore \angle CDF = \angle CBD,$$

$$\because AC = BC,$$

$$\therefore \angle A = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle A + \angle CDF = \angle ABC + \angle CBD,$$

$$\because \angle DEB = \angle A + \angle CDF, \angle DBE = \angle ABC + \angle CBD,$$

$$\therefore \angle DEB = \angle DBE,$$

$$\therefore DE = BD.$$

②如图1, $\because CE \parallel BD, CE = 2$,

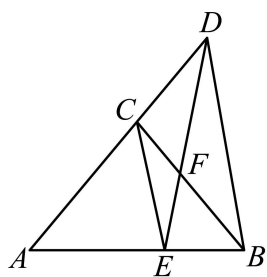


图1

$$\therefore \angle FCE = \angle CBD,$$

$$\because \angle CDE = \angle CBD,$$

$$\therefore \angle FCE = \angle CDE,$$

$$\because \angle CEF = \angle DEC,$$

$$\therefore FCE \sim CDE,$$

$$\therefore \frac{CE}{DE} = \frac{EF}{CE},$$

$$\therefore EF \cdot DE = CE^2 = 2^2 = 4,$$

$$\because CEF \sim BDF,$$

$$\therefore \frac{EF}{DF} = \frac{CE}{BD} = \frac{CE}{DE},$$

$$\therefore EF \cdot DE = 2DF,$$

$$\therefore 2DF = 4,$$

$$\therefore DF = 2,$$

$$\therefore EF(EF + 2) = 4,$$

解得 $EF = \sqrt{5} - 1$ 或 $EF = -\sqrt{5} - 1$ (舍去),

$$\therefore EF = \sqrt{5} - 1.$$

【小问 2 详解】

如图 2, 点 D 在 AC 的延长线上,

联结 CE , 作 $EG \parallel BD$ 交 BC 的延长线于点 G , 则 $\angle G = \angle DBF$,

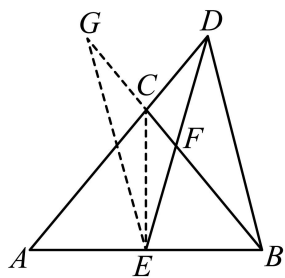


图2

$$\therefore \angle G = \angle ADE,$$

$$\because DF : DE = 1 : 2,$$

$$\therefore DF = EF = \frac{1}{2}DE,$$

在 $\triangle GEF$ 和 $\triangle BDF$ 中,

$$\begin{cases} \angle G = \angle DBF \\ \angle GFE = \angle BFD, \\ EF = DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle GEF \cong \triangle BDF (AAS),$$

$$\therefore GE = BD,$$

$$\therefore GE = DE,$$

$$\therefore \angle DEB = \angle DBE = \angle GEA,$$

$$\therefore \angle DEB + \angle GED = \angle GEA + \angle GED,$$

$$\therefore \angle BEG = \angle AED,$$

在 $\triangle BEG$ 和 $\triangle AED$ 中,

$$\begin{cases} \angle G = \angle ADE \\ GE = DE \\ \angle BEG = \angle AED \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BEG \cong \triangle AED (ASA),$$

$$\therefore BE = AE,$$

$$\therefore \frac{AE}{EB} = 1;$$

如图 3, 点 D 在线段 AC 上,

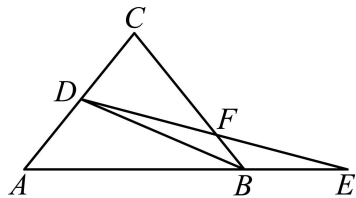


图3

$$\therefore \angle CDF > \angle A,$$

$$\therefore \angle CDF > \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ABC > \angle BFE, \angle BFE = \angle DFC,$$

$$\therefore \angle ABC > \angle DFC,$$

$$\therefore \angle CDF > \angle DFC,$$

$$\therefore \angle DFC > \angle CBD,$$

$$\therefore \angle CDF > \angle CBD,$$

$\therefore \triangle FCD$ 与 $\triangle DCB$ 不相似,

$\therefore$ 不存在 $CD^2 = CF \cdot CB$ 的情况,

综上所述,

$$AE : EB$$

名师教学 - 务实课程 - 注重教辅

电子版资料 小学 初中 高中

淘宝搜索店铺：优尖升教育
客服微信：DEM2008

手机淘宝扫一扫：



扫描二维码逛本店

ONLINE EDUCATION
为您的课程，我们一直在努力

最新资讯请认准“优尖升教育”，淘宝唯一一家，其他都是旧版
淘宝店铺网址：shop492842749.taobao.com



的值为 1.