

初三数学期末测试卷

(时间 100 分钟)

一、选择题：(本大题共 6 题)

1. 下列图形，一定相似的是 ()

- A. 两个直角三角形 B. 两个等腰三角形 C. 两个等边三角形 D. 两个菱形

【答案】C

【解析】

【分析】根据相似图形的定义，结合图形，对选项一一分析，利用排除法求解.

【详解】解：A.两个直角三角形，不一定有锐角相等，故不一定相似；

B.两个等腰三角形顶角不一定相等，故不一定相似；

C.两个等边三角形，角都是 60° ，故相似；

D..任意两个菱形的对应边的比相等，但对应角不一定相等，故不一定相似；

故选 C.

【点睛】 本题考查的是相似图形的概念，掌握对应角相等，对应边的比相等的多边形，叫做相似多边形是解题的关键.

2. 已知抛物线 $y = 2(x-1)^2 + 3$ ，那么它的顶点坐标是 ()

- A. $(-1,3)$ B. $(1,3)$ C. $(2,1)$ D. $(2,3)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次函数的顶点式的特点即可得出答案.

【详解】解：由抛物线的顶点式 $y = 2(x-1)^2 + 3$ 可得：

该抛物线的顶点坐标为 $(1,3)$ ，

故选：B .

【点睛】 本题主要考查抛物线的顶点式，关键是要牢记抛物线的顶点式的特点.

3. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ，如果 $\angle A = \alpha$ ， $BC = a$ ，那么 AC 的长是 ()

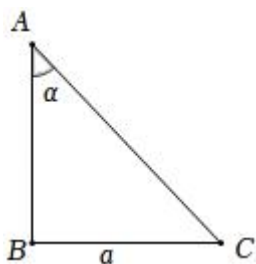
- A. $a \cdot \tan \alpha$ B. $a \cdot \cot \alpha$ C. $\frac{a}{\cos \alpha}$ D. $\frac{a}{\sin \alpha}$

【答案】D

【解析】

【分析】画出图形，根据锐角三角函数的定义求出即可.

【详解】如图：



在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $AC = \frac{BC}{\sin A} = \frac{a}{\sin \alpha}$.

故选: D.

【点睛】本题考查解直角三角形, 解题的关键是熟练掌握直角三角形边角之间的关系.

4. 小杰在一个高为 h 的建筑物顶端, 测得一根高出此建筑物的旗杆顶端的仰角为 30° , 旗杆与地面接触点的俯角为 60° , 那么该旗杆的高度是 ()

A. $\frac{2}{3}h$

B. $\frac{4}{5}h$

C. $\frac{4}{3}h$

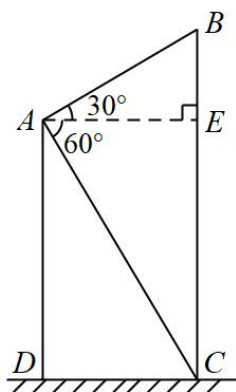
D. $\frac{5}{4}h$

【答案】C

【解析】

【分析】过 A 作 $AE \perp BC$ 于 E , 在 $\text{Rt} \triangle ACE$ 中, 已知了 CE 的长, 可利用俯角 $\angle CAE$ 的正切函数求出 AE 的值; 进而在 $\text{Rt} \triangle ABE$ 中, 利用仰角 $\angle BAE$ 的正切函数求出 BE 的长; 从而可得答案.

【详解】解: 如图, 过 A 作 $AE \perp BC$ 于 E , 则四边形 $ADCE$ 是矩形, $CE = AD = h$.



$\therefore$ 在 $\text{Rt} \triangle ACE$ 中, $CE = h$, $\angle CAE = 60^\circ$,

$$\therefore AE = \frac{CE}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}h,$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt} \triangle ABE$ 中, $\angle BAE = 30^\circ$,

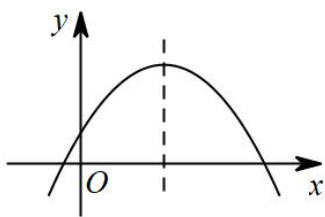
$$\therefore BE = AE \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} h = \frac{1}{3} h,$$

$$\therefore BC = BE + CE = h + \frac{1}{3} h = \frac{4}{3} h. \quad \text{即旗杆的高度为 } \frac{4}{3} h.$$

故选 C.

【点睛】本题考查了解直角三角形的应用--仰角俯角问题，首先构造直角三角形，再运用三角函数的定义解题，是中考常见题型，解题的关键是作出高线构造直角三角形.

5. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像如图所示，那么点 $P(a, b)$ 在 ()



- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】B

【解析】

【分析】根据对称轴的位置、开口方向、即可判断出 a 、 b 符号，进而求出 $P(a, b)$ 的位置.

【详解】解： $\because$ 抛物线开口向下，

$$\therefore a < 0,$$

又 $\because$ 对称轴在 y 轴右侧，

$$\therefore -\frac{b}{2a} > 0,$$

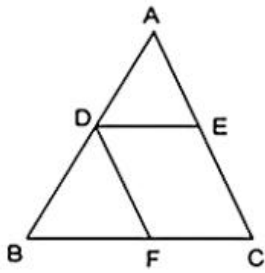
$$\therefore b > 0,$$

$\therefore P(a, b)$ 在第二象限

故选：B

【点睛】本题考查的是二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 系数符号的确定. 根据对称轴的位置、开口方向、与 y 轴的交点的位置判断出 a 、 b 、 c 的符号是解题的关键.

6. 如图， $DF \parallel AC$ ， $DE \parallel BC$ ，下列各式中正确的是 ()



- A. $\frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC}$ B. $\frac{AD}{BD} = \frac{BF}{FC}$ C. $\frac{AD}{DE} = \frac{CE}{BD}$ D. $\frac{AE}{CE} = \frac{BF}{CF}$

【答案】A

【解析】

【分析】由平行线分线段成比例可判断 A, B, D, 证明四边形 $DFCE$ 是平行四边形, $\triangle ADE \sim \triangle DBF$, 可得 $\frac{AD}{DE} = \frac{BD}{BF}$, 再利用等线段代换也不能证明 $\frac{AD}{DE} = \frac{CE}{BD}$, 可判断 C, 从而可得答案.

【详解】解: $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{CE}{AC},$$

$$\therefore \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC}, \text{ 故 A 符合题意;}$$

$$\therefore DF \parallel AC,$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{CF}{BF}, \text{ 故 B 不符合题意;}$$

$$\therefore DF \parallel AC, DE \parallel BC,$$

$$\therefore \text{四边形 } DFCE \text{ 是平行四边形, } \angle BDF = \angle A, \angle ADE = \angle B,$$

$$\therefore CE = DF, DE = CF, \triangle ADE \sim \triangle DBF,$$

$$\therefore \frac{AD}{DE} = \frac{BD}{BF}, \text{ 故 C 不符合题意;}$$

$$\therefore DE \parallel BC, DF \parallel AC$$

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{BD}, \frac{BF}{CF} = \frac{BD}{AD},$$

$$\therefore \frac{AE}{CE} \neq \frac{BF}{CF}, \text{ 故 D 不符合题意;}$$

故选 A.

【点睛】本题考查的是平行四边形的判定与性质, 平行线分线段成比例, 相似三角形的判定与性质, 熟练的利用平行线与相似三角形的性质证明成比例的线段是解本题的关键.

二、填空题: (本大题共 12 题)

7. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, 那么 $\frac{b-a}{a+b} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{1}{5}$

【解析】

【分析】 设 $a=2k$ ，得到 $b=3k$ ，代入 $\frac{b-a}{a+b}$ 化简即可求解.

【详解】 解： 设 $a=2k$,

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore b=3k,$$

$$\therefore \frac{b-a}{a+b} = \frac{3k-2k}{3k+2k} = \frac{k}{5k} = \frac{1}{5}.$$

故答案为: $\frac{1}{5}$

【点睛】 本题主要考查了比例化简求值，理解比例的意义，用含 k 的式子分别表示 a 、 b 是解题关键.

8. 如果两个相似三角形的面积比是 4: 9, 那么它们对应高的比是_____

【答案】 2: 3

【解析】

【详解】 解: $\because$ 两个相似三角形的面积比是 4: 9,

两个相似三角形的相似比是 2: 3,

$\therefore$ 它们对应高的比是 2: 3.

故答案为: 2: 3.

9. 已知点 P 是线段 MN 的黄金分割点, $MP>PN$, 如果 $MN=8$, 那么 PM 的长是 _____.

【答案】 $4\sqrt{5}-4$

【解析】

【分析】 根据黄金分割点的概念列式求解即可.

【详解】 解: $\because$ 点 P 是线段 MN 的黄金分割点, $MP>PN$, $MN=8$,

$$\therefore PM = \frac{\sqrt{5}-1}{2} MN = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 8 = 4\sqrt{5}-4,$$

故答案为: $4\sqrt{5}-4$.

【点睛】 此题考查了黄金分割点的概念，解题的关键是熟练掌握黄金分割点的概念. 把一条线段分成两部分，使其中较长的线段为全线段与较短线段的比例中项，这样的线段分割叫做黄金分割，他们的比值 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 叫做黄金比.

10. 如果在比例尺为 1: 1 000 000 的地图上, A 、 B 两地的图上距离是 3.4 厘米, 那么 A 、 B 两地的实际距离是 _____ 千米.

【答案】 34

【解析】

【分析】 根据地图上的距离与实际距离的比等于比例尺, 即可求解.

【详解】 解: 设 A 、 B 两地的实际距离为 x cm

则: $3.4 : x = 1 : 1000000$

解得 $x = 3400000\text{cm} = 34$ 千米

A 、 B 两地的实际距离为 34 千米

故答案为: 34

【点睛】 本题考查了比例线段, 熟练掌握比例尺=图上距离: 实际距离是解题的关键.

11. 两个相似三角形的对应边上中线之比为 2:3, 周长之和为 20cm, 则较小的三角形的周长为 _____.

【答案】 8cm

【解析】

【分析】 根据相似三角形的性质, 相似三角形对应高的比、对应中线的比、对应角平分线的比都等于相似比来解答.

【详解】 解: 因为该相似比为 2: 3, 而周长比也等于相似比, 则较小的三角形周长为 $20 \times \frac{2}{5} = 8\text{cm}$,

故答案为: 8cm

【点睛】 本题考查对相似三角形性质的理解: ①相似三角形周长的比等于相似比; ②相似三角形面积的比等于相似比的平方; ③相似三角形对应高的比、对应中线的比、对应角平分线的比都等于相似比.

12. 将抛物线 $y = x^2 + 4x - 1$ 向右平移 3 个单位后, 所得抛物线的表达式是 _____.

【答案】 $y = x^2 - 2x - 4$

【解析】

【分析】 利用二次函数图像的平移规律: 左加右减, 上加下减, 从而可得答案.

【详解】 解: 由题意可知, 将抛物线向右平移 3 个单位后得:

$$y = (x - 3)^2 + 4(x - 3) + 5$$

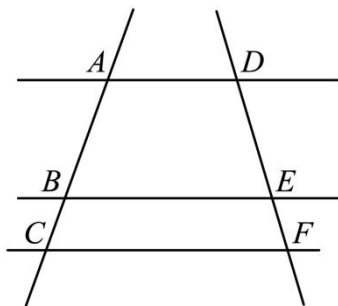
$$= x^2 - 6x + 9 + 4x - 12 + 5$$

$$= x^2 - 2x - 4,$$

故答案为 $y = x^2 - 2x - 4$.

【点睛】 本题主要考查二次函数图像的平移，掌握函数的平移规律是解题的关键.

13. 如图，已知 $AD \parallel BE \parallel CF$. 如果 $AB = 4.8$, $DE = 3.6$, $EF = 1.2$, 那么 AC 的长是 _____.



【答案】 6.4 或 $\frac{32}{5}$

【解析】

【分析】 根据三条平行线截两条直线，所得对应线段成比例，列出比例式解答即可.

【详解】 解: $\because AD \parallel BE \parallel CF$,

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF},$$

$$\because AB = 4.8, DE = 3.6, EF = 1.2,$$

$$\therefore \frac{4.8}{BC} = \frac{3.6}{1.2},$$

解得 $BC = 1.6$,

$$\therefore AC = AB + BC = 4.8 + 1.6 = 6.4.$$

故答案为: 6.4.

【点睛】 本题考查了平行线分线段成比例定理，解题的关键是掌握定理并灵活运用列出正确的比例式.

14. 已知一条斜坡的长度是 10 米，高度是 6 米，那么坡角的角度约为_____.

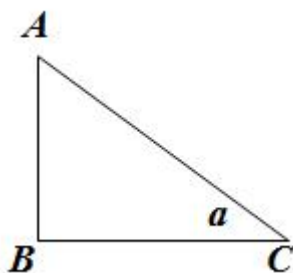
(备用数据 $\tan 31^\circ = \cot 59^\circ \approx 0.6$, $\sin 37^\circ = \cos 53^\circ \approx 0.6$)

【答案】 37° .

【解析】

【分析】 画出图形，设坡角为 α ，根据 $\sin \alpha = \frac{AB}{AC}$ ，可求得 α 的度数.

【详解】 由题意，作出图形，设坡角为 α ,



$$\therefore \sin a = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{即 } \sin a = 0.6$$

$$\therefore a = 37^\circ$$

故答案为: 37° .

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用，解答本题的关键是构造直角三角形，解直角三角形.

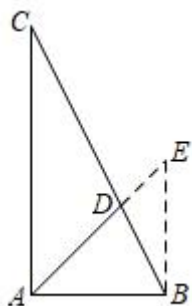
15. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ，已知 $AB = 1$ ， $AC = 2$ ， AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，那么 AD 的长是 _____.

【答案】 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\neq \frac{2}{3}\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 过 B 作 $BE \perp AB$ 交 AD 的延长线于 E ，先证 $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形，推出 $BE = AB = 1$ ， $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{2}$ ，再证 $\triangle ACD \sim \triangle EBD$ ，推出 $\frac{AC}{BE} = \frac{AD}{DE}$ ，代入数值即可求解.

【详解】 解：过 B 作 $BE \perp AB$ 交 AD 的延长线于 E ，



$\therefore \angle BAC = 90^\circ$ ， AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，

$$\therefore \angle BAE = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle ABE$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore BE = AB = 1,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{2},$$

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$ ， $BE \perp AB$ ，

$$\therefore AC \parallel BE,$$

$$\therefore \angle BED = \angle CAD,$$

$$\text{又} \because \angle BDE = \angle CDA,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle EBD,$$

$$\therefore \frac{AC}{BE} = \frac{AD}{DE},$$

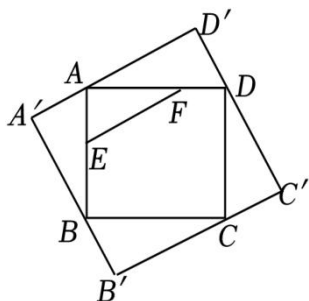
$$\therefore \frac{2}{1} = \frac{AD}{\sqrt{2}-AD},$$

$$\therefore AD = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{故答案为: } \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

【点睛】本题考查等腰三角形的判定，勾股定理，相似三角形的判定与性质等，解题的关键是正确添加辅助线，构造相似三角形．

16. 如图，点 E 、 F 分别在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 的边 AB 、 AD 上， $BE = 2AE$ 、 $AF = 2FD$ ，正方形 $A'B'C'D'$ 的四边分别经过正方形 $ABCD$ 的四个顶点，已知 $A'D' \parallel EF$ ，那么正方形 $A'B'C'D'$ 的边长是 _____.



【答案】 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】根据边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中， $BE = 2AE$ 、 $AF = 2FD$ ，得到 $BE = AF = \frac{2}{3}$ ， $AE = DF = \frac{1}{3}$ ，根据勾股定理得到 $EF = \sqrt{AE^2 + AF^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ，根据 $A'D' \parallel EF$ ，得到 $\angle A'AB = \angle AEF$ ，结合

$\angle A' = \angle EAF = 90^\circ$ ，推出 $\triangle A'AB \sim \triangle AEF$ ，得到 $\frac{AA'}{AE} = \frac{AB}{EF}$ ，求出 $AA' = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，同理求出： $AD' = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，

$$\text{推出 } A'D' = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

【详解】解： $\because BE = 2AE$ 、 $AF = 2FD$ ， $AB = AD = 1$ ，

$$\therefore BE = \frac{2}{3}, \quad AE = \frac{1}{3}, \quad AF = \frac{2}{3}, \quad DF = \frac{1}{3},$$

$$\therefore EF = \sqrt{AE^2 + AF^2} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore A'D' \parallel EF,$$

$$\therefore \angle A'AB = \angle AEF,$$

$$\text{又} \because \angle A' = \angle EAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle A'AB \sim \triangle AEF,$$

$$\therefore \frac{A'A}{AE} = \frac{AB}{EF},$$

$$\therefore A'A = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{同理可求: } AD' = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore A'D' = \frac{3\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \text{正方形 } A'B'C'D' \text{ 的边长为 } \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

【点睛】 本题主要考查了正方形，相似三角形，勾股定理等，解决问题的关键是熟练掌握正方形性质，相似三角形判定和性质，勾股定理解直角三角形.

17. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 2\angle B$ ，如果 $AC = 4$ ， $AB = 5$ ，那么 BC 的长是 _____.

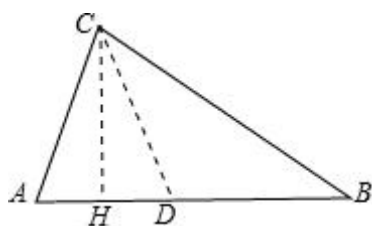
【答案】 6

【解析】

【分析】 过 C 作 $CH \perp AB$ ，垂足为 H ，在 AB 上取点 D ，连接 CD ，使 $CD = AC = 4$ ，然后根据等腰三

角形的性质和三角形外角的性质得出 AH 的值，最后根据勾股定理即可求解．

【详解】过 C 作 $CH \perp AB$ ，垂足为 H ，在 AB 上取点 D ，连接 CD ，使 $CD = AC = 4$ ，



$$\therefore CD = AC = 4,$$

$$\therefore \angle A = \angle CDA = 2\angle B,$$

$$\therefore \angle B = \angle BCD,$$

$$\therefore BD = CD = 4,$$

$$\therefore AD = AB - BD = 5 - 4 = 1,$$

$$\therefore DH = AH = \frac{1}{2}AD = 0.5,$$

$$\therefore CH^2 = AC^2 - AH^2 = 15\frac{3}{4},$$

$$\therefore BC^2 = BH^2 + CH^2,$$

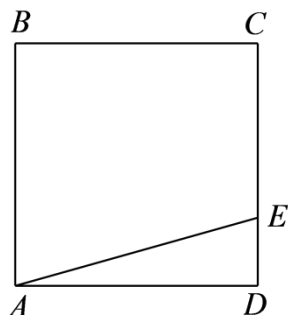
$$\therefore BC^2 = 4.5^2 + 15\frac{3}{4}, \text{ 即 } BC = 6,$$

故答案为：6．

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质、三角形外角的性质和勾股定理，画出图形，合理构建辅助线是解题的关键．

18. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 5，点 E 是边 CD 上的一点，将正方形 $ABCD$ 沿直线 AE 翻折后，点 D 的对应点是点 D' ，联结 CD' 交正方形 $ABCD$ 的边 AD 于点 F ，如果 $AF = CE$ ，那么 AF 的长是

_____．



【答案】 $5\sqrt{3} - 5$

【解析】

【分析】连接 DD' ，由折叠的性质及直角三角形的性质可得 $\angle D'DE = \angle DAE$ ，再可证明 $\triangle ADE \cong \triangle CDF$ ，则可得点 D' 是 CF 的中点，设 $DF = x$ ，则可得 DD' ，再可证明 $\triangle D'DE \sim \triangle DCD'$ ，由相似三角形的性质建立关于 x 的方程，解方程即可求得 x ，从而求得结果。

【详解】解：连接 DD' ，如图，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore AD = CD, \quad \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AED + \angle DAE = 90^\circ,$$

由折叠的性质得： $DE = D'E$ ， $AE \perp DD'$ ，

$$\therefore \angle D'DE + \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle D'DE = \angle DAE,$$

$$\because AF = CE,$$

$$\therefore AD - AF = CD - CE, \quad \text{即 } DF = DE,$$

$$\because \angle ADE = \angle CDF = 90^\circ, \quad AD = CD,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDF (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle DCF = \angle DAE,$$

$$\therefore \angle D'DE = \angle DCF,$$

$$\therefore CD' = DD',$$

$$\because \angle DCF + \angle CFD = 90^\circ, \quad \angle D'DE + \angle D'DF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CFD = \angle D'DF,$$

$$\therefore D'D = D'F = CD',$$

即点 D' 是 CF 的中点，

$$\text{设 } DF = x, \quad \text{则 } DD' = \frac{1}{2}CF,$$

$$\because CF^2 = CD^2 + DF^2 = 25 + x^2,$$

$$\therefore DD'^2 = \frac{1}{4}(25 + x^2),$$

$$\because DE = D'E, \quad CD' = DD',$$

$$\therefore \angle D'DE = \angle DCF = \angle DD'E,$$

$$\therefore \triangle D'DE \sim \triangle DCD',$$

$$\therefore \frac{DD'}{CD} = \frac{DE}{CD'},$$

$$\because CD' = DD',$$

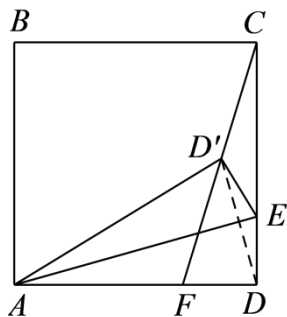
$$\therefore DD'^2 = CD \cdot DE,$$

$$\text{即 } \frac{1}{4}(25 + x^2) = 5x$$

$$\text{解得: } x_1 = 10 - 5\sqrt{3}, \quad x_2 = 10 + 5\sqrt{3} \quad (\text{舍去}),$$

$$\therefore AF = AD - DF = 5 - (10 - 5\sqrt{3}) = 5\sqrt{3} - 5$$

故答案为: $5\sqrt{3} - 5$.



【点睛】本题考查了折叠的性质，正方形的性质，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，解一元二次方程，直角三角形的性质等知识，利用相似三角形的性质建立一元二次方程是本题的关键与难点.

三、解答题：(本大题共 7 题)

$$19. \text{ 计算: } 4\sin 45^\circ - 2\tan 30^\circ \cos 30^\circ + \frac{\cot 45^\circ}{\cos 60^\circ}$$

【答案】 $2\sqrt{2}+1$

【解析】

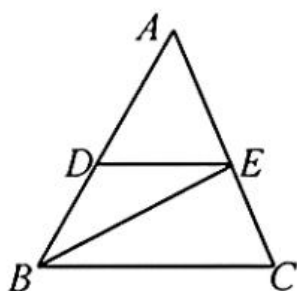
【详解】试题分析：将特殊三角函数的值代入，利用实数的混合运算计算即可.

$$\text{解: 原式} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\sqrt{2} - 1 + 2$$

$$= 2\sqrt{2} + 1.$$

20. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， BE 平分 $\angle ABC$ ， $DE \parallel BC$ ， $AD = 3$ ， $DE = 2$.



(1) 求 $AE:AC$ 的值;

(2) 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ 求向量 $\overrightarrow{BE}$ (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示).

【答案】 (1) $\frac{AE}{AC} = \frac{3}{5}$

(2) $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{5}\vec{b} - \frac{2}{5}\vec{a}$

【解析】

【分析】 (1) 先证明 $\angle DEB = \angle EBC$, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 结合角平分线的定义可得 $\angle DBE = \angle CBE$, 证明 $DB = DE = 2$, 结合相似三角形的性质可得答案;

(2) 先求解 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$, 结合 (1) 可得 $\frac{CE}{AC} = \frac{2}{5}$, 可得 $\overrightarrow{EC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$, 再利用 $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EC}$, 从而可得答案.

【小问 1 详解】

解: $\because BE$ 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle DBE = \angle CBE,$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DEB = \angle EBC, \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle DEB, \text{ 而 } DE = 2,$$

$$\therefore DB = DE = 2, \text{ 而 } AD = 3,$$

$$\therefore AB = AD + BD = 5,$$

$$\because \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{5}.$$

【小问 2 详解】

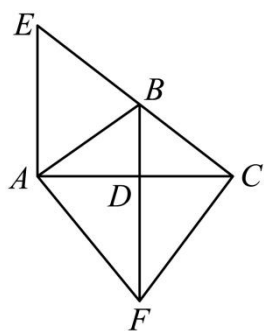
$$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b},$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{AE}{AC} &= \frac{3}{5}, \\ \therefore \frac{CE}{AC} &= \frac{2}{5}, \\ \therefore \overrightarrow{EC} &= \frac{2}{5} \overrightarrow{AC} = \frac{2}{5} \vec{a} + \frac{2}{5} \vec{b}, \\ \therefore \overrightarrow{BE} &= \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EC} = \vec{b} - \frac{2}{5} \vec{a} - \frac{2}{5} \vec{b} = \frac{3}{5} \vec{b} - \frac{2}{5} \vec{a}.\end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了平面向量、相似三角形的判定与性质，注意熟练掌握相似三角形判定的方法，难度一般.

21. 如图，在 $Rt\triangle EAC$ 中， $\angle EAC=90^\circ$ ， $\angle E=45^\circ$ ，点 B 在边 EC 上， $BD \perp AC$ ，垂足为 D ，点 F 在 BD 延长线上， $\angle FAC = \angle EAB$ ， $BF=5$ ， $\tan \angle AFB = \frac{3}{4}$. 求：



- (1) AD 的长；
- (2) $\cot \angle DCF$ 的值.

【答案】 (1) $\frac{12}{5}$

(2) $\frac{9}{16}$

【解析】

【分析】 (1) 由各角之间的关系得出 $\angle BAF = 90^\circ$ ，再由正切函数及勾股定理求解得出 $AB = 3$ ， $AF = 4$ ，最后利用三角形等面积法求解即可；

(2) 由等面积法得出 $BD = \frac{9}{5}$ ，结合图形得出 $DC = BD = \frac{9}{5}$ ，再由余切函数的定义求解即可.

【小问 1 详解】

解： $\because \angle EAC = 90^\circ$,

$\therefore \angle EAB + \angle BAC = 90^\circ$,

$\because \angle FAC = \angle EAB$,

$\therefore \angle FAC + \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAF = 90^\circ$,

$$\therefore \tan \angle AFB = \frac{AB}{AF} = \frac{3}{4},$$

令 $AB = 3x$, 则 $AF = 4x$,

$$\therefore BF^2 = AB^2 + AF^2,$$

$$\therefore BF^2 = (3x)^2 + (4x)^2,$$

$$\therefore BF = 5x = 5,$$

$$\therefore x = 1,$$

$$\therefore AB = 3x = 3, \quad AF = 4x = 4,$$

$$\therefore BF \cdot AD = AB \cdot AF = 2S_{\triangle ABF},$$

$$\therefore 5AD = 3 \times 4 = 12,$$

$$\therefore AD = \frac{12}{5};$$

【小问 2 详解】

在 $Rt\triangle ABF$ 中, $AD \perp BF$,

$$\therefore AB^2 = BD \cdot BF,$$

$$\therefore 9 = 5BD,$$

$$\therefore BD = \frac{9}{5},$$

$$\therefore DF = BF - BD = \frac{16}{5},$$

$$\therefore \angle EAC = 90^\circ, \quad \angle E = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = 45^\circ,$$

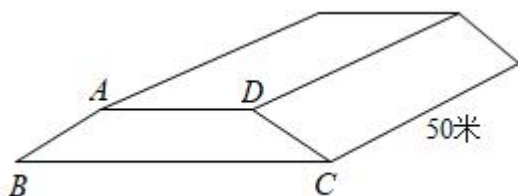
$$\therefore \angle DBC = 45^\circ,$$

$$\therefore DC = BD = \frac{9}{5},$$

$$\therefore \cot \angle DCF = \frac{DC}{DF} = \frac{9}{16}.$$

【点睛】 本题主要考查三角函数解三角形及勾股定理解三角形, 理解题意, 找准各角之间的关系是解题关键.

22. 某地一段长为 50 米的混凝土堤坝, 堤坝的横断面 $ABCD$ 是等腰梯形 (如图所示), 坝顶 AD 宽为 8 米, 坝高为 4 米, 斜坡 AB 的坡度为 1:1.5.



(1) 求横断面 $ABCD$ 的面积;

(2) 为了提高堤坝的防洪能力, 现需将原堤坝按原堤坝要求和坡度加高 1 米, 求加高堤坝需要多少立方米的混凝土? (堤坝的体积=横断面的面积 $\times$ 堤坝的长度)

【答案】(1) 横断面 $ABCD$ 的面积为 56m^2 .

(2) 加高堤坝需要的混凝土为: 325m^3 .

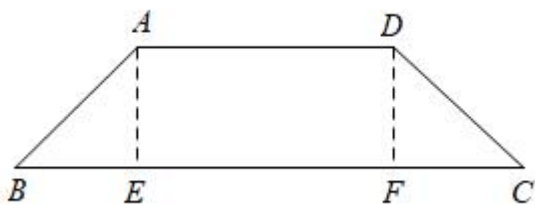
【解析】

【分析】(1) 如图, 过 A 作 $AE \perp BC$ 于 E , 过 D 作 $DF \perp BC$ 于 F , 再证明 $AD = EF = 8$, $BE = 6 = CF$, 再利用梯形面积公式进行计算即可;

(2) 先画出图形, 如图, 过 G 作 $GK \perp AD$ 于 K , 过 H 作 $HL \perp AD$ 于 L , 结合题意可得: $KG = HL = 1$, 斜坡 AG 的坡度是 $1:1.5$, 四边形 $GADH$, 四边形 $GBCH$ 都是等腰梯形, 同理可得: $AK = DL$, $GH = KL$, 再求解 $AK = 1.5 = DL$, $KL = 5 = GH$, 可得四边形 $GADH$ 的面积为: $\frac{13}{2}\text{m}^2$, 从而可得答案.

【小问 1 详解】

解: 如图, 过 A 作 $AE \perp BC$ 于 E , 过 D 作 $DF \perp BC$ 于 F ,



由等腰梯形是轴对称图形可得: $AE = DF = 4$, $BE = CF$, 四边形 $AEFD$ 是矩形,

$$\therefore AD = EF = 8,$$

$\therefore$ 斜坡 AB 的坡度为 $1:1.5$,

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{1}{1.5},$$

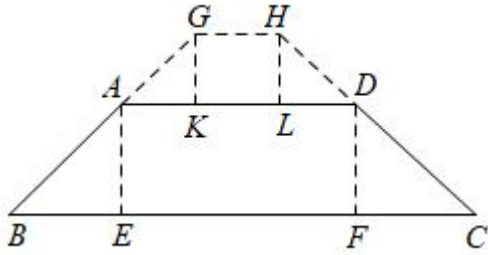
$$\therefore BE = 4 \times 1.5 = 6 = CF,$$

$$\therefore BC = BE + EF + CF = 20,$$

$$\therefore \text{横断面 } ABCD \text{ 的面积为 } \frac{1}{2}(8 + 20) \times 4 = 56(\text{m}^2).$$

【小问2详解】

如图，过 G 作 $GK \perp AD$ 于 K ，过 H 作 $HL \perp AD$ 于 L ，



结合题意可得： $KG = HL = 1$ ，斜坡 AG 的坡度是1:1.5，

四边形 $GADH$ ，四边形 $GBCH$ 都是等腰梯形，

同理可得： $AK = DL$ ， $GH = KL$ ，

由斜坡 AG 的坡度是1:1.5，

$$\therefore \frac{GK}{AK} = \frac{1}{1.5},$$

$$\therefore AK = 1.5 = DL,$$

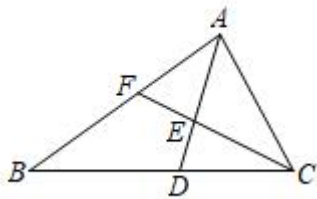
$$\therefore KL = AD - AK - DL = 8 - 1.5 - 1.5 = 5 = GH,$$

$$\therefore \text{四边形 } GADH \text{ 的面积为: } \frac{1}{2}(5+8) \times 1 = \frac{13}{2}(\text{m}^2),$$

$$\therefore \text{加高堤坝需要的混凝土为: } \frac{13}{2} \times 50 = 325(\text{m}^3).$$

【点睛】本题考查的是等腰梯形的性质，坡度的应用，堤坝体积的计算，理解题意，作出符合题意的图形，利用数形结合的方法解题是关键.

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 F 分别是边 BC 、 AB 上的点， AD 和 CF 交于点 E .



(1) 如果 $BF \cdot AB = BD \cdot BC$ ，求证： $EF \cdot CE = DE \cdot AE$ ；

(2) 如果 $AE \cdot BF = 2AF \cdot DE$ ，求证： AD 是 $\triangle ABC$ 的中线.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 先将等式化为比例式，可得到 $\frac{BF}{BD} = \frac{BC}{AB}$ ，再根据角相等，证得 $\triangle ABD \sim \triangle CBF$ 、

$\triangle AEF \sim \triangle CED$ ，从而能证得 $EF \cdot CE = DE \cdot AE$ ；

(2) 过 D 作 $DG \parallel AB$ 交 CF 于 G , 则 $\triangle DEG \sim \triangle FEA$, 再根据比例式的代换得到 $\frac{CD}{BC} = \frac{1}{2}$, 从而得出结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because BF \cdot AB = BD \cdot BC$,

$$\therefore \frac{BF}{BD} = \frac{BC}{AB},$$

$$\because \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle CBF,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BCF,$$

$$\text{又} \because \angle AEF = \angle CED,$$

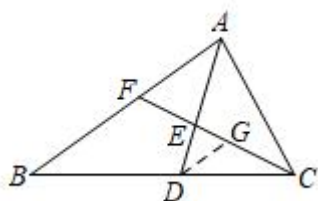
$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle CED,$$

$$\therefore \frac{EF}{ED} = \frac{AE}{CE},$$

$$\therefore EF \cdot CE = DE \cdot AE;$$

【小问 2 详解】

过 D 作 $DG \parallel AB$ 交 CF 于 G , 则 $\triangle DEG \sim \triangle AEF$,



$$\therefore \frac{AE}{ED} = \frac{AF}{DG},$$

$$\because AE \cdot BF = 2AF \cdot DE,$$

$$\therefore \frac{AE}{ED} = \frac{2AF}{BF},$$

$$\therefore \frac{AF}{DG} = \frac{2AF}{BF},$$

$$\text{即} \frac{DG}{FB} = \frac{AF}{2AF} = \frac{1}{2},$$

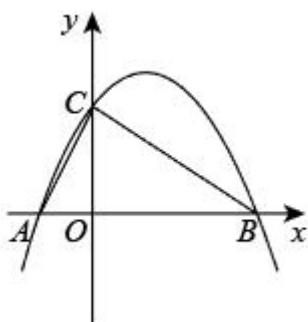
$$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{DG}{FB},$$

$$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{1}{2},$$

$\therefore D$ 为 BC 的中点, AD 是 $\triangle ABC$ 的中线.

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定和性质, 熟练掌握其判定定理及性质是解题的关键.

24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 与 x 轴的正、负半轴分别交于点 B 、 A ，与 y 轴交于点 C ，已知 $AB = 5$ ， $\tan \angle CAB = 3$ ， $OC : OB = 3 : 4$ 。



- (1) 求该抛物线的表达式；
- (2) 设该抛物线的对称轴分别与 x 轴、 BC 交于点 E 、 F ，求 EF 的长；
- (3) 在 (2) 的条件下，联结 CE ，如果点 P 在该抛物线的对称轴上，当 $\triangle CEP$ 和 $\triangle CEB$ 相似时，求点 P 的坐标

【答案】(1) $y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 3$

(2) $EF = \frac{15}{8}$

(3) P 的坐标为： $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$ 或 $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ 。

【解析】

【分析】(1) 先利用抛物线的解析式求解 C 的坐标，再求解 B 的坐标， A 的坐标，设抛物线为 $y = a(x+1)(x-4)$ ，把 $C(0,3)$ 代入即可；

(2) 先求解抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$ ，再求解直线 BC 为 $y = -\frac{3}{4}x + 3$ ，可得 F 的坐标，从而可得答案；

(3) 如图，过 E 作 $EH \perp BC$ 于 H ，证明 $EO = EH = \frac{3}{2}$ ，可得 $\angle OCE = \angle BCE$ ，而 $OC \parallel EF$ ，可得 $\angle OCE = \angle CEF$ ，则 $\angle BCE = \angle CEF$ ，当 $\triangle CEP$ 和 $\triangle CEB$ 相似时，显然 CO 与对称轴没有交点， P 不在 E 的下方，只能在 E 的上方，且 $\angle CEP$ 与 $\angle BCE$ 是对应角，再分两种情况分别求解即可。

【小问 1 详解】

解： $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ ，

当 $x = 0$ ，则 $y = 3$ ，即 $C(0,3)$ ，

$\because OC : OB = 3 : 4$ ，

$$\therefore OB = 4, \text{ 即 } B(4, 0),$$

$$\therefore AB = 5,$$

$$\therefore OA = 1, \text{ 即 } A(-1, 0),$$

设抛物线为 $y = a(x+1)(x-4)$, 把 $C(0, 3)$ 代入得:

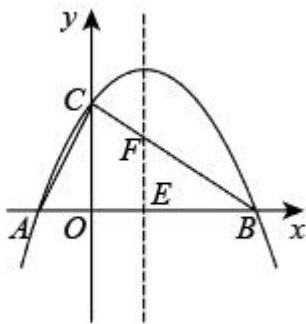
$$-4a = 3, \text{ 解得: } a = -\frac{3}{4},$$

$$\therefore \text{ 抛物线的解析式为: } y = -\frac{3}{4}(x+1)(x-4) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 3.$$

【小问 2 详解】

$$\therefore A(-1, 0), B(4, 0),$$

$$\therefore \text{ 抛物线的对称轴为直线 } x = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2},$$



$$\therefore B(4, 0), C(0, 3),$$

设直线 BC 为 $y = kx + 3$,

$$\therefore 4k + 3 = 0, \text{ 解得: } k = -\frac{3}{4},$$

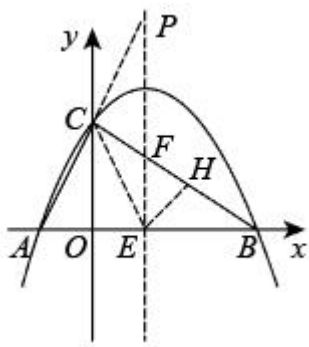
$$\therefore \text{ 直线 } BC \text{ 为 } y = -\frac{3}{4}x + 3,$$

$$\text{当 } x = \frac{3}{2} \text{ 时, } y = -\frac{3}{4} \times \frac{3}{2} + 3 = \frac{15}{8}, \text{ 即 } F\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{8}\right),$$

$$\therefore EF = \frac{15}{8}.$$

【小问 3 详解】

如图, 过 E 作 $EH \perp BC$ 于 H ,



$$\therefore B(4,0), C(0,3), E\left(\frac{3}{2},0\right),$$

$$\therefore BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, CE = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}, BE = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}, \sin \angle ABC = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{EH}{BE} = \frac{3}{5}, \text{ 则 } EH = \frac{3}{2},$$

$$\therefore EO = EH = \frac{3}{2}, \text{ 而 } \angle COE = \angle CHE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OCE = \angle BCE,$$

$$\text{而 } OC \parallel EF,$$

$$\therefore \angle OCE = \angle CEF,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle CEF,$$

当 $\triangle CEP$ 和 $\triangle CEB$ 相似时, 显然 CO 与对称轴没有交点,

$\therefore P$ 不在 E 的下方, 只能在 E 的上方, 且 $\angle CEP$ 与 $\angle BCE$ 是对应角,

当 $\triangle CEB \sim \triangle ECP$ 时,

$$\therefore \frac{BC}{EP} = \frac{CE}{CE} = 1,$$

$$\therefore EP = BC = 5,$$

$$\therefore P\left(\frac{3}{2}, 5\right),$$

当 $\triangle CEB \sim \triangle EPC$,

$$\therefore \frac{CE}{EP} = \frac{BC}{CE},$$

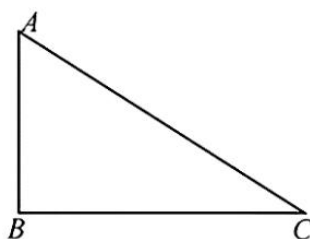
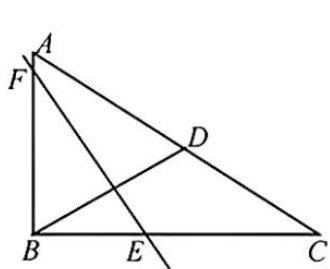
$$\therefore \frac{\frac{3}{2}\sqrt{5}}{PE} = \frac{5}{\frac{3\sqrt{5}}{2}}, \text{ 解得: } PE = \frac{9}{4},$$

$$\therefore P\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right).$$

综上：P 的坐标为： $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$ 或 $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

【点睛】 本题考查的是利用待定系数法求解抛物线的解析式，求解一次函数的解析式，锐角三角函数的应用，相似三角形的判定与性质，角平分线的判定与性质，勾股定理的应用，熟练的证明 $\angle CEP$ 与 $\angle BCE$ 是对应角是解 (3) 的关键.

25. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AC = 10$ ， $\tan C = \frac{3}{4}$ ，点 D 是斜边 AC 上的动点，连接 BD ， EF 垂直平分 BD 交射线 BA 于点 F ，交边 BC 于点 E .



(备用图)

- (1) 如图，当点 D 是斜边 AC 上的中点时，求 EF 的长；
- (2) 连接 DE ，如果 $\triangle DEC$ 和 $\triangle ABC$ 相似，求 CE 的长；
- (3) 当点 F 在边 BA 的延长线上，且 $AF = 2$ 时，求 AD 的长.

【答案】 (1) $EF = \frac{125}{24}$

(2) $CE = \frac{32}{7}$ 或 $CE = 5$

(3) $AD = \frac{16\sqrt{6} - 6}{5}$

【解析】

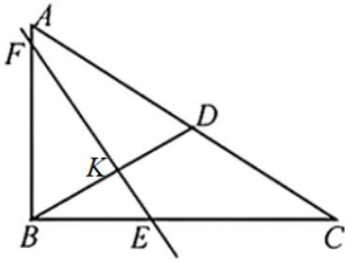
【分析】 (1) 如图，记 BD ， EF 的交点为 K ，证明 $BK = DK = \frac{5}{2}$ ， $\angle BFK = \angle DBC = \angle C$ ，再利用锐角三角函数分别求解 EK ， FK 即可；

(2) 先求解 AB ， BC ，由 $\triangle DEC$ 和 $\triangle ABC$ 相似，分两种情况讨论即可；

(3) 如图，连接 DF ，过 F 作 $FT \perp AD$ 交 DA 的延长线于 T ，由 $\tan \angle FAT = \tan \angle CAB = \frac{CB}{AB} = \frac{4}{3}$ ，可得 $\frac{FT}{AT} = \frac{4}{3}$ ，求解 $FT = \frac{8}{5}$ ， $AT = \frac{6}{5}$ ，结合垂直平分线的性质可得： $FD = FB = AF + AB = 8$ ，由勾股定理可得 $TD = \sqrt{FD^2 - FT^2} = \frac{16}{5}\sqrt{6}$ ，从而可得答案.

【小问 1 详解】

解：如图，记 BD ， EF 的交点为 K ，



$\because AC = 10$ ，点 D 是斜边 AC 上的中点， $\angle ABC = 90^\circ$ ，

$$\therefore BD = CD = \frac{1}{2}AC = 5,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle C,$$

$\because EF$ 垂直平分 BD

$$\therefore BK = DK = \frac{5}{2}, \quad \angle BKF = \angle BKE = 90^\circ = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle BFK + \angle BEK = 90^\circ = \angle BEK + \angle EBK,$$

$$\therefore \angle BFK = \angle DBC = \angle C,$$

$$\because \tan C = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \tan \angle EBK = \frac{EK}{BK} = \frac{3}{4}, \quad \tan \angle BFK = \frac{BK}{FK} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore EK = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}, \quad FK = \frac{5}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{10}{3},$$

$$\therefore EF = EK + FK = \frac{15}{8} + \frac{10}{3} = \frac{125}{24}.$$

【小问 2 详解】

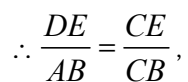
$$\because \angle ABC = 90^\circ, \quad AC = 10, \quad \tan C = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \tan C = \frac{3}{4} = \frac{AB}{BC}, \quad \text{设 } AB = 3m, \quad \text{则 } BC = 4m,$$

$$\therefore AC = 5m = 10, \quad \text{解得：} m = 2,$$

$$\therefore AB = 6, \quad BC = 8,$$

$\because \triangle DEC$ 和 $\triangle ABC$ 相似，如图，当 $\triangle DEC \sim \triangle ABC$ 时，


$$\therefore \frac{8-CE}{6} = \frac{CE}{8}, \text{ 解得: } CE = \frac{32}{7},$$

$$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{CE}{AC},$$

$$\therefore \frac{8-CE}{6} = \frac{CE}{10}, \text{ 解得: } CE = 5.$$

$$\therefore \tan \angle FAT = \tan \angle CAB = \frac{CB}{AB} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \frac{FT}{AT} = \frac{4}{3}, \text{ 而 } AF = 2,$$

同理可得: $FT = \frac{8}{5}$, $AT = \frac{6}{5}$,

由垂直平分线的性质可得: $FD = FB = AF + AB = 8$,

$$\therefore TD = \sqrt{FD^2 - FT^2} = \frac{16}{5}\sqrt{6},$$

$$\therefore AD = DT - AT = \frac{16}{5}\sqrt{6} - \frac{6}{5} = \frac{16\sqrt{6} - 6}{5}.$$

【点睛】 本题考查的是线段的垂直平分线的性质，勾股定理的应用，相似三角形的判定与性质，锐角三角函数的应用，清晰的分类讨论，作出适当的辅助线构建相似三角形与直角三角形都是解本题的关键.

