

2022 学年第二学期九年级数学期中线上练习

一、选择

1. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A$ 的余弦是 ()

- A. $\frac{AB}{AC}$ B. $\frac{BC}{AB}$ C. $\frac{AC}{AB}$ D. $\frac{AC}{BC}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据角的余弦可进行求解.

【详解】解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 则 $\cos \angle A = \frac{AC}{AB}$;

故选 C.

【点睛】本题主要考查角的余弦, 熟练掌握求一个角的余弦是解题的关键.

2. 已知非零向量 $\vec{a}$ 和单位向量 $\vec{e}$, 那么下列结论中, 正确的是 ()

- A. $|\vec{a}| = |\vec{e}|\vec{a}$ B. $\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ C. $\vec{a} = |\vec{e}|\vec{a}$ D. $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{e}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据向量的模只有大小, 没有方向, 向量既有长度也有方向对各选项分析判断后利用排除法求解.

【详解】解: A. $\because$ 向量的模只有大小, 没有方向, 则 $|\vec{a}| = |\vec{e}|\vec{a}$ 不成立, 故该选项不正确, 不符合题意;

B. $\because$ 单位向量 $\vec{e}$ 与向量 $\vec{a}$ 方向不一定相同, 则 $\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$, 不一定成立, 故该选项不正确, 不符合题意;

C. $\vec{a} = |\vec{e}|\vec{a}$, 故该选项正确, 符合题意;

D. $\because$ 单位向量 $\vec{e}$ 与向量 $\vec{a}$ 方向不一定相同, 则 $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{e}$, 不一定成立, 故该选项不正确, 不符合题意;

故选 C

【点睛】本题考查了向量的运算, 向量的问题一定要注意从方向与模两方面考虑.

3. 下列二次根式的被开方数中, 各因式指数为 1 的有 ()

- A. $\sqrt{4x^2 + 9y^2}$ B. $\sqrt{5x^2y}$
C. $\sqrt{12(x+y)}$ D. $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据二次根式的性质及因式分解可进行求解.

【详解】解: A、 $\sqrt{4x^2+9y^2}$ 的被开方数的因式指数为 1, 故符合题意;

B、 $\sqrt{5x^2y}$ 的被开方数的因式分别为 5, x^2, y , 其中 x 的指数为 2, 故不符合题意;

C、 $\sqrt{12(x+y)}$ 的被开方数的因式有 3, 4, $(x+y)$, 其中 4 是 2 的平方, 故不符合题意;

D、 $\sqrt{x^2-2xy+y^2}$ 的被开方数的因式为 $(x-y)^2$, 指数是 2, 故不符合题意;

故选 A.

【点睛】本题主要考查二次根式的概念及因式分解, 熟练掌握二次根式的概念及因式分解是解题的关键.

4. 下列说法中, 错误的有 ()

①2 能被 6 整除; ②把 16 开平方得 16 的平方根, 表示为 $\sqrt{16} = \pm 4$;

③把 237145 精确到万位是 240000; ④对于实数 a , 规定 $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】D

【解析】

【分析】根据平方根、近似数及分数指数幂可进行排除选项.

【详解】解: ①2 能被 6 整除, 原说法错误;

②把 16 开平方得 16 的平方根, 表示为 $\pm\sqrt{16} = \pm 4$, 原说法错误;

③把 237145 精确到万位是 2.4×10^5 , 原说法错误;

④对于实数 a , 规定 $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$, 当 m, n 不为正整数时, $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ 不成立, 原说法错误; 所以错误的有 4 个;

故选: D.

【点睛】本题主要考查平方根、近似数及分数指数幂, 熟练掌握平方根、近似数及分数指数幂是解题的关键.

5. 下列关于代数式的说法中, 正确的有 ()

①单项式 -2^{2022} 系数是 2, 次数是 2022 次; ②多项式 $\frac{x^2}{x} + 1$ 是一次二项; ③ $\sqrt{9}$ 是二次根式; ④对于实数 a ,

$\sqrt{a^2} = \pm a$.

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】C

【解析】

【分析】根据单项式的系数，次数，多项式的次数，二次根式的定义，二次根式的性质逐个分析判断即可.

【详解】解：①单项式 -2^{2022} 系数是 -2^{2022} ，次数是 0 次，故①不正确；

②多项式 $\frac{x^2}{x} + 1 = x + 1$ 是一次二项，故②正确；

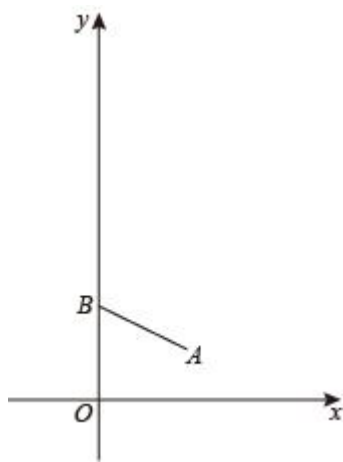
③ $\sqrt{9} = 3$ 是二次根式，故③正确；

④对于实数 a ， $\sqrt{a^2} = |a| = \pm a$ ，故④正确；

故选 C.

【点睛】本题考查了单项式的系数，次数，多项式的次数，二次根式的定义，二次根式的性质，掌握以上知识是解题的关键. 单项式中，所有字母的指数和叫单项式的次数，数字因数叫单项式的系数，单项式中所有字母的指数的和叫做它的次数，通常系数不为 0，多项式的每一项都有次数，其中次数最高的项的次数，就是这个多项式的次数，一个多项式的项数就是合并同类项后用“+”或“-”号之间的多项式个数，次数就是次数和最高的那一项的次数；一个多项式中，次数最高的项的次数，叫做这个多项式的次数；多项式的项数就是多项式中包含的单项式的个数. 形如 $\sqrt{a} (a \geq 0)$ 的代数式是二次根式.

6. 如图，在平面直角坐标系中，已知 $A(2,1)$ ， $B(0,2)$ ，以 A 为顶点，BA 为一边作 45° 角，角的另一边交 y 轴于 C (C 在 B 上方)，则 C 坐标为 ()



A. (0,6)

B. (0,7)

C. $(0, \frac{22}{3})$

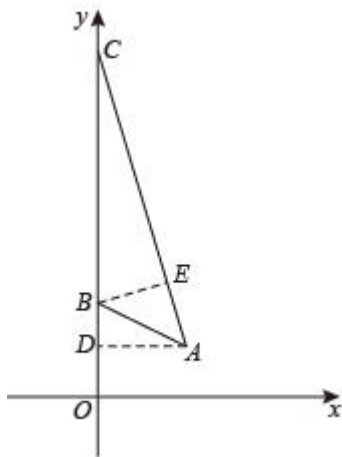
D. $(0, \frac{13}{2})$

【答案】B

【解析】

【分析】过点 A 作 $AD \perp y$ 轴于点 D ，过点 B 作 $BE \perp AC$ 于点 E ，由题意易得 $AD=2$ ， $AB=\sqrt{5}$ ， $BD=1$ ，然后可得 $BE=\frac{\sqrt{10}}{2}$ ， $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ ，设 $BC=x$ ，则 $CD=x+1$ ，进而根据相似三角形及勾股定理可进行求解。

【详解】解：过点 A 作 $AD \perp y$ 轴于点 D ，过点 B 作 $BE \perp AC$ 于点 E ，如图所示：



$$\therefore A(2,1), B(0,2),$$

$$\therefore AD=2, AB=\sqrt{(2-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}, BD=1,$$

$$\therefore \angle BAC=45^\circ,$$

$$\therefore BE=\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot AB=\frac{\sqrt{10}}{2},$$

$$\therefore \angle ADC=\angle BEC=90^\circ, \angle ACD=\angle BCE,$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle BEC,$$

$$\therefore \frac{BE}{AD}=\frac{EC}{DC}=\frac{\sqrt{10}}{4},$$

设 $BC=x$ ，则 $CD=x+1$ ，

$$\therefore EC=\frac{\sqrt{10}}{4}(x+1),$$

$$\text{在 Rt}\triangle BEC \text{ 中，由勾股定理得：}\left[\frac{\sqrt{10}}{4}(x+1)\right]^2+\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2=x^2,$$

解得： $x=5$ （负根舍去），

$$\therefore DC=6,$$

$$\therefore OC=7,$$

∴ 点 $C(0,7)$;

故选 B.

【点睛】 本题主要考查等腰直角三角形的性质、相似三角形的性质与判定及勾股定理; 熟练掌握等腰直角三角形的性质、相似三角形的性质与判定及勾股定理是解题的关键.

二、填空

7. 如果从 π^0 、 $\frac{22}{7}$ 、 -1 、 $9^{\frac{1}{3}}$ 、 $\tan 30^\circ$ 任意选取一个数, 选到的数是无理数的概率为_____.

【答案】 $\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】 先找出无理数的个数, 再利用概率公式计算即可.

【详解】 解: 在 π^0 、 $\frac{22}{7}$ 、 -1 、 $9^{\frac{1}{3}}$ 、 $\tan 30^\circ$ 中, 无理数有 $9^{\frac{1}{3}}$ 和 $\tan 30^\circ$, 共计 2 个,

所以, 选到的数是无理数的概率为 $P = \frac{2}{5}$.

故答案为: $\frac{2}{5}$

【点睛】 本题主要考查了概率公式及无理数的定义, 找出无理数的个数是解题关键.

8. 将抛物线 C 向左平移 2 个单位, 向上平移 1 个单位后, 所得抛物线为 $y = (x-1)^2$, 则抛物线 C 解析式为_____.

【答案】 $y = (x-3)^2 - 1$ 或 $y = x^2 - 6x + 8$

【解析】

【分析】 设抛物线 C 为 $y = (x-k)^2 + h$, 根据平移的规律写出平移后的解析式, 并与已知相等, 即可求解.

【详解】 设抛物线 C 为 $y = (x-k)^2 + h$

将抛物线 C 向左平移 2 个单位, 向上平移 1 个单位后, 可得 $y = (x-k+2)^2 + h+1$

即 $y = (x-k+2)^2 + h+1$ 为 $y = (x-1)^2$

∴ $-k+2 = -1, h+1 = 0$

解得 $k = 3, h = -1$

∴ 抛物线 C 为 $y = (x-3)^2 - 1$

【点睛】 本题考查了二次函数图象的平移, 牢记“左加右减, 上加下减”是解题的关键.

9. 抛物线 $y = (a-1)x^2 - 2x + 3$ 在对称轴左侧, y 随 x 的增大而增大, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a < 1$

【解析】

【分析】 根据题意列出不等式并解答即可.

【详解】 解: $\because$ 抛物线 $y = (a-1)x^2 - 2x + 3$ 在对称轴左侧, y 随 x 的增大而增大,

$\therefore a-1 < 0$,

解得 $a < 1$,

故答案为: $a < 1$.

【点睛】 本题考查了二次函数图象与系数的关系, 解题时, 需要熟悉抛物线的对称性和增减性.

10. 为防治新冠病毒, 某医药公司一月份的产值为 1 亿元, 若每月平均增长率为 x , 第一季度的总产值为 y (亿元), 则 y 关于 x 的函数解析式为_____.

【答案】 $y = x^2 + 3x + 3$

【解析】

【分析】 根据题意分别求得每个月的产值, 然后相加即可求解.

【详解】 解: $\because$ 某医药公司一月份的产值为 1 亿元, 若每月平均增长率为 x ,

$\therefore$ 二月份的为 $(1+x) \times 1 = 1+x$

三月份的为 $(1+x) \times (1+x) = (1+x)^2$

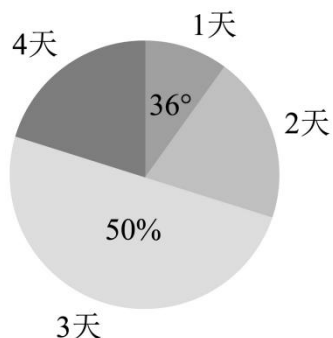
第一季度的总产值为 y (亿元), 则 $y = 1 + 1 + x + (1+x)^2 = x^2 + 3x + 3$

故答案为: $y = x^2 + 3x + 3$

【点睛】 本题考查了二次函数的应用, 根据题意列出函数关系式是解题的关键.

11. 如图, 是实验室里一批种子的发芽天数统计图, 其中“1 天发芽”的圆心角和“3 天发芽”的百分比如图所示, “2 天发芽”与“4 天发芽”的扇形弧长相等. 则这批种子的平均发芽天数为_____.

种子发芽天数扇形图



【答案】 2.8

【解析】

【分析】 先根据题意及圆周角定理，分别得出各种情况所占的百分比，再求天数的加权平均数即可.

【详解】 由图可知，“1 天发芽”的圆心角为 36° ，“3 天发芽”的百分比为 50%

$$\therefore \text{“1 天发芽”的百分比为 } \frac{36^\circ}{360^\circ} \times 100\% = 10\%$$

$$\therefore \text{“2 天发芽”与“4 天发芽”的百分比之和为 } 1 - 50\% - 10\% = 40\%$$

$\therefore$ “2 天发芽”与“4 天发芽”的扇形弧长相等

$\therefore$ 其所对的圆心角相等，所占的百分比也相等

即“2 天发芽”与“4 天发芽”的百分比均为 20%

$$\therefore \text{这批种子的平均发芽天数为 } = 1 \times 10\% + 2 \times 20\% + 3 \times 50\% + 4 \times 20\% = 2.8 \text{ 天}$$

故答案为：2.8.

【点睛】 本题考查了扇形统计图，涉及圆周角定理、加权平均数，熟练掌握知识点是解题的关键.

12. 已知正多边形每个内角的度数为 144° ，则正多边形的边长与半径的比值为_____.

【答案】 $2\sin 18^\circ$

【解析】

【分析】 先根据题意求出正多边形的边数，然后求出此正多边形的中心角，然后再 $Rt\triangle ACO$ 中求出 $\frac{AC}{AO}$ 的值，即可求解.

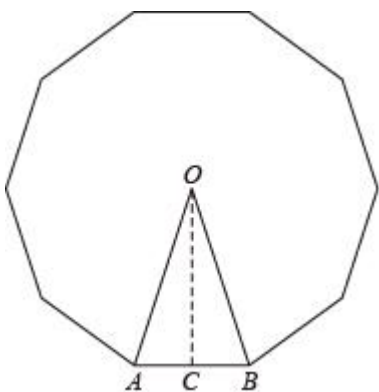
【详解】 解：设这个正多边形的边数为 n ,

$$\therefore (n-2) \times 180^\circ = 144^\circ \times n,$$

$$\therefore n=10,$$

$$\therefore \text{正多边形的中心角为 } \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ,$$

如图，过 O 作 $OC \perp AB$ 于 C ,



$$\because OA=OB,$$

$$\therefore \angle AOC = \frac{1}{2} \angle AOB = 18^\circ, \quad AB=2AC,$$

$$\therefore \sin \angle AOC = \frac{AC}{AO} = \sin 18^\circ,$$

$$\therefore \frac{AB}{AO} = \frac{2AC}{AO} = 2\sin 18^\circ,$$

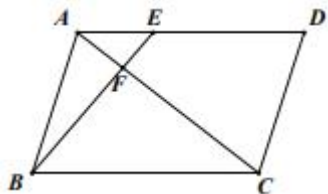
即正多边形的边长与半径的比值为 $2\sin 18^\circ$,

故答案为 $2\sin 18^\circ$.

【点睛】 本题考查了多边形内角和与外角和，中心角的定义，正弦的定义等，求出中心角是解题的关键.

13. 如图, 已知平行四边形 $ABCD$ 中, E 是 AD 上一点, $ED = 2AE$, 联结 BE 交 AC 于 F , 若向量 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$,

向量 $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 则向量 $\overrightarrow{FA} =$ _____.



【答案】 $\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$

【解析】

【分析】 先求出 $\overrightarrow{CA}$, 再根据 $\triangle AEF \sim \triangle CBF$, 得出 $\overrightarrow{FA}$ 与 $\overrightarrow{CA}$ 的关系即可.

【详解】 解: $\because \overrightarrow{BA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{b},$

$$\therefore \overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{b},$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC, \quad AD = BC,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle CBF,$$

$$\therefore \frac{FA}{CF} = \frac{AE}{BC},$$

$$\because ED = 2AE,$$

$$\therefore BC = AD = 3AE,$$

$$\therefore \frac{FA}{CF} = \frac{AE}{BC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{FA}{CA} = \frac{1}{4},$$

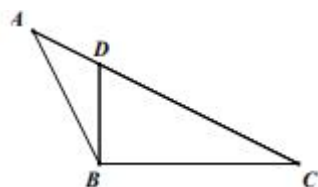
$$\therefore \overrightarrow{FA} = \frac{1}{4} \overrightarrow{CA} = \frac{1}{4} \vec{a} - \frac{1}{4} \vec{b},$$

故答案为: $\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$.

【点睛】 本题考查了向量的计算, 平行四边形的性质, 以及相似三角形的判定与性质, 熟练掌握向量的运算法则是解答本题的关键.

14. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是 AC 上一点, $DB \perp BC$, 若 $\angle ADB = \angle ABC$, $\tan C = \frac{1}{2}$, 则

$$\frac{AC}{AB} = \underline{\hspace{2cm}}.$$



【答案】 2

【解析】

【分析】 由题意易得 $\triangle ADB \sim \triangle ABC$, 进而问题可求解.

【详解】 解: $\because \angle ADB = \angle ABC$, $\angle A = \angle A$,

$$\therefore \triangle ADB \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{DB},$$

$$\because DB \perp BC,$$

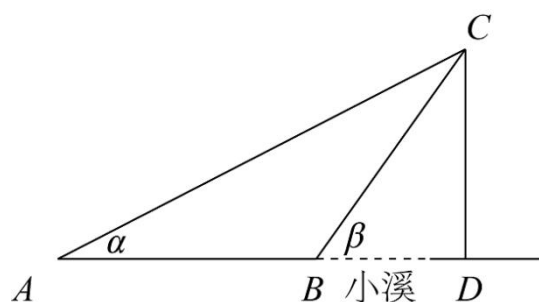
$$\therefore \tan C = \frac{BD}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = 2;$$

故答案为 2.

【点睛】 本题主要考查相似三角形的性质与判定及角的正切, 熟练掌握相似三角形的性质与判定及角的正切是解题的关键.

15. 小明要测量公园里一棵古树的高, 被一条小溪挡住去路, 采用计算方法, 在 A 点测得古树顶的仰角为 α , 向前走了 100 米到 B 点, 测得古树顶的仰角为 β , 则古树的高度为_____米.

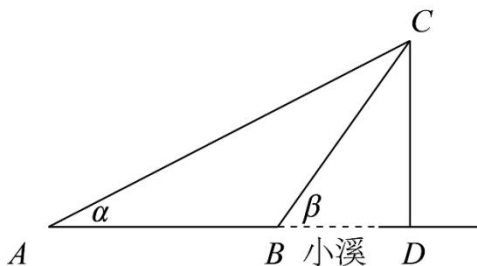


【答案】 $\frac{100 \tan \alpha \tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha}$

【解析】

【分析】由正切的定义分别确定 $\tan \alpha, \tan \beta$ 的表达式，进而联立成方程组，求解方程组即可得到答案.

【详解】解：如图， CD 为树高，点 C 为树顶，则 $\angle CAD = \alpha, \angle CBD = \beta$ ， $BD = AD - 100$



$$\therefore \text{依题意, 有} \begin{cases} \frac{CD}{AD} = \tan \alpha \cdots ① \\ \frac{CD}{AD - 100} = \tan \beta \cdots ② \end{cases}$$

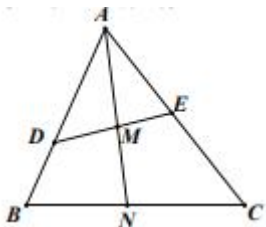
由①得 $AD = \frac{CD}{\tan \alpha} \cdots ③$

将③代入②，解得 $CD = \frac{100 \tan \alpha \tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha}$

故答案为： $\frac{100 \tan \alpha \tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha}$.

【点睛】本题考查正切的定义，二元一次方程组得应用，能依题意根据正切的定义列出方程组是解题的关键.

16. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上， $\angle ADE = \angle C$ ， AN 平分 $\angle BAC$ ，交 DE 于 M ，若 $S_{\text{四边形}BCED} = 2S_{\triangle ADE}$ ，则 $\frac{AM}{AN} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】由题意易得 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ ， $S_{\triangle ACB} = 3S_{\triangle ADE}$ ，进而根据相似三角形的性质可进行求解.

【详解】解：∵ $\angle ADE = \angle C$ ， $\angle DAE = \angle CAB$ ，

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}BCED} = 2S_{\triangle ADE},$$

$$\therefore S_{\triangle ACB} = 3S_{\triangle ADE},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ACB}}{S_{\triangle ADE}} = \left(\frac{AC}{AD}\right)^2 = 3,$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

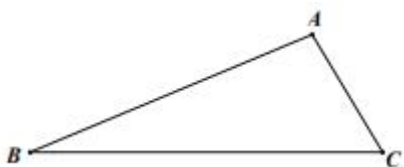
∵ AN 平分 $\angle BAC$ ，

$$\therefore \frac{AM}{AN} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

故答案为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】本题主要考查相似三角形的性质与判定，熟练掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键.

17. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 13$ ， $BC = 15$ ， $\sin B = \frac{5}{13}$ ， D 是边 BC 上一点，将 $\triangle ACD$ 沿直线 AD 翻折，点 C 落在点 E 处，如果 $DE \parallel AB$ ，那么点 E 与点 B 的距离等于_____.



【答案】 $5\sqrt{5}$

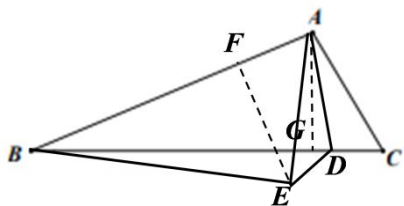
【解析】

【分析】由题意可得如图所示，过点 A 作 $AG \perp BC$ 于点 G ，过点 E 作 $EF \perp AB$ 于点 F ，则有

$AG = 5$ ， $BG = 12$ ， $CG = 3$ ，然后可得 $\angle FAE = \angle AED = \angle C$ ，进而可得 $\triangle AGC \cong \triangle EFA$ ，则有

$EF = AG = 5$ ， $AF = CG = 3$ ，最后问题可求解.

【详解】解：过点 A 作 $AG \perp BC$ 于点 G ，过点 E 作 $EF \perp AB$ 于点 F ，如图，



$$\therefore AB = 13, \sin B = \frac{5}{13},$$

$$\therefore AG = 5,$$

$$\therefore BG = \sqrt{AB^2 - AG^2} = 12,$$

$$\therefore CG = BC - BG = 3,$$

由折叠的性质可得 $AE = AC, \angle C = \angle AED$,

$$\therefore DE \parallel AB,$$

$$\therefore \angle FAE = \angle AED = \angle C,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle CGA = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AGC \cong \triangle EFA \quad (AAS),$$

$$\therefore EF = AG = 5, \quad AF = CG = 3,$$

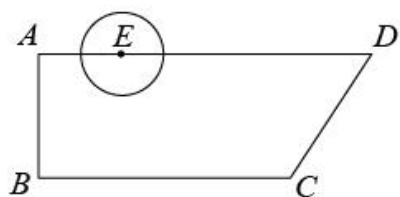
$$\therefore BF = AB - AF = 10,$$

$$\therefore BE = \sqrt{EF^2 + BF^2} = 5\sqrt{5};$$

故答案为 $5\sqrt{5}$.

【点睛】 本题主要考查折叠的性质、勾股定理及解直角三角形，熟练掌握折叠的性质、勾股定理及解直角三角形是解题的关键.

18. 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \perp AB, \angle A = 90^\circ$, E 是 AD 上一定点, $AB = 3, BC = 6, AD = 8, AE = 2$, 点 P 是 BC 上一个动点, 以 P 为圆心, PC 为半径作 $\odot P$, 若 $\odot P$ 与以 E 为圆心, 1 为半径的 $\odot E$ 有公共点, 且 $\odot P$ 与线段 AD 只有一个交点, 则 PC 长度的取值范围是_____.

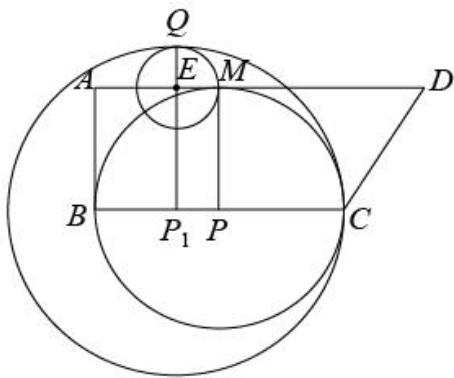


【答案】 $3 \leq PC \leq 4$

【解析】

【分析】 由题意可得当 $\odot P$ 与 AD 相切时, PC 为最小值; 当 $\odot P$ 与 $\odot E$ 内切时, 则 PC 为最大值, 进而问题可求解.

【详解】 解: 如图所示,



当 $\odot P$ 与 AD 相切时,切点为 M ,此时 PC 为最小值,

$$\therefore PM \perp AD, \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore PC = PM = AB = 3;$$

当 $\odot P$ 与 $\odot E$ 内切时,切点为 Q ,此时 PC 为最大值,

$$\therefore P_1C = P_2Q = P_1E + EQ = 4,$$

综上所述: PC 长度的取值范围是 $3 \leq PC \leq 4$;

故答案为 $3 \leq PC \leq 4$.

【点睛】 本题主要考查切线的性质及圆与圆的位置关系,熟练掌握切线的性质及圆与圆的位置关系是解题的关键.

三、解答

19. 先化简代数式 $\frac{x^2+3x}{x^2+6x+9} \div \frac{x^2-2x}{x^2-9}$,然后在下列数值 $\sqrt{2}+4$ 、 3 、 -3 、 2 、 0 中,挑选一个作为 x 的值代入求值.

【答案】 $\frac{x-3}{x-2}$, 当 $x = \sqrt{2}+4$ 时,原分式的值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 先对分式进行化简,然后根据分式有意义的条件选取 x 的值进行代入求解即可.

【详解】 解: 原式 $= \frac{x(x+3)}{(x+3)^2} \div \frac{x(x-2)}{(x+3)(x-3)}$

$$= \frac{x(x+3)}{(x+3)^2} \times \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-2)}$$

$$= \frac{x-3}{x-2};$$

由题意知当 $x=0$ 或 3 或 -3 或 2 时, 分式无意义;

$$\therefore \text{把 } x = \sqrt{2} + 4 \text{ 代入得: } \frac{\sqrt{2} + 4 - 3}{\sqrt{2} + 4 - 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【点睛】 本题主要考查分式的化简求值及二次根式的运算, 熟练掌握分式的化简求值及二次根式的运算是解题的关键.

$$20. \text{ 解不等式组: } \begin{cases} 2x-1 < \sqrt{5}x \\ \frac{x}{5} + \frac{x-1}{3} \leq 2 \end{cases} \text{ 并写出它的自然数解.}$$

【答案】 $-\sqrt{5}-2 < x \leq \frac{35}{8}$, 自然数解为 0, 1, 2, 3, 4

【解析】

【分析】 分别求出每一个不等式的解集, 根据口诀: 同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到确定不等式组的解集.

【详解】 解: $\begin{cases} 2x-1 < \sqrt{5}x \text{ ①} \\ \frac{x}{5} + \frac{x-1}{3} \leq 2 \text{ ②} \end{cases}$

由①得 $(\sqrt{5}-2)x > -1$

$$x > -\frac{1}{\sqrt{5}-2}$$

$$\therefore x > -\sqrt{5}-2$$

由②得 $x \leq \frac{35}{8}$

$$\therefore -\sqrt{5}-2 < x \leq \frac{35}{8}$$

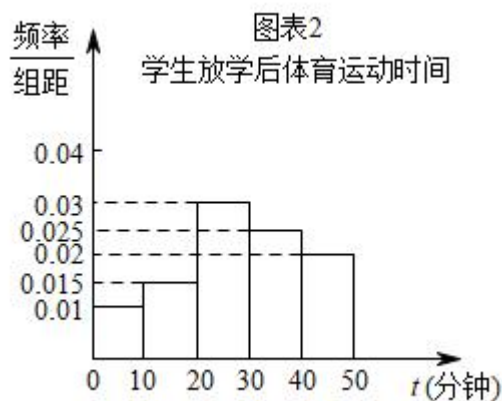
它的自然数解为 0、1、2、3、4

【点睛】 本题考查了解一元一次不等式组, 求非负整数解, 分母有理化, 正确掌握一元一次不等式解集确定方法是解题的关键.

21. 为了解某区 3200 名学生放学后在校体育运动的情况, 调研组选择了有 600 名学生的 W 校, 抽取 40 名学生进行调查, 调查情况具体如下表:

图表 1: 感兴趣的运动项目

项目	乒乓球	篮球	足球	羽毛球	健美操
人数	4	16	10	4	6



- (1) 此次调查的总体是_____，样本容量是_____.
- (2) 若从 9 年级某学习加强班进行抽样调查，则这样的调查_____ (“合适”，“不合适”)，原因是样本不是_____样本；
- (3) 根据图表 1，估计该校对篮球感兴趣的学生的总人数为_____；
- (4) 根据图表 2，若从左至右依次是第一、二、三、四、五组，则中位数落在第___组.
- (5) 若要从对篮球感兴趣的同学中选拔出一支篮球队来，现在有以下两名学生的投篮数据，记录的是每 10 次投篮命中的个数.
甲同学：10、5、7、9、4；乙同学：7、8、7、6、7. 若想要选择更稳定的同学，你会选择计算这两组数据的_____, 因为这个量可以代表数据的_____. 请计算出你所填写的统计量，并且根据计算的结果，选择合适的队员.

【答案】 (1) 某区 3200 名学生放学后在校体育运动的情况，40

(2) 不合适；随机抽样

(3) 240 (4) 三

(5) 方差；离散程度；选择乙

【解析】

【分析】 (1) 根据总体及样本容量的相关概念可直接进行求解；

(2) 由题意可直接求解；

(3) 由图表 1 及题意可直接进行求解；

(4) 由题意知一共抽取 40 名学生进行调查，则将数据从小到大排列，第 20，21 和的平均数即为中位数，进而根据图表 2 可求解；

(5) 根据题意可求出方差，然后问题可求解.

【小问 1 详解】

解：总体是指要调查对象的全体，所以此次调查的总体是某区 3200 名学生放学后在校体育运动的情况，样

本容量是样本中个体的数量，所以样本容量是 40；

故答案为某区 3200 名学生放学后在校体育运动的情况，40；

【小问 2 详解】

解：9 年级某学习加强班不具有代表性，样本抽取选择要有代表性，所以这样的调查不合适，样本不是随机抽样样本；

故答案为：不合适；随机抽样；

【小问 3 详解】

解：由题意得： $600 \times \frac{16}{40} = 240$ （名）；

故答案为 240；

【小问 4 详解】

解：由题意知一共抽取 40 名学生进行调查，则将数据从小到大排列，第 20，21 和的平均数即为中位数，

$$\therefore 40 \times (0.01 + 0.015) \times 10 = 10, 40 \times (0.01 + 0.015 + 0.03) \times 10 = 22,$$

所以中位数落在第三组；

故答案为三；

【小问 5 详解】

解：选择最稳定的同学，应该计算两位同学的方差，方差代表数据的离散程度；

$$\therefore \text{甲的平均数: } \frac{10+5+7+9+4}{5} = 7; \text{ 乙的平均数: } \frac{7+8+7+6+7}{5} = 7,$$

$$\text{甲的方差: } S^2 = \frac{(10-7)^2 + (5-7)^2 + (7-7)^2 + (9-7)^2 + (4-7)^2}{5} = \frac{26}{5};$$

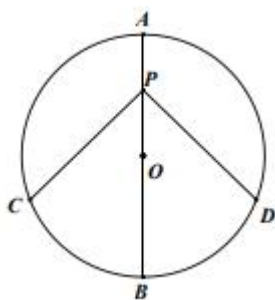
$$\text{乙的方差: } S^2 = \frac{(7-7)^2 + (8-7)^2 + (7-7)^2 + (6-7)^2 + (7-7)^2}{5} = \frac{2}{5};$$

因为 $\frac{26}{5} > \frac{2}{5}$ ，所以从稳定性考虑，应选择乙同学；

故答案为方差；离散程度；选择乙。

【点睛】本题主要考查平均数、众数、中位数、方差及频数直方图；熟练掌握平均数、众数、中位数、方差及频数直方图是解题的关键。

22. 如图，已知 AB 是 $\odot O$ 的直径， P 是 AO 上一点，点 C 、 D 在直径两侧的圆周上，若 PB 平分 $\angle CPD$ ，求证：劣弧 BC 与劣弧 BD 相等。

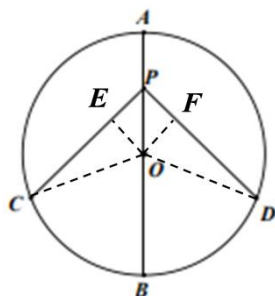


【答案】见详解

【解析】

【分析】过点 O 分别作 $OE \perp PC$, $OF \perp PD$, 垂足分别为 E 、 F , 连接 OC 、 OD , 由题意易得 $OE=OF$, 然后可得 $\angle BOC = \angle BOD$, 进而问题可求证.

【详解】证明: 过点 O 分别作 $OE \perp PC$, $OF \perp PD$, 垂足分别为 E 、 F , 连接 OC 、 OD , 如图所示:



$\because PB$ 平分 $\angle CPD$,

$\therefore OE=OF$,

$\because OC=OD$,

$\therefore \triangle EOC \cong \triangle FOD$ (HL),

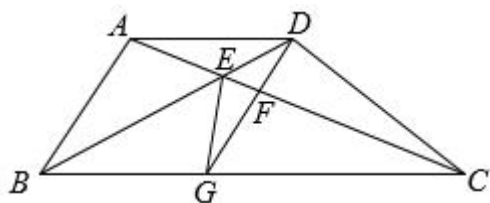
$\therefore \angle C = \angle D$,

$\therefore \angle BOC = \angle BOD$,

$\therefore \widehat{BC} = \widehat{BD}$.

【点睛】本题主要考查圆的基本性质, 熟练掌握圆心角、弧、弦之间的联系是解题的关键.

23. 如图, 已知在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 对角线 AC 、 BD 交于 E , BD 平分 $\angle ABC$, 点 G 在底边 BC 上, 连结 DG 交对角线 AC 于 F , $\angle DGB = \angle DAB$.



(1) 求证：四边形 $ABGD$ 是菱形；

(2) 连结 EG ，求证： $BG \cdot EG = BC \cdot EF$.

【答案】(1) 见详解 (2) 见详解

【解析】

【分析】(1) 由平行线的性质可得 $\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$ ，然后可得 $\angle DGB + \angle ABC = 180^\circ$ ，则有 $AB \parallel GD$ ，由角平分线及平行线的性质可得 $AB = AD$ ，进而问题可求证；

(2) 由 (1) 可知 $AD = BG, \angle ADE = \angle GDE, AB \parallel GD$ ，然后可得 $AE = GE$ ，进而可得 $\triangle ADE \sim \triangle CBE, \triangle ABE \sim \triangle FDE$ ，最后根据相似三角形的性质可求证.

【小问 1 详解】

证明： $\because AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle BAD + \angle ABC = 180^\circ, \quad \angle DBC = \angle ADB,$$

$$\because \angle DGB = \angle DAB,$$

$$\therefore \angle DGB + \angle ABC = 180^\circ,$$

$$\therefore AB \parallel GD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABGD$ 是平行四边形，

$$\because BD \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB,$$

$$\therefore AB = AD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABGD$ 是菱形；

【小问 2 详解】

证明：由 (1) 可知 $AD = BG, \angle ADE = \angle GDE, AB \parallel GD$ ，

$$\because DE = DE,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle GDE,$$

$$\therefore AE = GE,$$

$$\because AD \parallel BC, \quad AB \parallel GD,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle CBE, \triangle ABE \sim \triangle FDE,$$

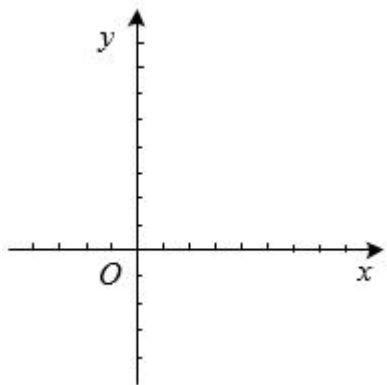
$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{DE}{BE}, \frac{DE}{BE} = \frac{EF}{AE},$$

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{EF}{AE}, \text{ 即 } AD \cdot AE = BC \cdot EF,$$

$$\therefore BG \cdot EG = BC \cdot EF.$$

【点睛】本题主要考查菱形的性质与判定、角平分线的定义、平行线的性质及相似三角形的性质与判定，熟练掌握菱形的性质与判定、角平分线的定义、平行线的性质及相似三角形的性质与判定是解题的关键.

24. 已知直线 $y = kx + b$ 经过点 $A(-2, 0)$, $B(1, 3)$ 两点, 抛物线 $y = ax^2 - 4ax + b$ 与已知直线交于 C 、 D 两点 (点 C 在点 D 的右侧), 顶点为 P .



(1) 求直线 $y = kx + b$ 的表达式;

(2) 若抛物线的顶点不在第一象限, 求 a 的取值范围;

(3) 若直线 DP 与直线 AB 所成夹角的余切值等于 3, 求抛物线 $y = ax^2 - 4ax + b$ 的表达式.

【答案】(1) $y = x + 2$

$$(2) a \geq \frac{1}{2}$$

$$(3) y = -x^2 + 4x + 2$$

【解析】

【分析】(1) 由待定系数法直接代入点坐标求解即可得到答案.

(2) 由抛物线顶点式求得顶点坐标, 进而依题意“顶点不在第一象限”列出不等式, 进而可得到答案.

(3) 由直线及抛物线的表达式, 求出交点坐标, 确定点 D 坐标, 进而作 PH 垂直 AB 于点 H , 设出点 H 坐标, 依题意有 $\frac{HD}{HP} = 3$, $PH \perp AB$ 即有 $k_{PH} \times k_{AB} = -1$, 联立等式成方程组, 进而求解可得到答案.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 直线 $y = kx + b$ 经过点 A 、 B ,

$$\therefore \text{有} \begin{cases} -2k + b = 0 \\ k + b = 3 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线的表达式为 $y = x + 2$

【小问2 详解】

解: $\because b=2$

$$\therefore y = ax^2 - 4ax + b = a(x-2)^2 + 2 - 4a$$

$\therefore$ 顶点坐标为 $(2, 2-4a)$

$\therefore$ 顶点不在第一象限

$$\therefore 2-4a \leq 0$$

$$\therefore a \geq \frac{1}{2}$$

【小问3 详解】

$$\text{解: 依题意有 } \begin{cases} y = x+2 \\ y = ax^2 - 4ax + 2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 4 + \frac{1}{a} \\ y = 6 + \frac{1}{a} \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线与已知直线交于 $(0, 2)$ 、 $\left(4 + \frac{1}{a}, 6 + \frac{1}{a}\right)$ 两点

$\therefore$ 顶点 P 坐标为 $(2, 2-4a)$ 且点 C 在点 D 的右侧

$\therefore$ 点 $C\left(4 + \frac{1}{a}, 6 + \frac{1}{a}\right)$, 点 $D(0, 2)$

过点 P 作 PH 垂直 AB 于点 H , 设点 H 坐标为 $(m, m+2)$

$$\therefore HP = \sqrt{(m+4a)^2 + (m-2)^2}, \quad HD = \sqrt{2m^2}$$

$$\therefore \text{直线 } DP \text{ 与直线 } AB \text{ 所成夹角的余切 } \cot \angle HDP = \frac{HD}{HP} = \frac{\sqrt{2m^2}}{\sqrt{(m+4a)^2 + (m-2)^2}} = 3 \dots \textcircled{1}$$

设直线 PH 的表达式为 $y = k_{PH}x + c$, 直线 PH 过点 P, H ,

$$\therefore \text{有 } \begin{cases} 2k_{PH} + c = 2 - 4a \\ mk_{PH} + c = m + 2 \end{cases} \text{ 解得 } k_{PH} = \frac{m+4a}{m-2}$$

$\therefore PH \perp AB$

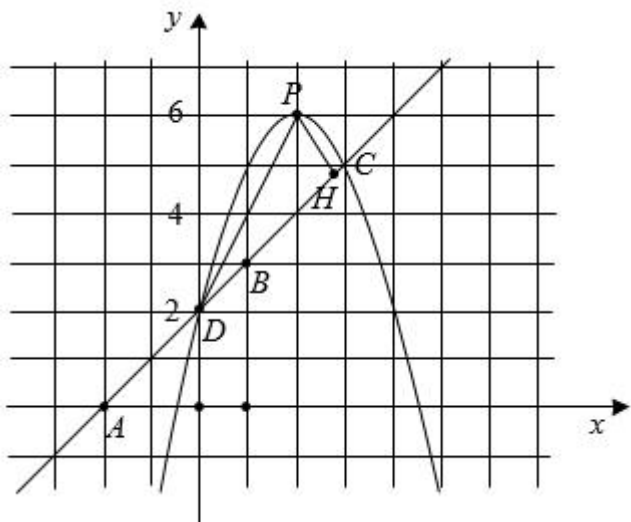
$$\therefore k_{PH} \times k = -1 \text{ 即 } \frac{m+4a}{m-2} = -1 \dots \textcircled{2}$$

$$\text{联立 } \textcircled{1}\textcircled{2}, \text{ 解得 } \begin{cases} m = 3 \\ a = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ a = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$\therefore$ 当 $a = -\frac{1}{4}$ 时, 点 C 坐标为 $(0, 2)$ 与点 D 重合, 不符合题意

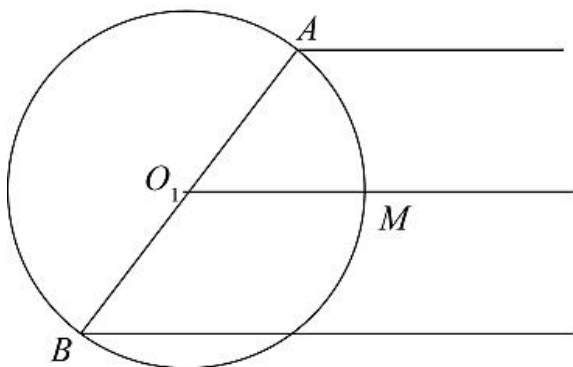
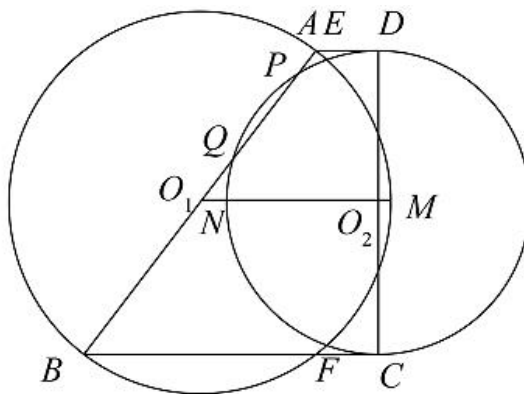
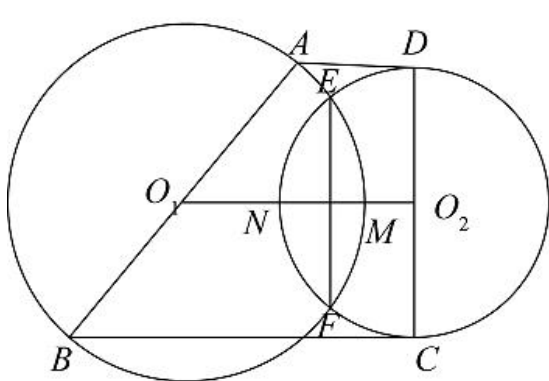
$$\therefore a = -1$$

∴ 抛物线的表达式为 $y = -x^2 + 4x + 2$.



【点睛】本题为二次函数的综合题，考查二次函数的性质、待定系数法求一次函数的解析式、余切的概念定义、解二元一次方程组等知识；熟练掌握相关知识，构造直角三角形建立方程组求解是解题的关键。

25. 梯形 $ABCD$ 中， $AD, DC \perp BC$ 于点 C ， $AB = 10$ ， $\tan B = \frac{4}{3}$ ， $\odot O_1$ 以 AB 为直径， $\odot O_2$ 以 CD 为直径，直线 O_1O_2 与 $\odot O_1$ 交于点 M ，与 $\odot O_2$ 交于点 N （如图），设 $AD = x$ 。



(1) 记两圆交点为 E, F (E 在上方)，当 $EF = 6$ 时，求 x 的值；

(2) 当 $\odot O_2$ 与线段 AO_1 交于 P 、 Q 时, 设 $PQ = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出定义域;

(3) 连接 AM , 线段 AM 与 $\odot O_2$ 交于点 G , 分别连接 NG 、 O_2G , 若 $\triangle GMN$ 与 $\triangle GNO_2$ 相似, 求 x 的值.

【答案】(1) $1+\sqrt{7}$

$$(2) y^2 = -\frac{64}{25}(x+3)^2 + 64 \quad (1 \leq x < 2)$$

$$(3) 6 - \frac{8}{5}\sqrt{5}$$

【解析】

【分析】(1) 过点 A 作 $AG \perp BC$, 连接 O_1E , O_2E , 由题意得 O_1O_2 垂直平分 EF , $O_1O_2 \parallel BC$, 通过解直角三角形可得 $AG=8$, $BG=6$, 再由 $AD \parallel BC$, $O_1O_2 \parallel BC$, $DC \perp BC$, $AG \perp BC$ 得四边形 $ADCG$ 和四边形 ADO_2I 是矩形, 根据勾股定理求出 O_1N 和 O_2H , 进而求 AD ;

(2) 过点 O_2 作 $O_2G \perp PQ$ 于点 G , 勾股定理求 $O_2G = \sqrt{PM^2 - PG^2}$, 再由正切求得 y 关于 x 的函数关系式;

(3) 由 $\triangle GMN \sim \triangle GNO_2$, 得 $\frac{MN}{NO_2} = \frac{GN}{GO_2}$, 由 $NO_2 = GO_2$, 得 $MN = GN$, 过点 A 作 $AH \perp MN$, 利用正切和勾股定理求出 $AM = 2\sqrt{5}$, 再由相似的性质和判定求出 $AM = \frac{5}{4}(6-x)$, 进而得 x .

【小问 1 详解】

解: 过点 A 作 $AG \perp BC$, 连接 O_1E , O_2E

由题意得 O_1O_2 垂直平分 EF , $O_1O_2 \parallel BC$

又 $AD \parallel BC$

$$\therefore O_1O_2 \parallel BC \parallel AD, \angle EHO_2 = \angle EHO_1 = 90^\circ, EH = \frac{1}{2}EF = 3$$

又 $AG \perp BC$, $DC \perp BC$

$$\therefore \angle AGC = \angle AGB = 90^\circ, \angle DCG = 90^\circ$$

$$\therefore O_1O_2 \parallel BC \parallel AD$$

$$\therefore \angle AIO_2 = \angle AIO_1 = 90^\circ, \angle DO_2I = \angle O_1O_2C = \angle ADO_2 = 90^\circ$$

$\therefore$ 四边形 $ADCG$ 和四边形 ADO_2I 是矩形

$$\therefore DC = AG, DA = CG = IO_2, DO_2 = AI$$

$\therefore O_2$ 是 DC 的中点

$\therefore I$ 是 AG 的中点

$\therefore O_1$ 是 AB 的中点

$\therefore O_1I$ 是 $\triangle ABG$ 的中位线

$$\therefore O_1I = \frac{1}{2} BG$$

$$\therefore AB = 10, \quad \tan B = \frac{4}{3}$$

$$\therefore AG=8, \quad BG=6$$

$$\therefore O_1I = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

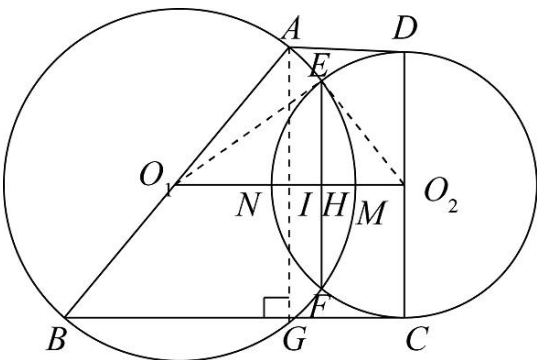
在 $\text{Rt}\triangle O_1HE$ 和 $\text{Rt}\triangle O_2HE$ 中

$$O_1H = \sqrt{O_1E^2 - EH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$O_2H = \sqrt{O_2E^2 - EH^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

$$\therefore O_1 O_2 = O_1 H + O_2 H = 4 + \sqrt{7}$$

$$\therefore AD=IO_2= O_1 O_2- O_1I==4+\sqrt{7} -3=1+\sqrt{7}$$



【小问 2 详解】

解: 由 (1) 可知, $O_1 O_2 = AD + O_1 I = x + 3$

过点 O_2 作 $O_2G \perp PQ$ 于点 G

$$\therefore PG = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}y$$

在 $\text{Rt}\triangle O_2PG$ 中

$$O_2G = \sqrt{PM^2 - PG^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{1}{2}y\right)^2} = \sqrt{16 - \frac{1}{4}y^2}$$

$$\therefore O_1O_2 \parallel BC \parallel AD$$

$$\therefore \angle O_2O_1G = \angle B$$

$$\text{又 } \tan B = \frac{4}{3}$$

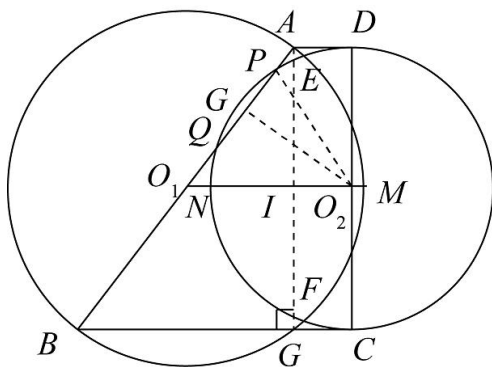
$$\therefore \tan \angle O_2 O_1 G = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \sin \angle O_2 O_1 G = \frac{4}{5}$$

$$\text{又 } O_1 O_2 = x + 3$$

$$\therefore \frac{\sqrt{16 - \frac{1}{4} y^2}}{x + 3} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore y^2 = -\frac{64}{25} (x + 3)^2 + 64 \quad (1 \leq x < 2)$$



【小问 3 详解】

$$\text{解: } \because MN = O_2 N + O_1 M - O_1 O_2$$

$$\therefore MN = 4 + 5 - (3 + x) = 6 - x$$

由 $\triangle GMN \sim \triangle GNO_2$, 得

$$\frac{MN}{NO_2} = \frac{GN}{GO_2}$$

由 $NO_2 = GO_2$, 得 $MN = GN = 6 - x$

$$\therefore \angle GMN = \angle MGN$$

$$\text{又 } O_1 A = O_1 M$$

$$\therefore \angle GMN = \angle O_1 A M$$

$$\therefore \angle O_1 A M = \angle MGN$$

$$\therefore \angle A M O_1 \text{ 为公共角}$$

$$\therefore \triangle A M O_1 \sim \triangle G M N$$

$$\therefore \triangle A M O_1 \sim \triangle G N O_2$$

$$\therefore \frac{O_1 A}{O_2 G} = \frac{A M}{G N}$$

$$\therefore AM = \frac{5}{4} (6-x)$$

$$\because O_1O_2 \parallel BC \parallel AD$$

$$\therefore \angle AO_1O_2 = \angle B$$

$$\text{又 } \tan B = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \tan \angle AO_1O_2 = \tan B = \frac{4}{3}$$

过点 A 作 $AH \perp MN$

$$\text{又 } O_1A = 5$$

$$\therefore O_1H = 3, \quad AH = 4$$

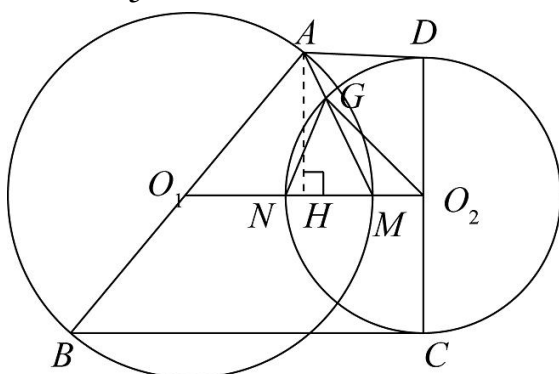
$$\therefore HM = O_1M - O_1H = 5 - 3 = 2$$

在 $\text{Rt}\triangle AHM$ 中

$$AM = \sqrt{AH^2 + HM^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore \frac{5}{4} (6-x) = 2\sqrt{5}$$

$$\text{解得 } x = 6 - \frac{8}{5}\sqrt{5}$$



【点睛】 本题是圆的综合，考查了相似三角形的判定和性质，矩形的判定和性质，锐角三角函数求值，中位线的性质以及勾股定理等知识点，属于中考中的压轴题．

免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>)
致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群
出品的《老师请开讲》私享直播课等
增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>)
是学科网旗下智能题库，拥有小初高全
学科超千万精品试题，提供智能组卷、
拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能