

2022-2023 学年初三数学练习卷

(完卷时间 100 分钟, 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效,
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤、一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 下列函数中, 函数值 y 随自变量 x 的值增大而减小的是 ()

A. $y = \frac{x}{2}$

B. $y = -\frac{x}{2}$

C. $y = \frac{2}{x}$

D. $y = -\frac{2}{x}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据正比例函数的性质及反比例函数性质直接判断即可得到答案;

【详解】解: 由题意可得,

A 选项为正比例函数: $\because k = \frac{1}{2} > 0$, $\therefore y$ 随自变量 x 的值增大而增大, 故 A 选项不符合题意;

B 选项正比例函数: $\because k = -\frac{1}{2} < 0$, $\therefore y$ 随自变量 x 的值增大而减小, 故 B 选项符合题意;

C 选项反比例函数, $x \neq 0$: $\because k = 2 > 0$, $\therefore$ 在 $x > 0$ 与 $x < 0$ 上, y 随自变量 x 的值增大而减小, 但 $x \neq 0$, 故 C 选项不符合题意;

D 选项反比例函数, $x \neq 0$: $k = -2 < 0$, $\therefore$ 在 $x > 0$ 与 $x < 0$ 上, y 随自变量 x 的值增大而增大, 故 D 选项不符合题意;

故选: B.

【点睛】本题考查正比例函数的性质与反比例函数性质, 解题的关键是熟练掌握两种函数的性质.

2. 已知抛物线 $y = x^2 - 3$, 如果点 $A(1, -2)$ 与点 B 关于该抛物线的对称轴对称, 那么点 B 的坐标是 ()

A. $(2, 1)$

B. $(-2, -1)$

C. $(1, 2)$

D. $(-1, -2)$

【答案】D

【解析】

【分析】先根据抛物线解析式求得对称轴为 y 轴, 然后根据关于 y 轴对称的点的纵坐标不变, 横坐标互为相反数即可求解.

【详解】解: $\because$ 抛物线 $y = x^2 - 3$, 对称轴为直线 $x = 0$, 即 y 轴,

∴ 点 $A(1, -2)$ 与点 B 关于该抛物线的对称轴对称, 则点 B 的坐标是 $(-1, -2)$

故选: D.

【点睛】 本题考查了二次函数的性质, 关于坐标轴对称的点的坐标特征, 得出抛物线的对称轴是解题的关键.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, 下列条件不能判定 $DE \parallel BC$ 的是 ()

A. $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$ B. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ C. $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{BD}$ D. $\frac{BD}{AB} = \frac{CE}{AC}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据平行线分线段成比例定理和相似三角形的性质作答即可.

【详解】 假设 $DE \parallel BC$,

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC, \quad \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}, \quad \frac{BD}{AB} = \frac{CE}{AC},$$

故选项 C 错误,

故选: C.

【点睛】 本题考查相似三角形的性质、平行线分线段成比例定理, 找准相似三角形的对应边是解题的关键.

4. 如果 C 是线段 AB 的中点, 那么下列结论中正确的是 ()

A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ B. $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{BC}$ C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ D. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据向量的定义逐个判断即可得到答案;

【详解】 解: $\because C$ 是线段 AB 的中点,

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB} \text{ 故 A、C、D 选项错误, B 选项正确,}$$

故选 B.

【点睛】 本题考查向量相关定义, 解题的关键是分清向量方向.

5. 在直角坐标平面内有一点 $A(3, 1)$, 设 OA 与 x 轴正半轴的夹角为 α , 那么下各式正确的是 ()

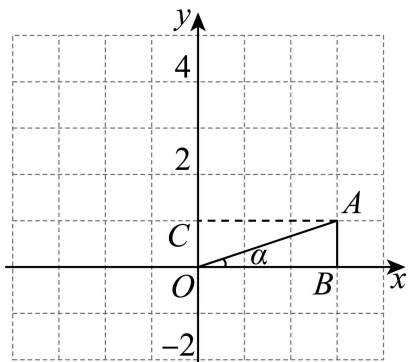
A. $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ B. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ C. $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ D. $\cot \alpha = \frac{1}{3}$

【答案】 C

【解析】

【分析】根据题意画出图形，结合三角函数逐个判断即可得到答案；

【详解】解：由题意得，如图所示，



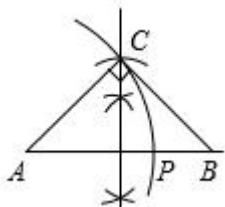
$$\therefore OA = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \quad \cos \alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \quad \tan \alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{1}{3}, \quad \cot \alpha = \frac{OB}{AB} = 3,$$

故选 C.

【点睛】本题考查三角函数及勾股定理，解题的关键是熟练掌握几个三角函数的定义.

6. 如图，以 AB 为斜边作等腰直角三角形 ABC ，再以 A 为圆心， AC 长为半径作弧，交线段 AB 于点 P ，那么 $AP:AB$ 等于 ()



A. $1:\sqrt{2}$

B. $1:\sqrt{3}$

C. $\sqrt{2}:\sqrt{3}$

D. $2:3$

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意可知 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，设 $AC = BC = x$ ，可用含 x 的式子表示 AB 的长，再根据以 A 为圆心， AC 长为半径作弧，可知 AP 的长，由此即可求解.

【详解】解：根据题意得， $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，设 $AC = BC = x$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2}x,$$

$\therefore$ 以 A 为圆心， AC 长为半径作弧，交线段 AB 于点 P ，

$$\therefore AC = AP = x,$$

$$\therefore AP:AB = x:\sqrt{2}x = 1:\sqrt{2},$$

故选：A.

【点睛】本题主要考查作图求线段的比值，理解题意，找出线段之间的大小关系是解题的关键.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. 已知线段 $a=4$ ， $b=16$ ，线段 c 是 a ， b 的比例中项，那么 c 等于_____.

【答案】 8

【解析】

【分析】根据线段比例中项的概念 $a:c=c:b$ ，可得 $c^2=ab=64$ ，即可求出 c 的值.

【详解】解：∵ 线段 c 是 a 、 b 的比例中项，

$$\therefore c^2 = ab = 64,$$

解得： $c = \pm 8$,

又∵ 线段是正数，

$$\therefore c = 8.$$

故答案为：8.

【点睛】此题主要考查线段的比，解题的关键是熟知线段比例中项的概念.

8. 已知 $f(x) = \frac{2}{x-1}$ ，那么 $f(-1)$ 的值是_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】将 $x=-1$ 代入关系式即可求解.

【详解】解：∵ $f(x) = \frac{2}{x-1}$,

$$\therefore \text{当 } x=-1 \text{ 时, } f(-1) = \frac{2}{-1-1} = -1,$$

故答案为：-1.

【点睛】本题考查了求函数值，代入 $x=-1$ 是解题的关键.

9. 一次函数 $y = 3x + 1$ 的图像不经过的象限是_____.

【答案】 第四象限

【解析】

【分析】根据一次函数的性质直接判断即可得到答案:

【详解】解：∵ $k=3>0$ ， $b=1>0$ ，

∴ 一次函数 $y = 3x + 1$ 的图像经过第一、二、三象限，不经过第四象限，

故答案为：第四象限.

【点睛】 本题考查一次函数图像的性质，解题的关键是熟练掌握所过象限与系数的关系.

10. 如果两个等边三角形的边长的比是1:4，那么它们的周长比是_____.

【答案】 1:4

【解析】

【分析】 由两个等边三角形相似，然后根据相似三角形的性质，相似三角形的周长比等于相似比即可求解.

【详解】 解： $\because$ 两个等边三角形相似，两个等边三角形的边长的比是1:4，

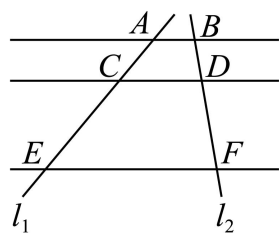
$\therefore$ 它们的周长比是1:4，

故答案为：1:4.

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质，掌握相似三角形的性质是解题的关键.

11. 如图2，已知 $AB \parallel CD \parallel EF$ ，它们依次交直线 l_1 、 l_2 于点 A、C、E 和点 B、D、F. 如果 $AC = 2$ ，

$AE = 6$ ， $DF = 3$ ，那么 $BD =$ _____.



【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 根据平行线分线段成比例定理即可得到结论，

【详解】 解： $\because AB \parallel CD \parallel EF$ ，

$$\therefore \frac{AC}{AE} = \frac{BD}{BF},$$

$$\because AC = 2, AE = 6, DF = 3,$$

$$\therefore \frac{2}{6} = \frac{BD}{BD + 3},$$

$$\text{解得: } BD = \frac{3}{2},$$

故答案为: $\frac{3}{2}$.

【点睛】 本题考查了平行线分线段成比例，找准对应线段是解题的关键.

12. 在 $\triangle ABC$ 中，如果 $AB = AC = 7$ ， $BC = 10$ ，那么 $\cos B$ 的值是_____.

【答案】 $\frac{5}{7}$

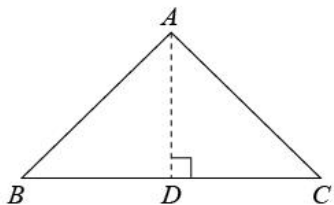
【解析】

【分析】根据题意可知， $\triangle ABC$ 是等腰三角形，可知等腰三角形的三线合一，如图所示，过点 A 作 $AD \perp BC$ 于 D，在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中，根据余弦的计算方法即可求解。

【详解】解： $\because AB = AC = 7$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形，

如图所示，过点 A 作 $AD \perp BC$ 于 D， $BC = 10$ ，



$$\therefore BD = CD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 10 = 5,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ABD \text{ 中, } \cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{5}{7},$$

故答案为： $\frac{5}{7}$ 。

【点睛】本题主要考查等腰三角形，余弦的计算方法，掌握等腰三角形的性质，构造直角三角形，余弦的计算方法是解题的关键。

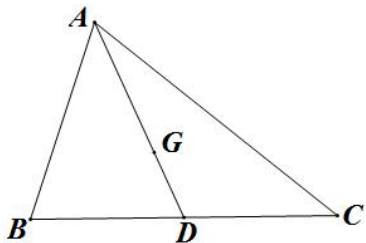
13. 在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 BC 边上的中线， G 是重心。如果 $AD = 6$ ，那么线段 DG 的长是_____。

【答案】2

【解析】

【分析】 G 是重心， AD 是 BC 边上的中线，则点 G 在中线 AD 上，根据重心的性质“重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2:1”即可求解。

【详解】解：根据题意，如图所示，



G 是重心， AD 是 BC 边上的中线，

$\therefore$ 点 G 在中线 AD 上，

$$\text{根据三角形重心的性质得, } \frac{DG}{AG} = \frac{1}{2}, \quad AD = AG + GD = 6,$$

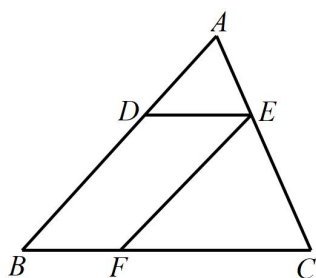
$$\therefore \frac{DG}{AD} = \frac{1}{3}, \text{ 即 } DG = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3} \times 6 = 2.$$

$\therefore$ 线段 DG 的长是 2,

故答案为: 2.

【点睛】 本题主要考查三角形重心的性质, 掌握三角形重心的性质是解题的关键.

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E, F 分别在边 AB, AC, BC 上, $DE \parallel BC, EF \parallel AB$, 如果 $DE : BC = 2 : 5$, 那么 $EF : AB$ 的值是_____.



【答案】 $\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】 根据 $DE \parallel BC$ 得到 $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$, 根据比例的性质可得 $\frac{CE}{AC} = \frac{3}{5}$, 再根据 $EF \parallel AB$, 即可得到答案;

【详解】 解: $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore \frac{CE}{AC} = \frac{3}{5},$$

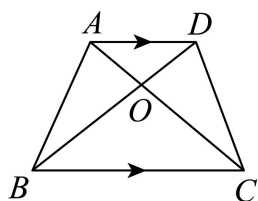
$\because EF \parallel AB$,

$$\therefore \frac{EF}{AB} = \frac{CE}{AC} = \frac{3}{5},$$

故答案为: $\frac{3}{5}$.

【点睛】 本题考查平行线截线段对应成比例, 解题的关键是根据比例性质求得 $\frac{CE}{AC} = \frac{3}{5}$.

15. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, AC 与 BD 相交于点 O , 如果 $BC : AD = 3 : 2$, 那么 $S_{\triangle ADC} : S_{\triangle ABC}$ 的值为_____.

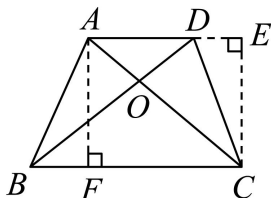


【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 分别过点 C 作 $CE \perp AD$ ，过点 A 作 $AF \perp BC$ ．因为 $AD \parallel BC$ ，所以 $AF = CE$ ，可得到三角形 ABC 和三角形 ADC 的高相等，从而可得到答案．

【详解】 解：如图，过点 C 作 $CE \perp AD$ 于点 E ，过点 A 作 $AF \perp BC$ 于点 F



$$\because BC : AD = 3 : 2$$

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{2}{3}$$

$$\because AD \parallel BC, CE \perp AD, AF \perp BC,$$

$$\therefore AF = CE$$

$$\because S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot CE, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot CF$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD}{BC} = \frac{2}{3}$$

故填： $\frac{2}{3}$ ．

【点睛】 本题考查平行线的性质，熟练掌握平行线的性质：两平行线之间的距离相等，和三角形的面积相结合，将面积的问题转化为线段的问题是解决此题的关键．

16. 已知一斜坡的坡度 $i = 1 : 3$ ，高度为 20 米，那么这一斜坡的坡长约_____米．

【答案】 63

【解析】

【分析】 设斜坡的水平宽度为 x 米，根据坡度的定义可求出 x ，再根据勾股定理求解即可．

【详解】 解：设斜坡的水平宽度为 x ，斜坡的坡度 $i = 1 : 3$ ，高度为 20 米，

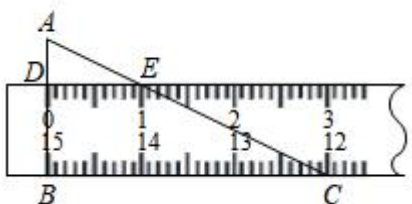
$$\therefore x = 60,$$

$$\therefore \text{这斜坡的坡长为 } \sqrt{20^2 + 60^2} = 20\sqrt{10} \approx 63 \text{ (米)},$$

故答案为： 63．

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用，掌握坡度的概念是解题的关键．

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，直尺的一边与 BC 重合，另一边分别交 AB ， AC 于点 D ， E ．点 B ， C ， D ， E 处的读数分别为 15，12，0，1，则直尺宽 BD 的长为_____．



【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 先求解 $AB = \sqrt{3}$, $AD = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 再利用线段的和差可得答案.

【详解】 解: 由题意可得: $DE = 1$, $DC = 15 - 12 = 3$,

$\because \angle A = 60^\circ, \angle ABC = 90^\circ$,

$$\therefore AB = \frac{BC}{\tan 60^\circ} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

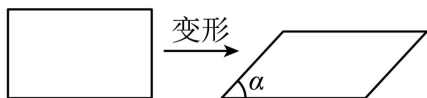
$$\text{同理: } AD = \frac{DE}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore BD = AB - AD = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

故答案为: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【点睛】 本题考查的是锐角的正切的应用, 二次根式的减法运算, 掌握“利用锐角的正切求解三角形的边长”是解本题的关键.

18. 我们知道四边形具有不稳定性, 容易变形 (给定四边形各边的长, 其形状和大小不确定). 如图, 一个矩形发生变形后成为一个平行四边形, 设这个平行四边形中较小的内角为 α , 我们把 $\sin \alpha$ 的值叫做这个平行四边形的“变形系数”. 如果矩形的面积为 5, 其变形后的平行四边形的面积为 4, 那么这个平行四边形的“变形系数”是_____.

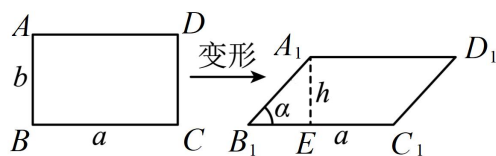


【答案】 $\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】根据题意，如图所示（见详解），设矩形的长为 a ，宽为 b ，过点 A_1 作 $A_1E \perp B_1C_1$ 于 E ，设 $A_1E = h$ ，构造直角三角形，可用含 a 的式子表示斜边，直角边，由此正弦的计算公式即可求解。

【详解】解：如图所示，设矩形的长为 a ，宽为 b ，过点 A_1 作 $A_1E \perp B_1C_1$ 于 E ，设 $A_1E = h$ ，



$$\therefore AB = A_1B_1 = b, \quad BC = B_1C_1 = a,$$

$$\therefore ab = 5, \quad ah = 4, \quad \text{则 } b = \frac{5}{a}, \quad h = \frac{4}{a},$$

$$\text{在 Rt}\triangle A_1B_1E \text{ 中, } B_1E = \sqrt{A_1B_1^2 - A_1E^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{a}\right)^2 - \left(\frac{4}{a}\right)^2} = \frac{3}{a},$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{A_1E}{A_1B_1} = \frac{\frac{4}{a}}{\frac{5}{a}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{a}{5} = \frac{4}{5}, \quad \text{即“变形系数”为 } \frac{4}{5},$$

故答案为： $\frac{4}{5}$ 。

【点睛】本题主要考查矩形，平行四边形，正弦的综合，掌握矩形的性质，平行四边形的性质，正弦的计算方法，构造直角三角形是解题的关键。

三、解答题（本大题共 7 题，满分 78 分）

19. 计算： $4 \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2 \tan 45^\circ - \cot 30^\circ}$ 。

【答案】 $5 + \sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据特殊角的三角函数值，分母有理化，实数的混合运算即可求解。

【详解】解： $4 \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2 \tan 45^\circ - \cot 30^\circ}$

$$= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2 \times 1 - \sqrt{3}}$$

$$= 3 + \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

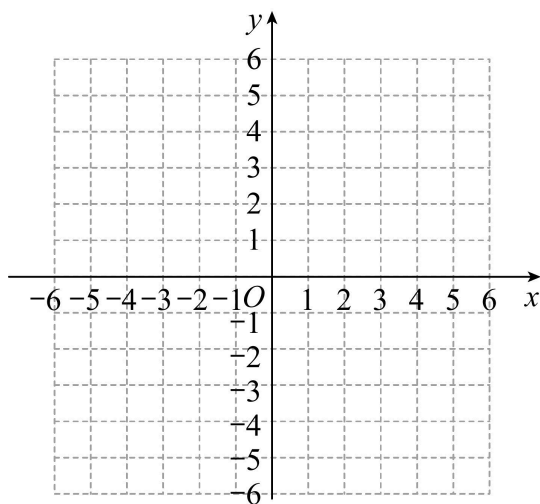
$$= 3 + \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3}$$

$$= 3 + 2 + \sqrt{3}$$

$$= 5 + \sqrt{3}.$$

【点睛】 本题主要考查三角函数的混合运算，掌握特殊角的三角函数值及其混合运算是解题的关键.

20. 已知抛物线 $y = -x^2 + 2x + 3$ ，将这条抛物线向左平移 3 个单位，再向下平移 2 个单位.



(1) 求平移后新抛物线的表达式和它的开口方向、顶点坐标、对称轴，并说明它的变化情况；

(2) 在如图所示的平面直角坐标系内画出平移后的抛物线.

【答案】 (1) 平移后函数关系式为: $y = -(x+2)^2 + 2$

所以其开口向下，顶点坐标为 $(-2, 2)$ ，对称轴为直线 $x = -2$ ，当 $x < -2$ 时， y 随 x 的增大而增大，当 $x > -2$ 时， y 随 x 的增大而减小；

(2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 先将 $y = -x^2 + 2x + 3$ 化为顶点式，再求平移后的函数关系式，再回答问题即可；

(2) 画出平移后的二次函数图像即可；

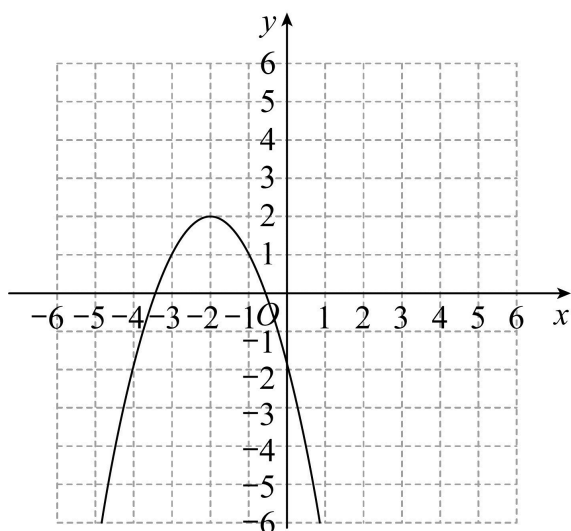
【小问 1 详解】

$$y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4,$$

将这条抛物线向左平移 3 个单位，再向下平移 2 个单位后函数关系式为: $y = -(x+2)^2 + 2$

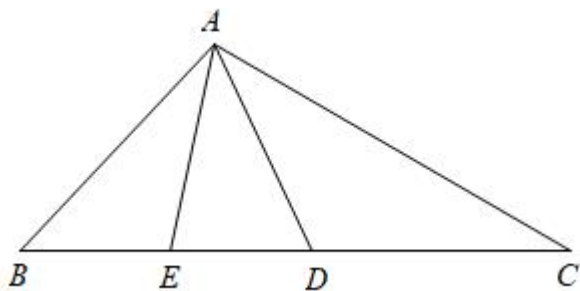
所以其开口向下，顶点坐标为 $(-2, 2)$ ，对称轴为直线 $x = -2$ ，当 $x < -2$ 时， y 随 x 的增大而增大，当 $x > -2$ 时， y 随 x 的增大而减小；

【小问 2 详解】



【点睛】本题结合图象考查了二次函数的平移及性质，关键是掌握函数的开口方向、顶点坐标、对称轴及单调性与最值.

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上， $BD = AB = \frac{1}{2}BC$ ， E 是 BD 的中点.



- (1) 求证： $\angle BAE = \angle C$ ；
- (2) 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ，用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$ 。

【答案】(1) 见解析 (2) $\overrightarrow{AC} = 2\vec{b} - \vec{a}$

【解析】

【分析】(1) 根据题目条件，证明 $\triangle ABC \sim \triangle EBA$ ，即可求证；

(2) 利用平面向量线性运算的三角形法则即可求解.

【小问 1 详解】

$$\because E \text{ 是 } BD \text{ 的中点, } BD = AB = \frac{1}{2}BC$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore \frac{BE}{AB} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2},$$

又 $\angle ABE = \angle CBA$,

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle EBA$,

$\therefore \angle BAE = \angle C$

【小问 2 详解】

$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b},$

$\therefore \overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a},$

$\because BD = \frac{1}{2}BC$

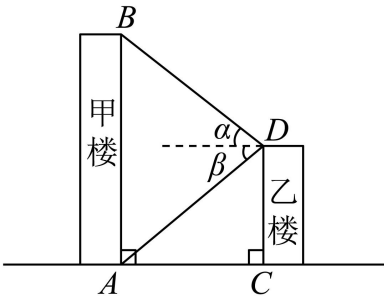
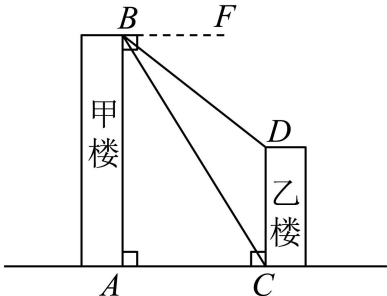
$\therefore \overrightarrow{BC} = 2\vec{b} - 2\vec{a},$

$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{a},$

$\therefore \overrightarrow{AC} = 2\vec{b} - \vec{a}$

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定与性质以及平面向量的线性运算，解题关键是找出相似三角形.

22. 九（1）班同学在学习了“解直角三角形”的知识后，开展了“测量学校教学大楼高度”的活动中，在这个活动中他们设计了以下两种测量的方案：

课 题	测量教学大楼的高度	
方 案	方案一	方案二
测 量 示 意 图		
测 得 数 据	甲楼和乙楼之间的距离 $AC = 20$ 米，乙楼顶端 D 测得甲楼顶端 B 的仰角 $\alpha = 35^\circ$ ，测得甲楼底端 A 的俯角 $\beta = 40^\circ$	甲楼和乙楼之间的距离 $AC = 20$ 米，甲楼顶端 B 测得乙楼顶端 D 的俯角 $\angle FBD = 35^\circ$ ，测得乙楼底端 C 的俯角， $\angle FBC = 57^\circ$

参 考 数 据	$\sin 35^\circ \approx 0.57$, $\sin 40^\circ \approx 0.64$, $\sin 57^\circ \approx 0.84$, $\cos 35^\circ \approx 0.82$, $\cos 40^\circ \approx 0.77$, $\cos 57^\circ \approx 0.54$, $\tan 35^\circ \approx 0.70$, $\tan 40^\circ \approx 0.84$, $\tan 57^\circ \approx 1.53$.
------------------	---

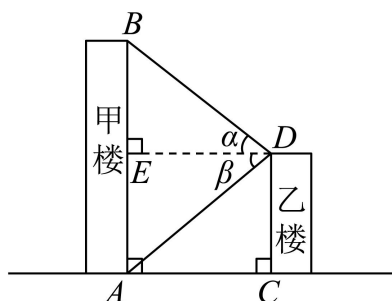
请你选择其中一种方案，求甲楼和乙楼的高度。（结果精确到 1 米）

【答案】见详解.

【解析】

【分析】用方案一，过 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，构建出直角三角形，再求出 $AE = ED \tan 40^\circ$ ， $BE = ED \tan 35^\circ$ ，即可得解.

【详解】过 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，如图所示：



$\because DE \perp AB$, $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle C = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ACDE$ 是矩形,

$\therefore DE = AC = 20$ 米, $DC = AE$,

$\therefore \beta = 40^\circ$,

$\therefore AE = ED \tan 40^\circ \approx 20 \times 0.84 = 16.8$ 米, $DC = AE = 16.8 \approx 17$ 米,

$\therefore \alpha = 35^\circ$,

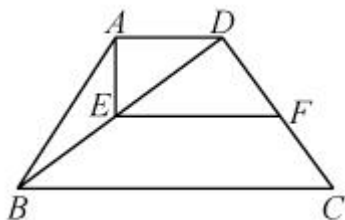
$\therefore BE = ED \tan 35^\circ \approx 20 \times 0.70 = 14.0$ 米,

$\therefore AB = AE + BE = 16.8 + 14.0 \approx 21$ 米.

甲楼和乙楼的高度分别为 17 米和 21 米.

【点睛】考查锐角三角函数的性质运用，准确掌握正切、正弦、余弦的概念并准确运用是解题的关键.

23. 已知：如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，点 E 在对角线 BD 上， $\angle EAD = \angle BDC$.



(1) 求证: $AE \cdot BD = AD \cdot DC$;

(2) 如果点 F 在边 DC 上, 且 $\frac{DF}{DE} = \frac{AE}{AD}$, 求证: $EF \parallel BC$.

【答案】(1) 证明过程见详解

(2) 证明过程见详解

【解析】

【分析】(1) 根据 $AD \parallel BC$, 可得 $\angle ADB = \angle DBC$, $\angle EAD = \angle BDC$, 可证明 $\triangle ADE \sim \triangle DBC$ 即可求解;

(2) 由 (1) 可知 $\triangle ADE \sim \triangle DBC$, 可得 $\frac{AE}{AD} = \frac{DC}{DB}$, 可证 $\triangle DEF \sim \triangle DBC$, 根据相似三角形的性质可知对应角相等, 根据平行线的判定即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC,$$

又 $\because \angle EAD = \angle BDC$,

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle DBC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{DB}{DC},$$

$$\therefore AE \cdot BD = AD \cdot DC.$$

【小问 2 详解】

证明: 由 (1) 可知, $\triangle ADE \sim \triangle DBC$,

$$\therefore \frac{AE}{AD} = \frac{DC}{DB},$$

$$\therefore \frac{DF}{DE} = \frac{AE}{AD},$$

$$\therefore \frac{DC}{DB} = \frac{DF}{DE}, \text{ 且 } \angle BDC = \angle EDC (\text{公共角}),$$

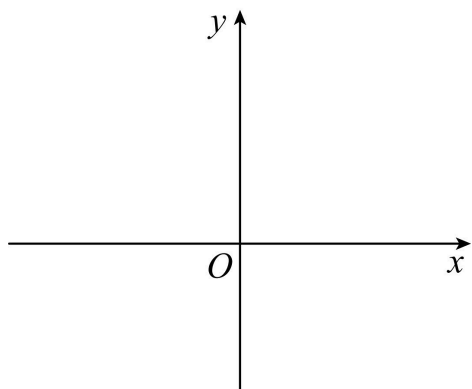
$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle DBC,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle DBC,$$

$$\therefore EF \parallel BC.$$

【点睛】 本题主要考查相似三角形的知识, 理解图示, 掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.

24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 的对称轴为直线 $x = 2$ ，顶点为 A ，与 x 轴分别交于点 B 和点 C （点 B 在点 C 的左边），与 y 轴交于点 D ，其中点 C 的坐标为 $(3,0)$ 。



- (1) 求抛物线的表达式；
- (2) 将抛物线向左或向右平移，将平移后抛物线的顶点记为 E ，联结 DE 。
 - ①如果 $DE \parallel AC$ ，求四边形 $ACDE$ 的面积；
 - ②如果点 E 在直线 DC 上，点 Q 在平移后抛物线的对称轴上，当 $\angle DQE = \angle CDQ$ 时，求点 Q 的坐标。

【答案】 (1) $y = x^2 - 4x + 3$

(2) ①15，② $(4, -1 + 4\sqrt{2})$ 或 $(4, -1 - 4\sqrt{2})$ 。

【解析】

【分析】 (1) 根据对称性求出点 B 坐标 $(1,0)$ ，利用待定系数法求解析式即可；

(2) ①根据 $DE \parallel AC$ ，求出直线 DE 解析式，根据平移性质求出点 E 的坐标，再求四边形面积即可；②根据点 E 在直线 DC 上，求出点 E 的坐标，利用 $\angle DQE = \angle CDQ$ ，得出 $DE = EQ$ ，求出点 Q 的坐标即可。

【小问1详解】

解：抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 的对称轴为直线 $x = 2$ ，与 x 轴分别交于点 B 和点 C （点 B 在点 C 的左边），点 C 的坐标为 $(3,0)$ ，

根据对称性可知点 B 坐标为 $(1,0)$ ，代入 $y = ax^2 + bx + 3$ 得，

$$\begin{cases} 9a + 3b + 3 = 0 \\ a + b + 3 = 0 \end{cases},$$

解得，
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases},$$

抛物线解析式为 $y = x^2 - 4x + 3$.

【小问 2 详解】

①解：抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 的对称轴为直线 $x = 2$,

所以顶点 A 的坐标为 $(2, -1)$, 与 y 轴交于点 D 的坐标为 $(0, 3)$,

设 AC 的解析式为 $y = kx + n$, 把 $A(2, -1)$, $C(3, 0)$ 代入得,

$$\begin{cases} 2k + n = -1 \\ 3k + n = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 1 \\ n = -3 \end{cases},$$

AC 的解析式为 $y = x - 3$,

因为 $DE \parallel AC$, 点 D 的坐标为 $(0, 3)$,

所以 DE 的解析式为 $y = x + 3$,

将抛物线向左或向右平移, 将平移后抛物线的顶点记为 E ,

所以点 E 的纵坐标为 -1 , 代入 $y = x + 3$,

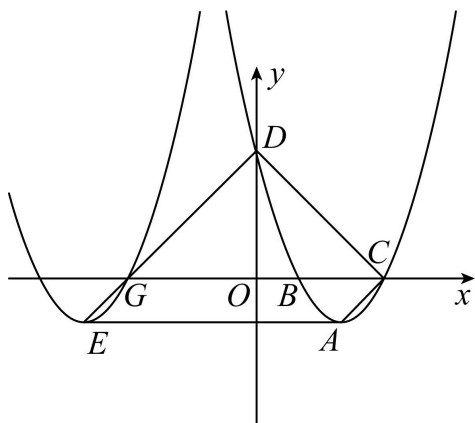
解得, $x = -4$, 点 E 的坐标为 $(-4, -1)$,

设 DE 与 x 轴交于点 G , 则点 G 的坐标为 $(-3, 0)$, 同时 G 也是平移后抛物线与 x 轴的交点,

$$S_{\triangle CDG} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9,$$

$$S_{\triangle CGEA} = 6 \times 1 = 6,$$

四边形 $ACDE$ 的面积为 $S_{\triangle CDG} + S_{\triangle CGEA} = 6 + 9 = 15$;



②设 DC 的解析式为 $y = mx + c$ ，把 $D(0,3)$ ， $C(3,0)$ 代入得，

$$\begin{cases} c = 3 \\ 3m + c = 0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} c = 3 \\ m = -1 \end{cases}$,

DC 的解析式为 $y = -x + 3$,

点 E 的纵坐标为 -1 ，代入 $y = -x + 3$,

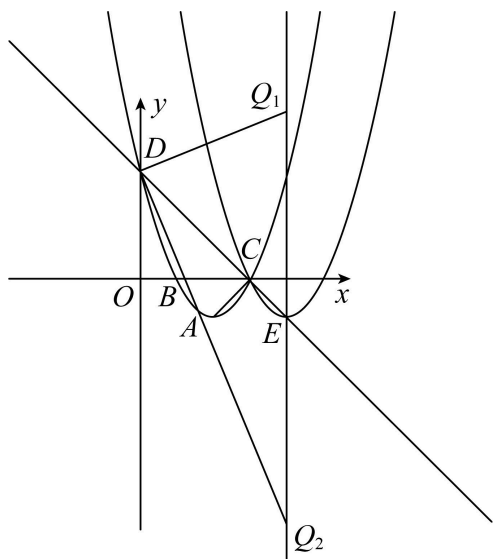
解得， $x = 4$ ，点 E 的坐标为 $(4, -1)$ ，

当 $DE = EQ$ 时， $\angle DQE = \angle CDQ$ ，

因为点 E 的坐标为 $(4, -1)$ ，点 D 的坐标为 $(0, 3)$ ，

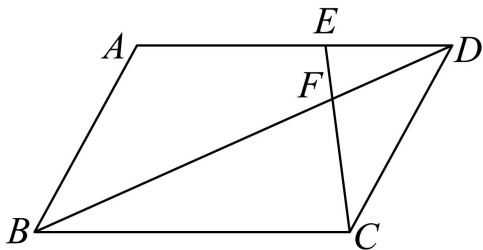
所以 $DE = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ ，

点 Q 在平移后抛物线的对称轴上，点 Q 的坐标为 $(4, -1 + 4\sqrt{2})$ 或 $(4, -1 - 4\sqrt{2})$ 。



【点睛】 本题考查了求二次函数解析式和二次函数平移，解题关键是利用待定系数法求出二次函数解析式，根据平移求出平移后的二次函数的顶点坐标。

25. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 在边 AD 上， CE 对角线 BD 于点 F ， $\angle DCE = \angle ADB$ 。



(1) 求证: $AB \cdot BC = BF \cdot CE$;

(2) 如果 $AD = 3DE = 6$.

①求 CF 的长;

②如果 $BD = 10$, 求 $\cos \angle ABC$ 值.

【答案】(1) 证明见详解

(2) $CF = 3$, $\cos \angle ABC = \frac{13}{20}$

【解析】

【分析】(1) 根据平行四边形 $ABCD$ 可得 $AD \parallel BC$, 即可得到 $\angle CED = \angle ECB$, $\angle ADB = \angle DBC$, 结合 $\angle DCE = \angle ADB$ 可得, $\triangle CED \sim \triangle BCF$, 即可得到答案;

(2) ①根据 $AD \parallel BC$ 可得 $\triangle FED \sim \triangle FCB$, 从而得到 EF 与 CF 的关系, 结合 $\triangle CED \sim \triangle BCF$ 即可得到答案;

②过 D 作 $DG \perp BC$ 交延长线与点 G , 设 $CG = m$, 根据①中三角形相似得到 CD , 在 $\text{Rt}\triangle BDG$ 与 $\text{Rt}\triangle CDG$ 中根据勾股定理列方程求出 m , 即可得到答案

【小问 1 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$, $AB = CD$, $AB \parallel CD$,

$\therefore \angle CED = \angle ECB$, $\angle ADB = \angle DBC$,

$\therefore \angle DCE = \angle ADB$,

$\therefore \angle DCE = \angle DBC$,

$\therefore \triangle CED \sim \triangle BCF$,

$\therefore \frac{ED}{CF} = \frac{CE}{BC} = \frac{CD}{BF}$,

$\therefore AB \cdot BC = BF \cdot CE$;

【小问 2 详解】

解: ① $\because AD \parallel BC$,

$\therefore \triangle FED \sim \triangle FCB$,

$$\therefore \frac{EF}{CF} = \frac{ED}{BC},$$

$$\because AD = 3DE = 6, \quad AD = BC,$$

$$\therefore \frac{EF}{CF} = \frac{DF}{BF} = \frac{1}{3},$$

$$\because \triangle CED \sim \triangle BCF,$$

$$\therefore \frac{ED}{CF} = \frac{CE}{BC} = \frac{CD}{BF},$$

设 $EF = x$, 则 $CF = 3x$, $CE = 4x$,

$$\therefore 12x^2 = 2 \times 6,$$

解得: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ (舍去),

$$\therefore CF = 3x = 3 \times 1 = 3;$$

$$\textcircled{2} \because BD = 10, \quad \frac{EF}{CF} = \frac{DF}{BF} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore DF = \frac{5}{2}, \quad BF = \frac{15}{2},$$

$$\therefore \frac{ED}{CF} = \frac{CE}{BC} = \frac{CD}{BF},$$

$$\therefore CD = 5,$$

过 D 作 $DG \perp BC$ 交延长线与点 G ,

设 $CG = m$, $\text{Rt}\triangle BDG$ 与 $\text{Rt}\triangle CDG$ 中由勾股定理可得,

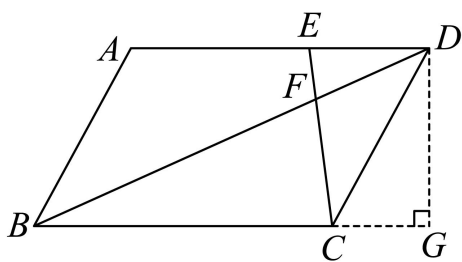
$$10^2 - (6 + m)^2 = 5^2 - m^2,$$

$$\text{解得: } m = \frac{13}{4},$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle DCG,$$

$$\therefore \cos \angle ABC = \cos \angle DCG = \frac{CG}{CD} = \frac{\frac{13}{4}}{5} = \frac{13}{20}.$$



【点睛】 本题考查平行四边形性质，相似三角形性质与判定，三角函数，解题的关键是根据平行四边形得到相似三角形的条件.

