

# 2023-2024 学年第一学期徐汇区学习能力诊断卷初三数学试卷

(时间 100 分钟 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题; 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分). 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的】

1. 下列抛物线中, 对称轴为直线  $x=1$  的抛物线的表达式是 ( )

- A.  $y=x^2+1$                       B.  $y=x^2-1$                       C.  $y=x^2+2x$                       D.  $y=x^2-2x$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的对称轴, 熟练掌握求二次函数对称轴的方法和技巧是解答本题的关键. 分别求出各选项中抛物线的对称轴, 由此进行判断, 得到答案.

【详解】解: 根据题意得:

A 选项中, 抛物线  $y=x^2+1$  的对称轴为  $y$  轴, 故本选项不符合题意;

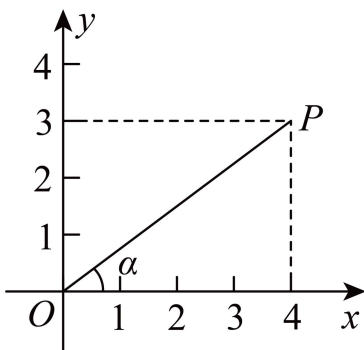
B 选项中, 抛物线  $y=x^2-1$  的对称轴为  $y$  轴, 故本选项不符合题意;

C 选项中, 抛物线  $y=x^2+2x=(x+1)^2-1$ , 该抛物线的对称轴为直线  $x=-1$ , 故本选项不符合题意;

D 选项中, 抛物线  $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$ , 该抛物线的对称轴为直线  $x=1$ , 故本选项符合题意;

故选: D.

2. 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 点  $P(4,3)$ ,  $OP$  与  $x$  轴正半轴的夹角为  $\alpha$ , 则  $\sin \alpha$  的值为 ( )



A.  $\frac{3}{5}$

B.  $\frac{4}{5}$

C.  $\frac{3}{4}$

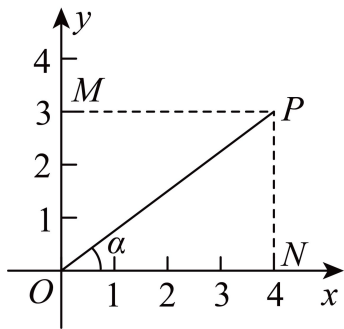
D.  $\frac{4}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】过  $P$  作  $PN \perp x$  轴于  $N$ ,  $PM \perp y$  轴于  $M$ , 根据点  $P$  的坐标求出  $PN$  和  $ON$ , 解直角三角形求出即可.

【详解】解: 过  $P$  作  $PN \perp x$  轴于  $N$ ,  $PM \perp y$  轴于  $M$ , 则  $\angle PMO = \angle PNO = 90^\circ$ ,



$\therefore$  点  $P(4, 3)$ ,

$\therefore ON = PM = 4$ ,  $PN = 3$ ,  $OP = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ,

$\therefore \sin \alpha = \frac{PN}{OP} = \frac{3}{5}$ ,

故选: A.

【点睛】本题考查了点的坐标和解直角三角形, 能求出  $PN$  和  $OP$  的长是解此题的关键.

3. 下列两个三角形一定相似的是 ( )

A. 两个直角三角形

B. 两个等腰三角形

C. 两个等边三角形

D. 两个面积相等的三角形

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查相似三角形的判定, 熟练掌握三角形相似的判定方法是解题的关键. 根据相似三角形的判定即可得到答案.

【详解】解: 两个直角三角形只可以确定一组角相等, 无法判定相似, 故选项 A 错误;

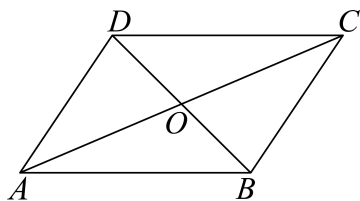
两个等腰三角形确定两边对应成比例, 无法判定相似, 故选项 B 错误;

两个等边三角形三个角对应相等, 可以判定相似, 故选项 C 正确;

两个面积相等的三角形, 只能得到底和高积相等, 无法判定相似, 故选项 D 错误.

故选: C.

4. 如图, 已知平行四边形  $ABCD$  的对角线  $AC$  和  $BD$  交于点  $O$ , 设  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ , 那么向量  $\overrightarrow{OC}$ 、 $\overrightarrow{OD}$ 、 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{BC}$  关于  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  的分解式中, 下列结论正确的是 ( )



- A.  $\overrightarrow{OC} = \vec{a}$                       B.  $\overrightarrow{OD} = -\vec{b}$                       C.  $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$                       D.  $\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$

【答案】B

【解析】

【分析】 本题考查平面向量, 平行四边形的性质等知识, 解题的关键是利用三角形法则解决问题. 利用平行四边形的性质, 三角形法则求解即可.

【详解】  $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形

$$\therefore OA = OC, OB = OD$$

$$\therefore \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} = -\vec{a}, \text{ 故 A 选项不符合题意}$$

$$\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB} = -\vec{b}, \text{ 故 B 选项符合题意}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}, \text{ 故 C 选项不符合题意}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = -\vec{a} - \vec{b}, \text{ 故 D 选项不符合题意}$$

故选: B

5. 进博会期间, 从一架离地 200 米的无人机 A 上, 测得地面监测点 B 的俯角是  $60^\circ$ , 那么此时无人机 A 与地面监测点 B 的距离是 ( )

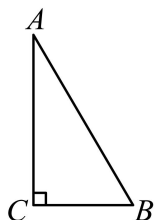
- A.  $\frac{200\sqrt{3}}{3}$  米                      B.  $\frac{400\sqrt{3}}{3}$  米                      C. 200 米                      D.  $200\sqrt{3}$  米

【答案】B

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形, 仰角俯角, 熟练掌握锐角三角函数的定义是解答本题的关键. 根据题意, 得到  $\text{Rt}\triangle ABC$ , 利用已知角的正弦, 求出答案.

【详解】 解: 如图, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,



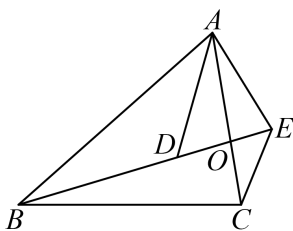
$AC = 200$  米,  $\angle ABC = 60^\circ$ ,

$$\therefore \sin \angle ABC = \frac{AC}{AB},$$

$$\therefore AB = \frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{200}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{400\sqrt{3}}{3} \text{ (米)},$$

故选: B.

6. 如图, 点  $D$  是  $\triangle ABC$  内一点, 点  $E$  在线段  $BD$  的延长线上,  $BE$  与  $AC$  交于点  $O$ , 分别连接  $AD$ 、 $AE$ 、 $CE$ , 如果  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ , 那么下列结论正确的是 ( )



A.  $CE \parallel AD$

B.  $BD = AD$

C.  $\angle ABE = \angle CBE$

D.  $BO \cdot AE = AO \cdot BC$

【答案】D

【解析】

【分析】 本题主要考查了相似三角形的判定与性质, 熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键. 利用相似三角形的判定与性质解答即可.

$$\text{【详解】} \because \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC},$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle AED,$$

$$\therefore \angle AOE = \angle BOC,$$

$$\therefore \triangle AOE \sim \triangle BOC,$$

$$\therefore \frac{AO}{AE} = \frac{BO}{BC},$$

$$\therefore BO \cdot AE = AO \cdot BC,$$

$\therefore$  D 选项的结论符合题意

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \quad \angle BAC = \angle DAE,$$

则  $\angle BAD = \angle CAE$ ,

$$\therefore \triangle BAD \sim \triangle CAE,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ACE,$$

$\therefore \angle ACE$  与  $\angle BEC$  不一定相等,

故 C 选项的结论不符合题意,

已知条件不能证明  $CE \parallel AD$ ,  $BD = AD$ , 故 A、B 选项不符合题意,

故选: D.

## 二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 计算:  $2 \sin 60^\circ - \cot 30^\circ =$  \_\_\_\_\_.

【答案】 0

【解析】

【分析】 本题考查了特殊角的三角函数值; 根据特殊角的三角函数值进行计算即可求解.

$$\text{【详解】 解: } 2 \sin 60^\circ - \cot 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = 0,$$

故答案为: 0.

8. 已知点  $P$  是线段  $AB$  的黄金分割点 ( $AP > BP$ ), 如果  $AB = 2$ , 那么  $BP$  的长是 \_\_\_\_\_.

【答案】  $3 - \sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考出来黄金分割, 解一元二次方程组. 由题意知,  $BP = AB - AP = 2 - AP$ , 由点  $P$  是线段  $AB$  的黄金分割点, 可得  $\frac{AP}{AB} = \frac{BP}{AP}$ , 即  $\frac{AP}{2} = \frac{2 - AP}{AP}$ , 整理得  $AP^2 - 2AP + 4 = 0$ , 计算求出满足要求的解即可.

$$\text{【详解】 解: 由题意知, } BP = AB - AP = 2 - AP,$$

$\therefore$  点  $P$  是线段  $AB$  的黄金分割点,

$$\therefore \frac{AP}{AB} = \frac{BP}{AP}, \text{ 即 } \frac{AP}{2} = \frac{2 - AP}{AP}, \text{ 整理得 } AP^2 - 2AP + 4 = 0,$$

$$\text{解得: } AP = -1 + \sqrt{5} \text{ 或 } AP = -1 - \sqrt{5} \text{ (舍去),}$$

$$\therefore BP = 2 - AP = 2 - (-1 + \sqrt{5}) = 3 - \sqrt{5}$$

故答案为:  $3 - \sqrt{5}$ .

9. 已知  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ，如果它们对应高的比  $AM:DN = \sqrt{2}:3$ ，那么  $\triangle ABC$  和  $\triangle DEF$  的面积比是\_\_\_\_\_.

【答案】  $2:9$

【解析】

【分析】 本题考查相似三角形的性质，根据相似三角形面积的比等于相似比的平方，由此即可计算.

【详解】 解：  $\because \triangle ABC \sim \triangle DEF$ ，如果它们对应高的比  $AM:DN = \sqrt{2}:3$ ，

$\therefore \triangle ABC$  和  $\triangle DEF$  的相似比是  $\sqrt{2}:3$

$\therefore \triangle ABC$  和  $\triangle DEF$  的面积比是  $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$ ，

故答案为：  $\frac{2}{9}$  .

10. 在  $\triangle ABC$  中，点  $D$ 、 $E$  分别在边  $AB$ 、 $AC$  上，如果  $AD:AB = 2:3$ ， $AE = 4$ ， $CE = 2$ ， $DE = 3$ ，那么  $BC$  的长是\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{9}{2}$

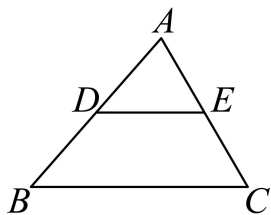
【解析】

【分析】 本题考查了相似三角形的性质和判定，熟练掌握相似三角形的判定和性质是解答本题的关键.

根据题意，得到  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ ，可以证明  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，再根据相似三角形的性质，可以得到

$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$ ，由此得到答案.

【详解】 解：如图，



$\because AE = 4$ ， $EC = 2$ ，

$\therefore AC = AE + EC = 6$ ，

$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ，

$\because AD:AB = 2:3$ ，

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC},$$

$$\because \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

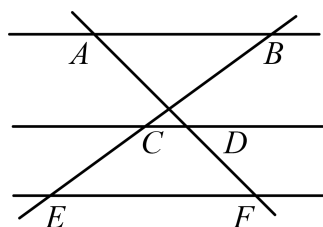
$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{2}{3},$$

$$\because DE = 3,$$

$$\therefore BC = \frac{9}{2},$$

故答案为:  $\frac{9}{2}$ .

11. 如图,  $AB \parallel CD \parallel EF$ , 如果  $AD = 2$ ,  $DF = 1.5$ ,  $CE = 1.8$ , 那么  $BE$  的长是\_\_\_\_\_.



【答案】 4.2

【解析】

【分析】 本题主要考查平行线分线段成比例定理, 熟练掌握平行线分线段成比例定理是解题的关键. 根据平行线分线段成比例定理求解即可.

【详解】 解:  $\because AB \parallel CD \parallel EF$ ,

$$\therefore \frac{AD}{DF} = \frac{BC}{CE},$$

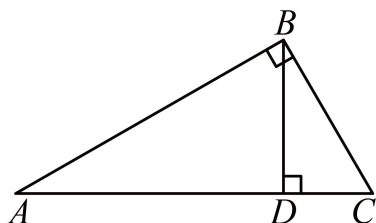
$$\because AD = 2, DF = 1.5, CE = 1.8,$$

$$\therefore \frac{2}{1.5} = \frac{BE - 1.8}{1.8},$$

$$\therefore BE = 4.2.$$

故答案为: 4.2.

12. 如图, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $BD \perp AC$  于  $D$ , 如果  $\triangle BCD$  和  $\triangle ABD$  的面积比为  $9:16$ ,  $CD = 12$ , 那么  $AB$  的长是\_\_\_\_\_.



【答案】  $\frac{80}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查三角形相似的判定和性质，熟练掌握三角形相似的判定和性质是解题的关键。证明  $\triangle ABD \sim \triangle BCD$ ，根据相似的性质求出  $AD$ 、 $BC$  即可得到答案。

【详解】 解：  $\because \angle ABC = 90^\circ$ ,

$$\therefore \angle ABD + \angle CBD = 90^\circ,$$

$$\because BD \perp AC,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle A = 90^\circ,$$

$$\angle ADB = \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle BCD,$$

$$\therefore \frac{BD}{CD} = \frac{AD}{BD},$$

$\because \triangle BCD$  和  $\triangle ABD$  的面积比为  $9:16$ ,

$$\therefore \frac{BD}{CD} = \frac{AD}{BD} = \frac{4}{3},$$

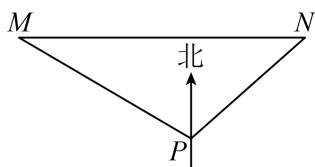
$$\because CD = 12,$$

$$\therefore BD = 16, AD = \frac{64}{3},$$

$$\therefore AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{\left(\frac{64}{3}\right)^2 + 16^2} = \frac{80}{3}.$$

故答案为：  $\frac{80}{3}$  .

13. 如图，一段东西向的限速公路  $MN$  长 500 米，在此公路的南面有一监测点  $P$ ，从监测点  $P$  观察，限速公路  $MN$  的端点  $M$  在监测点  $P$  的北偏西  $60^\circ$  方向，端点  $N$  在监测点  $P$  的东北方向，那么监测点  $P$  到限速公路  $MN$  的距离是\_\_\_\_\_米（结果保留根号）。



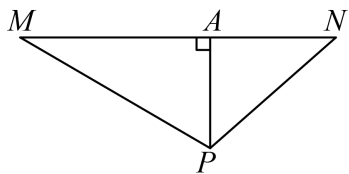
【答案】  $250\sqrt{3} - 250$

【解析】

【分析】 本题考查了解直角三角形的应用，熟练掌握方向角，正确作辅助线，构造直角三角形是解答本题的关键.

过点  $P$  作  $PA \perp MN$  于点  $A$ ，则  $\angle PAM = \angle PAN = 90^\circ$ ，设  $PA = x$  米，通过证明  $\triangle PAN$  是等腰直角三角形，得到  $NA = PA = x$  米，再由勾股定理得到  $MA = \sqrt{3}PA = \sqrt{3}x$  米，再由  $MA + NA = MN = 500$ ，求出答案.

【详解】 解：如图，过点  $P$  作  $PA \perp MN$  于点  $A$ ，



则  $\angle PAM = \angle PAN = 90^\circ$ ，

设  $PA = x$  米，

由题意得：

$\angle MPA = 60^\circ$ ，  $\angle NPA = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle PAN$  是等腰直角三角形，

$\therefore NA = PA = x$  米，

$\therefore$  在  $\text{Rt}\triangle MAP$  中，

$$MP^2 = MA^2 + AP^2,$$

$$\therefore MA = \sqrt{MP^2 - AP^2},$$

又  $MP = 2AP$ ，

$$\therefore MA = \sqrt{3}PA = \sqrt{3}x \text{ (米)},$$

$$\therefore MA + NA = MN = 500,$$

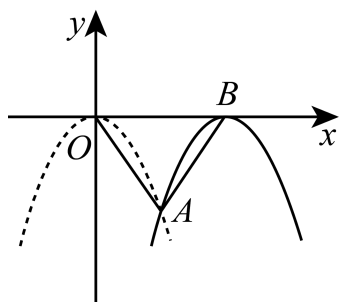
$$\therefore \sqrt{3}x + x = 500,$$

$$\text{解得： } x = 250\sqrt{3} - 250,$$

即监测点  $P$  到限速公路  $MN$  的距离是  $(250\sqrt{3} - 250)$  米，

故答案为：  $250\sqrt{3} - 250$  .

14. 将抛物线  $y = -x^2$  向右平移后，所得新抛物线的顶点是  $B$ ，新抛物线与原抛物线交于点  $A$ （如图所示），联接  $OA$ 、 $AB$  如果  $\triangle AOB$  是等边三角形，那么点  $B$  的坐标是\_\_\_\_\_.



【答案】  $B(2\sqrt{3}, 0)$

【解析】

【分析】 本题主要考查二次函数图像与几何变换，等边三角形的性质，二次函数图像上点的坐标特征，根据题意得到关于  $m$  的方程是解题的关键。由题意设  $A$  点坐标为  $(m, -m^2)$ ，根据等边三角形的性质得到  $B(2m, 0)$ ，解出  $m$  的值即可得到答案。

【详解】 解：  $\because$  点  $A$  在抛物线  $y = -x^2$  上，

$\therefore$  设  $A$  点坐标为  $(m, -m^2)$ ，

$\because \triangle AOB$  是等边三角形，

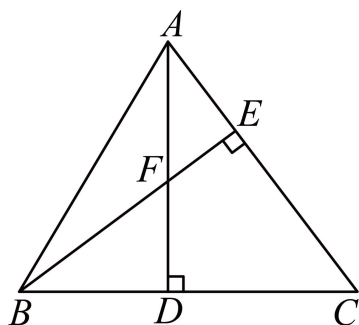
$\therefore B(2m, 0)$ ，  $m = \frac{\sqrt{3}}{3} m^2$ ，

$\therefore m = \sqrt{3}$  或  $m = 0$ （舍），

$\therefore B(2\sqrt{3}, 0)$ 。

故答案为：  $B(2\sqrt{3}, 0)$ 。

15. 如图，在  $\triangle ABC$  中，  $AD$  和  $BE$  是  $\triangle ABC$  的高，且交于点  $F$ ，已知  $AB = 13$ ，  $BC = 15$ ，  $AC = 14$ ，那么  $\angle AFE$  的正切值是\_\_\_\_\_.



【答案】  $\frac{4}{3}$  或  $1\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了求正切值，勾股定理；利用勾股定理求出  $BE$  的长，再将  $\angle AFE$  转化成  $\angle C$  即可解决问题.

【详解】 解： 令  $AE = x$ ,

在  $Rt\triangle ABE$  中,  $BE^2 = 13^2 - x^2$ .

在  $Rt\triangle BCE$  中,  $BE^2 = 15^2 - (14 - x)^2$ .

则  $13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$ ,

解得  $x = 5$ ,

则  $BE = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

$\therefore CE = 14 - 5 = 9$ .

又因为  $\angle AFE + \angle CAD = 90^\circ$ ,  $\angle C + \angle CAD = 90^\circ$ ,

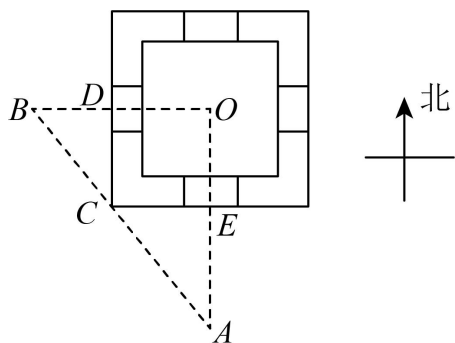
所以  $\angle AFE = \angle C$ .

在  $Rt\triangle BCE$  中,  $\tan C = \frac{BE}{EC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

$\therefore \tan \angle AFE = \tan C = \frac{4}{3}$ ;

故答案为:  $\frac{4}{3}$ .

16. 中国古代数学书《御制数理精蕴》中有一道题大意如下：如图，从前有一座方城，四面城墙的中间都有城门，出南门后往前直走 8 里到宝塔  $A$  处(即  $EA = 8$  里)，出西门往前直走 2 里到  $B$  处(即  $DB = 2$  里)，此时，视线刚好能紧靠城墙角  $C$  看见宝塔  $A$ ，如果设正方形的中心为  $O$ ，点  $O$ 、 $D$ 、 $B$  在一直线上，点  $O$ 、 $E$ 、 $A$  在一直线上，那么这座方城每一面的城墙长是\_\_\_\_\_里.



【答案】 8

【解析】

【分析】 本题考查了正方形的性质，相似三角形的性质与判定；先根据正方形的性质得出  $OB \parallel CE$ ，再根据相似三角形的性质列方程求解.

【详解】 解： 设正方形是灭一面城墙的长度为  $2x$  里，

$\because$  正方形的中心为  $O$ ，

$$\therefore OD = CD = OE = CE = x \text{ 里}, \quad OB \parallel CE,$$

$$\therefore \triangle ACE \sim \triangle ABO,$$

$$\therefore \frac{AE}{OA} = \frac{CE}{OB}$$

$$\text{即 } \frac{8}{8+x} = \frac{x}{x+2}$$

解得：  $x = 4$ ， 或  $x = -4$  (不合题意，舍去)，

$$\therefore 2x = 8,$$

故答案为： 8.

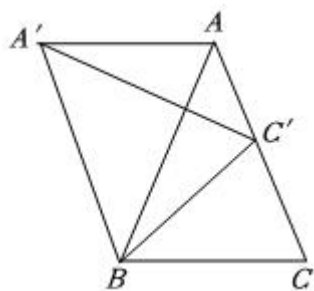
17. 在  $\triangle ABC$  中，  $AB = AC = 6$ ，  $BC = 4$ ， 如果将  $\triangle ABC$  绕着点  $B$  旋转， 使得点  $C$  落在边  $AC$  上， 此时， 点  $A$  落在点  $A'$  处， 连接  $AA'$ ， 那么  $AA'$  的长是\_\_\_\_\_.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查旋转的性质， 等腰三角形的性质， 全等三角形的判定和性质， 作出图形， 可以利用  $SAS$  证明  $\triangle BA'A \cong \triangle ABC$ ， 从而得到  $AA' = BC$ ， 进而得到  $AA'$  的长.

【详解】 解： 如图所示：



由题意， 知  $\triangle A'BC' \cong \triangle ABC$ ，

$$\therefore \angle A'BC' = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle A'BC' - \angle ABC' = \angle ABC - \angle ABC',$$

$$\text{即 } \angle A'BA = \angle C'BC,$$

$$\therefore AB = AC, \quad BC = BC',$$

$$\therefore \angle ABC = \angle C = \angle BC'C,$$

$$\therefore \angle C'BC = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle A'BA = \angle BAC,$$

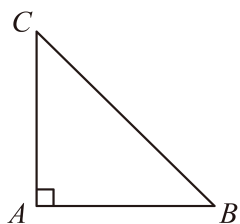
$$\because A'B = AB = AC,$$

$$\therefore \triangle BA'A \cong \triangle ABC (\text{SAS}),$$

$$\therefore AA' = BC = 4,$$

故答案为：4.

18. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC = \sqrt{5}$ ，如果点  $P$  在  $\triangle ABC$  的内部，且满足  $\angle APC = \angle BPC = 135^\circ$ ，那么  $CP$  的长是\_\_\_\_\_.



【答案】  $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】本题考查了相似三角形的判定和性质，等腰直角三角形的性质，勾股定理；通过证明  $\triangle ACP \sim \triangle CBP$ ，可得  $CP = \sqrt{2} AP$ ， $BP = \sqrt{2} CP$ ，由勾股定理可求解.

【详解】解：  $\because \angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC = \sqrt{5}$ ，

$$\therefore BC = \sqrt{2} AC = \sqrt{10}, \quad \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\because \angle APC = \angle BPC = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle ACP + \angle CAP = 45^\circ = \angle ACP + \angle BCP, \quad \angle APB = 360^\circ - \angle APC - \angle BPC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCP = \angle CAP,$$

$$\therefore \triangle ACP \sim \triangle CBP,$$

$$\therefore \frac{AP}{CP} = \frac{CP}{PB} = \frac{AC}{BC}$$

$$\therefore CP = \sqrt{2} AP, BP = \sqrt{2} CP$$

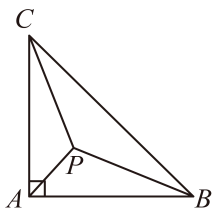
$$\therefore BP = 2AP,$$

$$\because BP^2 + AP^2 = AB^2$$

$$\therefore 5AP^2 = 5$$

$$\therefore AP = 1,$$

$$\therefore CP = \sqrt{2}$$



故答案为:  $\sqrt{2}$ .

三、(本大题共 7 题, 第 19-22 题每题 10 分; 第 23、24 题每题 12 分; 第 25 题 14 分; 满分 78 分)

19. 已知:  $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$ .

(1) 求代数式  $\frac{a+4b}{2a-3b}$  的值;

(2) 当  $2a+3b-3=35$  时, 求  $a$ 、 $b$  的值.

【答案】(1)  $-2$

(2)  $a=4$ 、 $b=10$

【解析】

【分析】 本题主要考查比例的性质, 熟练掌握比例的性质是解题的关键. 令  $a=2k$ ,  $b=5k$  即可求解.

(1) 把  $a=2k$ ,  $b=5k$  代入  $\frac{a+4b}{2a-3b}$  即可求值;

(2) 把  $a=2k$ ,  $b=5k$  代入  $2a+3b-3=35$  求出  $k$  的值, 即可得到答案.

【小问 1 详解】

解:  $\because \frac{a}{b} = \frac{2}{5}$ ,

令  $a=2k$ ,  $b=5k$ ,

$$\text{原式} = \frac{2k+4 \times 5k}{2 \times 2k-3 \times 5k} = \frac{22k}{-11k} = -2;$$

【小问 2 详解】

解:  $\because \frac{a}{b} = \frac{2}{5}$ ,

令  $a=2k$ ,  $b=5k$ ,

故  $2 \times 2k + 3 \times 5k - 3 = 35$ ,

解得  $k=2$ ,

$$\therefore a = 2k = 4, b = 5k = 10$$

20. 已知抛物线  $y = -x^2 + bx + 3$  与  $y$  轴交于点  $C$ ，与  $x$  轴交于点  $A(-1, 0)$  和点  $B$ ，顶点为  $D$ 。

- (1) 求此抛物线的表达式及顶点  $D$  坐标；
- (2) 连接  $CD$ 、 $BD$ ，求  $\angle CDB$  的余弦值。

**【答案】** (1)  $y = -x^2 + 2x + 3$ ， $D(1, -4)$

$$(2) \frac{\sqrt{10}}{10}$$

**【解析】**

**【分析】** 本题主要考查了抛物线的图象与性质、解直角三角形，解题时要熟练掌握并能灵活运用是关键。

(1) 将  $A(-1, 0)$  代入  $y = -x^2 + bx + 3$  求出  $b$ ，进而求出抛物线的表达式，再化成顶点式可得  $D$  的坐标。

(2) 令  $y = 0$ ，可求得  $B$  的坐标，令  $x = 0$ ，求得  $C$  的坐标，再分别求出  $BC$ 、 $BD$ 、 $CD$  的长，由勾股定理逆定理可得  $\angle DCB = 90^\circ$ ，进而求出  $\cos \angle CDB$  的值。

**【小问 1 详解】**

解：将  $A(-1, 0)$  代入  $y = -x^2 + bx + 3$  中，

$$\therefore b = 2,$$

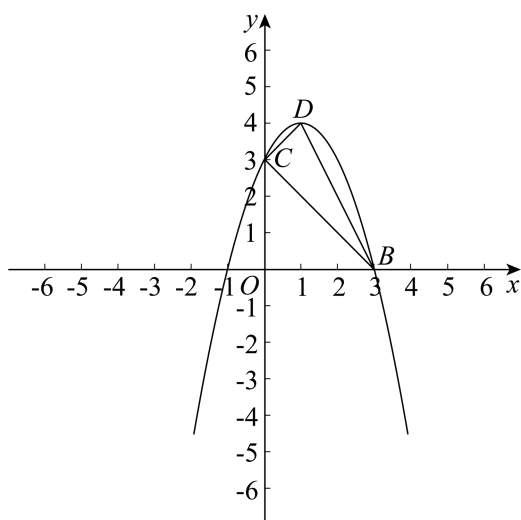
$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -x^2 + 2x + 3,$$

$$\therefore y = -x^2 + 2x + 3 = (x-1)^2 - 4,$$

$$\therefore \text{该抛物线的顶点 } D \text{ 坐标为 } (1, -4);$$

**【小问 2 详解】**

如图



令  $y = 0$ ，即  $-x^2 + 2x + 3 = 0$

$\therefore x = 3$ ，或  $x = -1$

$\therefore B(3, 0)$

令  $x = 0$ ，

$\therefore y = 3$ ，

$\therefore C(0, 3)$ ，

$\therefore CD = \sqrt{(1-0)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2}$ ，

$DB = \sqrt{(1-3)^2 + (4-0)^2} = 2\sqrt{5}$ ，

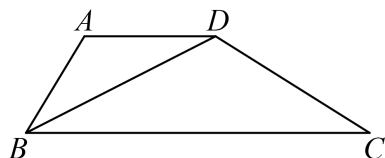
$BC = \sqrt{(3-0)^2 + (0-3)^2} = 3\sqrt{2}$ ，

$\therefore BC^2 + CD^2 = BD^2$ ，

$\therefore \angle BCD = 90^\circ$ ，

$\therefore \cos \angle CDB = \frac{CD}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ 。

21. 如图，在梯形  $ABCD$  中， $AD \parallel BC$ ， $BD$  平分  $\angle ABC$ ， $CD = BD = 8$ ， $AB = 5$ 。



(1) 求  $BC$  的长；

(2) 设  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ，求向量  $\overrightarrow{BD}$  (用向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  表示)。

【答案】 (1)  $\frac{64}{5}$

(2)  $\frac{25}{64}\vec{b} - \vec{a}$

【解析】

【分析】 本题考查了平面向量，相似三角形的判定与性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质，是解答本题的关键.

(1) 根据题意，证明  $\triangle ABD \sim \triangle DBC$ ，得到  $\frac{AB}{DB} = \frac{BD}{BC}$ ，由此得到答案.

(2) 过点  $D$  作  $DE \parallel AB$ ，求出  $\overrightarrow{BE} = \frac{25}{64}\vec{b}$ ，再根据平行四边形法则求出  $\overrightarrow{BD}$ .

【小问 1 详解】

解：根据题意得：

$$AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC,$$

$$\because BD \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB,$$

$$\therefore AB = AD = 5,$$

$$\because CD = BD = 8,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle C,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle DBC, \angle ADB = \angle C,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DBC,$$

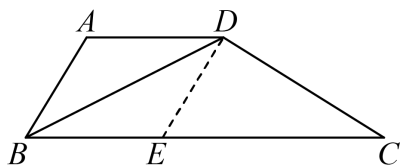
$$\therefore \frac{AB}{DB} = \frac{BD}{BC},$$

$$\therefore \frac{5}{8} = \frac{8}{BC},$$

$$\therefore BC = \frac{64}{5}.$$

【小问 2 详解】

如图，过点  $D$  作  $DE \parallel AB$ ，



则四边形  $ABED$  是平行四边形，

$$\therefore BE = AD = 5,$$

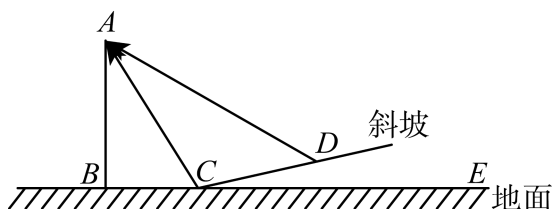
$$\therefore BE = \frac{25}{64} BC,$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \frac{25}{64} \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE} = \frac{25}{64} \vec{b} - \vec{a}.$$

22. 小杰在学习了“仰角、俯角、坡比”后，他在自己居住的小区设计了如下测量方案：小杰利用小区中的一个斜坡  $CD$ ，首先在斜坡  $CD$  的底端  $C$  测得高楼顶端  $A$  的仰角是  $60^\circ$ ，然后沿斜坡  $CD$  向上走到  $D$  处，再测得高楼顶端  $A$  的仰角是  $37^\circ$ ，已知斜坡  $CD$  的坡比是  $i = 1:6$ ，斜坡  $CD$  的底端  $C$  到高楼  $AB$  底端  $B$  的距离是  $20\sqrt{3}$  米，且  $B$ 、 $C$ 、 $E$  三点在一直线上（如图所示）。假设测角仪器的高度忽略不计，请根据小杰的方案，完成下列问题：



(1) 求高楼  $AB$  的高度；

(2) 求点  $D$  离地面的距离（结果精确到 0.1 米）。（参考数据： $\sin 37^\circ \approx 0.60$ ， $\cos 37^\circ \approx 0.80$ ，

$\tan 37^\circ \approx 0.75$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$ ）

**【答案】** (1) 60 米 (2) 6.2 米

**【解析】**

**【分析】** 本题考查的是解直角三角形的应用-仰角俯角问题、坡度坡角问题；

(1) 根据正切的定义求出  $AB$ ；

(2) 过点  $D$  作  $DG \perp BE$  于点  $G$ ， $DH \perp AB$  于点  $H$ ，设  $DG = x$  米，根据坡度的概念用  $x$  表示出  $DH$ ，根据正切的定义列出方程，解方程得到答案。

**【小问 1 详解】**

解：在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $BC = 20\sqrt{3}$  米， $\angle ACB = 60^\circ$ ，

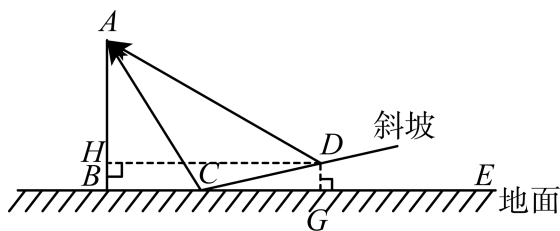
$$\therefore \tan \angle ACB = \frac{AB}{BC},$$

$$\therefore AB = BC \tan \angle ACB = 20\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 60 \text{ (米)},$$

答：高楼  $AB$  的高度为 60 米；

【小问2详解】

过点  $D$  作  $DG \perp BE$  于点  $G$ ， $DH \perp AB$  于点  $H$ ，



则四边形  $HBGD$  为矩形，

$$\therefore BH = DG, \quad DH = BG,$$

设  $DG = x$  米，

$$\therefore AH = AB - BH = (60 - x) \text{ 米},$$

$\because$  斜坡  $CD$  的坡比是  $i = 1:6$ ，

$$\therefore CG = 6x \text{ 米},$$

$$\therefore BG = (20\sqrt{3} + 6x) \text{ 米},$$

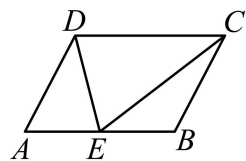
$$\text{在 Rt}\triangle AHD \text{ 中, } \tan \angle ADH = \frac{AH}{DH}$$

$$\therefore \frac{60 - x}{20\sqrt{3} + 6x} \approx 0.75$$

$$\text{解得: } x = \frac{120 - 30\sqrt{3}}{11} \approx 6.2, \text{ 经检验是原方程的解,}$$

答：点  $D$  离地面的距离约为 6.2 米.

23. 如图，在  $ABCD$  中，点  $E$  在边  $AB$  上， $DE^2 = AE \cdot CD$  .



(1) 求证：  $AD \cdot CD = CE \cdot DE$  ；

(2) 当点  $E$  是边  $AB$  的中点时，分别延长  $DE$ 、 $CB$  交于点  $F$ ，求证：  $AB^2 = 2EF^2$  .

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】此题考查了相似三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、平行四边形的性质；

(1) 根据相似三角形的判定与性质求解即可；

(2) 结合平行四边形的性质利用 AAS 证明  $\triangle ADE \cong \triangle BFE$ ，根据全等三角形的性质得出  $DE = EF$ ，等量

代换即可得解.

【小问 1 详解】

证明: 在  $\square ABCD$  中,  $AB \parallel CD$ ,

$$\therefore \angle AED = \angle CDE,$$

$$\therefore DE^2 = AE \cdot CD,$$

$$\therefore \frac{DE}{AE} = \frac{CD}{DE},$$

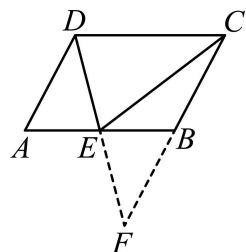
$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ECD,$$

$$\therefore \frac{AD}{CE} = \frac{DE}{CD},$$

$$\therefore AD \cdot CD = CE \cdot DE;$$

【小问 2 详解】

如图,



在  $\square ABCD$  中,  $AB = CD$ ,  $AD \parallel BC$ ,

$$\therefore \angle A = \angle FBE, \quad \angle ADE = \angle F,$$

$\therefore$  点  $E$  是边  $AB$  的中点,

$$\therefore AE = BE,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BFE \text{ (AAS)},$$

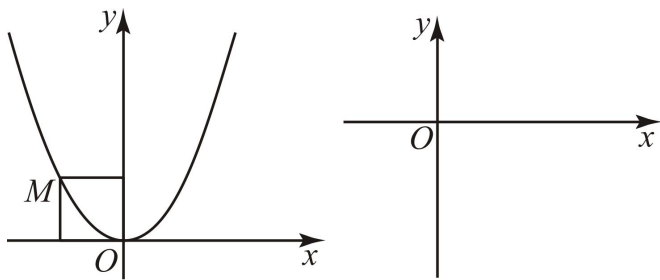
$$\therefore DE = EF,$$

$$\therefore DE^2 = AE \cdot CD,$$

$$\therefore EF^2 = \frac{1}{2} AB \cdot AB,$$

$$\therefore AB^2 = 2EF^2.$$

24. 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 第二象限的点  $M$  在抛物线  $y = ax^2 (a > 0)$  上, 点  $M$  到两坐标轴的距离都是 2.



(备用图)

(1) 求该抛物线的表达式;

(2) 将抛物线  $y = ax^2$  ( $a > 0$ ) 先向右平移  $\frac{3}{2}$  个单位, 再向下平移  $k$  ( $k > 0$ ) 个单位后, 所得新抛物线与  $x$  轴交于点  $A(m, 0)$  和点  $B(n, 0)$ , 已知  $m < n$ , 且  $mn = -4$ , 与  $y$  轴负半轴交于点  $C$ .

①求  $k$  的值;

②设直线  $y = -\frac{4}{3}x$  与上述新抛物线的对称轴的交点为  $D$ , 点  $P$  是直线  $y = -\frac{4}{3}x$  上位于点  $D$  下方的一点, 分别连接  $CD$ 、 $CP$ , 如果  $\tan \angle PCD = \frac{3}{4}$ , 求点  $P$  的坐标.

【答案】(1)  $y = \frac{1}{2}x^2$

(2) ①  $k = \frac{25}{8}$ ; ②  $\left(\frac{24}{7}, -\frac{32}{7}\right)$

【解析】

【分析】本题考查了二次函数的性质, 待定系数法求解析式, 直角三角形的性质, 熟练掌握相关的性质, 是解答本题的关键.

(1) 利用待定系数法, 求得  $a = \frac{1}{2}$ , 由此得到答案.

(2) ①根据题意得到, 平移后的抛物线表达式为  $y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - k$ , 根据已知条件, 令  $y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - k = 0$ , 求出  $k = \frac{25}{8}$ , 得到答案.

②先利用已知条件, 求出点  $C(0, -2)$ , 点  $D\left(\frac{3}{2}, -2\right)$ , 由此得到  $CD \parallel x$  轴, 过点  $P$ , 作  $PH \perp y$  轴于点  $H$ , 得到  $\tan \angle PCD = \frac{3}{4} = \tan \angle CPH$ , 又  $\tan \angle POH = \frac{3}{4}$ , 设  $CH = 3x$ ,  $PH = 4x$ , 由此得到答案.

【小问 1 详解】

解: 根据题意得:

点  $M(-2, 2)$ , 点  $M$  在抛物线  $y = ax^2$  ( $a > 0$ ) 上,

$$\therefore 2 = 4a,$$

$$\text{解得: } a = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{该抛物线的表达式为: } y = \frac{1}{2}x^2.$$

【小问2详解】

①根据题意得:

将抛物线  $y = \frac{1}{2}x^2$  先向右平移  $\frac{3}{2}$  个单位, 再向下平移  $k (k > 0)$  个单位后的表达式为:

$$y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - k,$$

$$\text{令 } y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - k = 0,$$

$$\text{解得: } x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{2k},$$

$$\therefore mn = -4,$$

$$\therefore \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2k}\right)\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2k}\right) = -4,$$

$$\text{解得: } k = \frac{25}{8};$$

②由①抛物线的表达式为:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2,$$

$$\text{其对称轴为 } x = \frac{3}{2},$$

$$\text{则点 } C(0, -2),$$

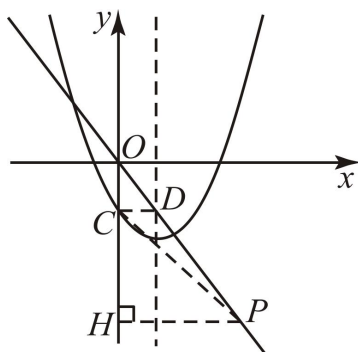
$$\text{当 } x = \frac{3}{2} \text{ 时, } y = -\frac{4}{3}x = -2,$$

$$\text{即点 } D\left(\frac{3}{2}, -2\right),$$

$\therefore$  点  $C$ 、 $D$  的纵坐标相同,

$$\therefore CD \parallel x \text{ 轴},$$

过点  $P$ , 作  $PH \perp y$  轴于点  $H$ ,



由  $D$  的坐标, 得到  $\tan \angle DOC = \frac{3}{4}$ ,

则  $\tan \angle POH = \frac{3}{4}$ ,

$\therefore \tan \angle PCD = \frac{3}{4} = \tan \angle CPH$ ,

$\therefore$  设  $CH = 3x$ ,  $PH = 4x$ ,

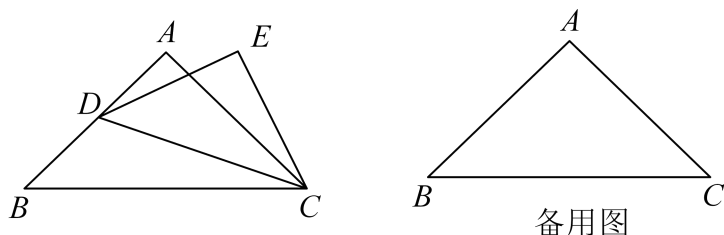
在  $\text{Rt}\triangle OPH$  中,

$$\tan \angle POH = \frac{PH}{OH} = \frac{4x}{2+3x} = \frac{3}{4},$$

解得:  $x = \frac{6}{7}$ ,

则点  $P$  坐标为:  $\left(\frac{24}{7}, -\frac{32}{7}\right)$ .

25. 如图, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $AB = AC = 2\sqrt{2}$ , 点  $D$  是边  $AB$  上的动点 (点  $D$  不与点  $B$  重合), 以  $CD$  为斜边在直线  $BC$  上方作等腰直角三角形  $DEC$ .



备用图

- (1) 当点  $D$  是边  $AB$  的中点时, 求  $\sin \angle DCB$  的值;
- (2)  $AE$ , 点  $D$  在边  $AB$  上运动的过程中,  $\angle EAC$  的大小是否变化? 如果变化, 请说明理由; 如果不变, 请求出  $\angle EAC$  的大小;
- (3) 设  $DE$  与  $AC$  的交点为  $G$ , 点  $P$  是边  $BC$  上的一点, 且  $\angle CPD = \angle CGD$ , 如果点  $P$  到直线  $CD$  的距离等于线段  $GE$  的长度, 求  $\triangle CDE$  的面积.

**【答案】** (1)  $\frac{\sqrt{10}}{10}$

(2) 不变,  $\angle EAC = 45^\circ$ , 理由见解析.

(3)  $S_{\triangle CDE} = 8 - 4\sqrt{2}$

【解析】

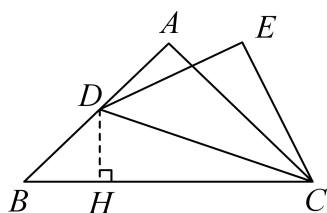
【分析】(1) 过点  $D$  作  $DH \perp BC$ , 根据已知条件, 得到  $\triangle BHD$  为等腰直角三角形,  $BD = \sqrt{2}$ ,  $DH = BH = 1$ , 利用勾股定理, 得到  $DC = \sqrt{10}$ , 由此得到答案.

(2) 根据题意, 由等腰直角三角形的性质, 得到  $\angle DCB = \angle ECA$ , 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $BC = 4$ ,  $AC = 2\sqrt{2}$ , 在  $\text{Rt}\triangle EDC$  中, 设  $EC = a$ , 则  $DC = \sqrt{2}a$ , 由此证明  $\triangle BDC \sim \triangle AEC$ , 得到答案.

(3) 过点  $D$  作  $DM \parallel QP$ , 交  $BC$  与  $M$ ,  $PQ \perp CD$ , 由  $\triangle DMC \sim \triangle QPC$ , 得到  $\frac{DM}{QP} = \frac{CD}{CQ}$ , 通过证明  $\triangle PCQ \cong \triangle GCE$  (AAS), 得到  $EC = CQ$ , 再通过  $\triangle DMH \cong \triangle DPH$  (ASA), 得到  $DM = DP$ , 进而得到  $\triangle QPD$  是等腰直角三角形, 不难得到  $\triangle ADC \cong \triangle HDC$ , 得到  $CH = 2\sqrt{2}$ ,  $BH = 4 - 2\sqrt{2}$ ,  $AD = 4 - 2\sqrt{2}$ , 由此得到答案.

【小问 1 详解】

解: 过点  $D$  作  $DH \perp BC$ ,



$$\because \angle BAC = 90^\circ, AB = AC = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \angle B = 45^\circ,$$

$$\because DH \perp BC,$$

$$\therefore \triangle BHD \text{ 为等腰直角三角形,}$$

$$\because \text{点 } D \text{ 是边 } AB \text{ 的中点,}$$

$$\therefore BD = \sqrt{2},$$

在  $\text{Rt}\triangle BHD$  中,

$$DH = BH = 1,$$

在  $\text{Rt}\triangle ADC$  中,

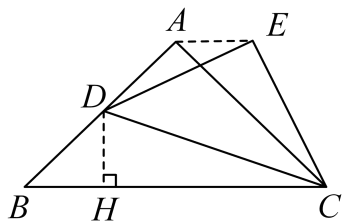
$$DC^2 = AD^2 + AC^2,$$

$$\therefore DC = \sqrt{10},$$

$$\therefore \sin \angle DCB = \frac{DH}{DC} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

【小问 2 详解】

不变,  $\angle EAC = 45^\circ$ , 理由如下:



在  $\text{Rt}\triangle DEC$  中,  $DE = EC$ ,

$$\therefore \angle EDC = \angle ECD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle DCB = \angle ACD + \angle ACE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DCB = \angle ECA,$$

在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $BC = 4$ ,  $AC = 2\sqrt{2}$ ,

在  $\text{Rt}\triangle EDC$  中, 设  $EC = a$ , 则  $DC = \sqrt{2}a$ ,

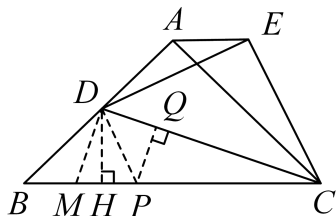
$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{DC}{EC} = \sqrt{2},$$

$$\therefore \triangle BDC \sim \triangle AEC,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle B = 45^\circ.$$

【小问 3 详解】

过点  $D$  作  $DM \parallel QP$ , 交  $BC$  与  $M$ ,  $PQ \perp CD$ ,



$$\therefore DM \parallel QP,$$

$$\therefore \triangle DMC \sim \triangle QPC,$$

$$\therefore \frac{DM}{QP} = \frac{CD}{CQ},$$

由 (2) 知,  $\angle PCQ = \angle GCE$ ,

在  $\triangle PCQ$  和  $\triangle GCE$  中,

$$\begin{cases} \angle PCQ = \angle GCE \\ \angle PQC = \angle GEC, \\ PQ = GE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle PCQ \cong \triangle GCE \text{ (AAS)},$$

$$\therefore EC = CQ,$$

$$\therefore \frac{DM}{QP} = \frac{CD}{EC} = \sqrt{2},$$

$$\therefore \angle CPD = \angle CGD,$$

$$\angle CPD + \angle DPH = \angle CGD + \angle EGC,$$

$$\therefore \angle DPH = \angle EGC = \angle QPC,$$

设  $\angle QCP = \alpha$ ,

$$\text{则 } \angle QPC = 90^\circ - \alpha = \angle DPH,$$

$$\therefore \angle PDH = \alpha,$$

$$\angle DPQ = 2\alpha, \quad \angle QDP = 90^\circ - 2\alpha,$$

$$\therefore DM \parallel QP,$$

$$\therefore \angle MDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MDH = \alpha,$$

在  $\triangle DMH$  和  $\triangle DPH$  中,

$$\begin{cases} \angle MDH = \angle PDH \\ DH = DH \\ \angle DHM = \angle DHP \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DMH \cong \triangle DPH \text{ (ASA)},$$

$$\therefore DM = DP,$$

$$\therefore \frac{DP}{QP} = \sqrt{2},$$

$\therefore \triangle QPD$  是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle QDP = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle GCD = \angle PCD,$$

$\therefore CD$  为  $\angle ACB$  的角平分线,

$$\therefore AD = DH = BH,$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle HDC,$$

$$\therefore CH = 2\sqrt{2}, \quad BH = 4 - 2\sqrt{2}, \quad AD = 4 - 2\sqrt{2},$$

$$\therefore DC = \sqrt{AD^2 + AC^2} = \sqrt{32 - 16\sqrt{2}},$$

$$\therefore DE = \sqrt{16 - 8\sqrt{2}},$$

$$\therefore S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} DE \cdot EC = \frac{1}{2} \left( \sqrt{16 - 8\sqrt{2}} \right)^2 = 8 - 4\sqrt{2}.$$

【点睛】 本题考查了全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，等腰直角三角形的性质，角平分线的性质，勾股定理，熟练掌握全等三角形的判定与性质，利用已知条件，作辅助线，构造全等三角形是解答本题的关键.



电子版资料 小学 初中 高中

名师教学 - 务实课程 - 注重教辅

**淘宝搜索店铺：优尖升教育**

**客服微信：DEM2008**

手机淘宝扫一扫：



扫描二维码逛本店

ONLINE EDUCATION

为您的课程，我们一直在努力

最新资讯请认准“优尖升教育”，淘宝唯一一家，其他都是旧版



淘宝店铺网址：shop492842749.taobao.com