

2022 年上海市松江区中考数学一模试卷

答案解析版

一、选择题

1. 已知 α 为锐角, 若 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 α 的度数是()

A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 75°

【答案】C

【解析】

【分析】根据 60° 度角的正弦值是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 解答即可.

【详解】解: $\because \alpha$ 为锐角, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \alpha = 60^\circ$.

故选 C.

【点睛】此题比较简单, 只要熟知特殊角度的三角函数值即可.

2. 已知在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = c$, $AC = b$, 那么下列结论一定成立的是 ()

A. $b = c \tan A$

B. $b = c \cot A$

C. $b = c \sin A$

D. $b = c \cos A$

【答案】D

【解析】

【分析】根据余弦的定义解答即可.

【详解】解: 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AB = c$, $AC = b$,

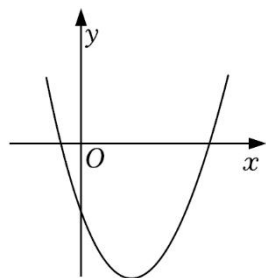
$$\text{则 } \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c},$$

$$\therefore b = c \cos A,$$

故选: D.

【点睛】此题考查了余弦的定义: 角的余弦等于角的邻边与斜边的比值, 熟记定义是解题的关键.

3. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示, 那么下列判断正确的是 ()



A. $b > 0$, $c > 0$

B. $b > 0$, $c < 0$

C. $b < 0$, $c > 0$

D. $b < 0$, $c < 0$.

【答案】D

【解析】

【分析】通过函数图象开口方向，对称轴位置及抛物线与 y 轴交点位置可确定 a , b , c 的符号，进而求解.

【详解】解：∵ 抛物线开口向上，

$$\therefore a > 0,$$

∵ 抛物线对称轴在 y 轴右侧，

$$\therefore -\frac{b}{2a} > 0,$$

$$\therefore b < 0,$$

∵ 抛物线与 y 轴交点在 x 轴下方，

$$\therefore c < 0.$$

故选：D.

【点睛】本题考查了二次函数的图象，解题关键是掌握二次函数的图象与系数的关系.

4. 已知 $\vec{a} = 2\vec{b}$ ，那么下列判断错误的是（ ）

- A. $\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{0}$ B. $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a}$ C. $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ D. $\vec{a} \parallel \vec{b}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据平行向量以及模的定义的知识求解即可求得答案.

【详解】解：A、由 $\vec{a} = 2\vec{b}$ 知， $\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{0}$ ，符合题意；

B、由 $\vec{a} = 2\vec{b}$ 知， $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a}$ ，不符合题意；

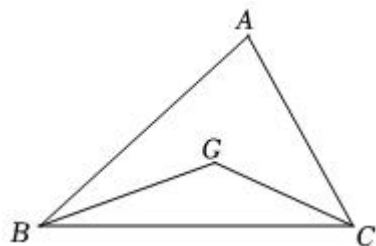
C、由 $\vec{a} = 2\vec{b}$ 知， $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ ，不符合题意；

D、由 $\vec{a} = 2\vec{b}$ 知， $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，不符合题意.

故选：A.

【点睛】本题考查了平面向量，注意，平面向量既有大小，又有方向.

5. 如图，已知点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，那么 $S_{\triangle BCG} : S_{\triangle ABC}$ 等于（ ）



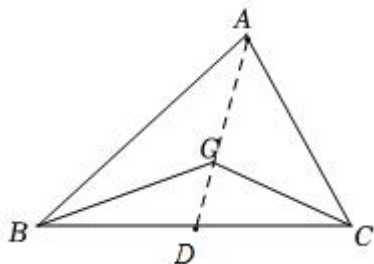
- A. 1: 2 B. 1: 3 C. 2: 3 D. 2: 5

【答案】B

【解析】

【分析】连接 AG 延长交 BC 于点 D ，由 G 是重心可得 D 是 BC 的中点，所以 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}$ ， $S_{\triangle BDG} = S_{\triangle CDG}$ ，又由重心定理可 $AG = 2GD$ ，进而得到 $3S_{\triangle BCG} = S_{\triangle ABC}$ ，即可求解。

【详解】解：连接 AG 延长交 BC 于点 D ，



$\because G$ 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore D$ 是 BC 的中点，

$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}$ ， $S_{\triangle BDG} = S_{\triangle CDG}$ ，

$\because AG = 2GD$ ，

$\therefore 2S_{\triangle BGD} = S_{\triangle ABG}$ ， $2S_{\triangle CGD} = S_{\triangle ACG}$ ，

$\therefore 3S_{\triangle BCG} = S_{\triangle ABC}$ ，

$\therefore S_{\triangle BCG} : S_{\triangle ABC} = 1 : 3$ ，

故选：B.

【点睛】本题考查三角形的重心，熟练掌握三角形重心定理，利用等底、等高三角形面积的特点求解是解题的关键。

6. 下列四个命题中，真命题的个数是（ ）

- (1) 底边和腰对应成比例的两个等腰三角形相似；
- (2) 底边和底边上的高对应成比例的两个等腰三角形相似；
- (3) 底边和一腰上的高对应成比例的两个等腰三角形相似；
- (4) 腰和腰上的高对应成比例的两个等腰三角形相似。

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

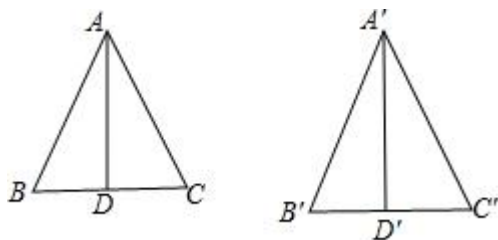
【解析】

【分析】根据等腰三角形的性质、相似三角形的判定定理判断即可。

【详解】解：(1) $\because$ 两个等腰三角形的两腰相等，

$\therefore$ 底边和腰对应成比例的两个等腰三角形一定相似；故 (1) 是真命题

(2) 如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是等腰三角形， $AD \perp BC$ ， $A'D' \perp B'C'$ ，



则 $BD = \frac{1}{2} BC$, $B'D' = \frac{1}{2} B'C'$,

$$\therefore \frac{AD}{A'D'} = \frac{BC}{B'C'},$$

$$\therefore \frac{AD}{A'D'} = \frac{BD}{B'D'},$$

$$\therefore \angle ADC = \angle A'D'C' = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ADB \sim \triangle A'D'B',$$

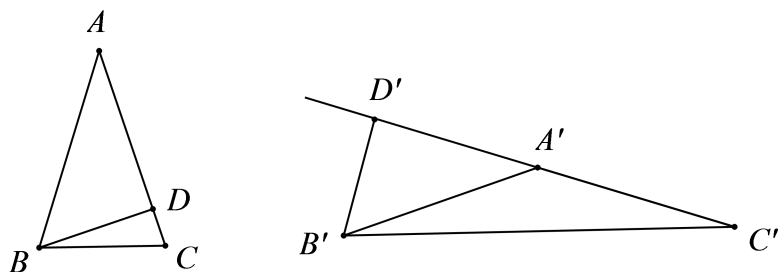
$$\therefore \angle B = \angle B',$$

$$\therefore \triangle ACB \sim \triangle A'C'B',$$

$\therefore$ 底边和底边上的高对应成比例的两个等腰三角形相似，故 (2) 是真命题；

(3) 同理，底边和一腰上的高对应成比例的两个等腰三角形相似，故 (3) 是真命题；

(4) 如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是等腰三角形， $BD \perp AC$, $B'D' \perp A'C'$,



$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{BD}{B'D'},$$

但此时两个三角形不相似，故 (4) 是假命题；

故选：C.

【点睛】 本题考查了等腰三角形的性质、相似三角形的判定定理，掌握相似的判定定理是解题的关键.

二、填空题

7. 已知 $\frac{x}{y} = 2$, 那么 $\frac{2x-y}{x+2y} = \underline{\quad}$.

【答案】 $\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】根据比例的性质求出 $x = 2y$ ，再把 $x = 2y$ 代入 $\frac{2x-y}{x+2y}$ ，即可求出答案.

【详解】 $\because \frac{x}{y} = 2$,

$\therefore x = 2y$,

$$\therefore \frac{2x-y}{x+2y} = \frac{4y-y}{2y+2y} = \frac{3y}{4y} = \frac{3}{4}.$$

故答案为: $\frac{3}{4}$.

【点睛】本题主要考查比例的性质，熟练掌握比例的性质是解题的关键.

8. 把抛物线 $y = x^2 + 1$ 向右平移 1 个单位，所得新抛物线的表达式是_____.

【答案】 $y = x^2 - 2x + 2$

【解析】

【分析】根据平移规律得到新抛物线顶点坐标，即可得的新抛物线的表达式.

【详解】 $\because$ 抛物线 $y = x^2 + 1$ 的顶点坐标为 $(0, 1)$,

$\therefore$ 抛物线向右平移 1 个单位后，所得新抛物线的表达式为 $y = (x-1)^2 + 1$ ，即 $y = x^2 - 2x + 2$.

故答案为: $y = x^2 - 2x + 2$.

【点睛】本题考查的是二次函数的图象与几何变换，熟知“上加下减，左加右减”的原则是解答此题的关键.

9. 已知两个相似三角形的面积比为 4: 9，那么这两个相似三角形的周长比为 _____.

【答案】 $2: 3$

【解析】

【分析】根据相似三角形的面积比等于相似比的平方可得这两个相似三角形的相似比，进而问题可求解.

【详解】解: $\because$ 两个相似三角形的面积比为 4: 9,

$\therefore$ 这两个相似三角形的相似比为 2: 3,

$\therefore$ 这两个相似三角形的周长比为 2: 3;

故答案为 2: 3.

【点睛】本题主要考查相似三角形的性质，熟练掌握相似三角形的性质是解题的关键.

10. 已知， $AB=8$ ，P 是 AB 黄金分割点， $PA>PB$ ，则 PA 的长为_____.

【答案】 $4\sqrt{5} - 4$

【解析】

【分析】根据黄金分割点的定义，知 AP 是较长线段；则 $AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB$ ，代入数据即可得出 AP 的长.

【详解】由于 P 为线段 $AB=8$ 的黄金分割点，
且 AP 是较长线段；

$$\text{则 } AP=8 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}=4(\sqrt{5}-1).$$

故答案为： $4\sqrt{5}-4$.

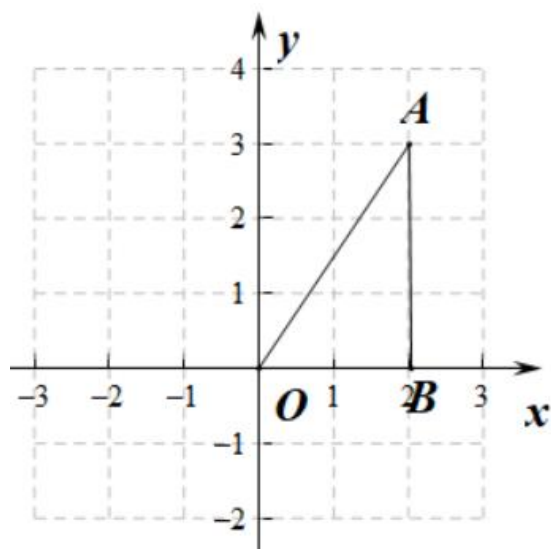
11. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 A 的坐标为 $(2, 3)$ ，那么直线 OA 与 x 轴夹角的正切值是__.

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】过点 A 作 $AB \perp x$ 轴交于点 B，由 $A(2,3)$ 得 $OB=2$ ， $AB=3$ ，根据 $\tan \angle AOB = \frac{AB}{OB}$ 即可得出答案.

【详解】



如图，过点 A 作 $AB \perp x$ 轴交于点 B，

$$\therefore A(2,3),$$

$$\therefore OB=2, \quad AB=3,$$

$$\therefore \tan \angle AOB = \frac{AB}{OB} = \frac{3}{2},$$

故答案为： $\frac{3}{2}$.

【点睛】本题考查三角函数得正切值，掌握正切的比值是解题的关键.

12. 如果一个二次函数图象的对称轴是直线 $x=2$ ，且沿着 x 轴正方向看，图象在对称轴左侧部分是上升的，请写出一个符合条件的函数解析式__.

【答案】 $y = -x^2+4x+5$ (答案不唯一).

【解析】

【分析】由于二次函数的图象在对称轴 $x=2$ 的左侧部分是上升的，由此可以确定二次函数的二次项系数为负数，由此可以确定函数解析式，答案不唯一.

【详解】解：∵二次函数的图象在对称轴 $x=2$ 的左侧部分是上升的，

∴这个二次函数的二次项系数为负数，

∴符合条件的函数有 $y = -x^2 + 4x + 5$ ，

答案为： $y = -x^2 + 4x + 5$ ，答案不唯一.

【点睛】此题主要考查了二次函数的性质，解题的关键是会利用函数的性质确定解析式的各项系数.

13. 一位运动员投掷铅球，如果铅球运行时离地面高度为 y (米) 关于水平距离 x (米) 的函数解析式为

$y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ ，那么铅球运动过程中最高点离地面的距离为_____m.

【答案】3

【解析】

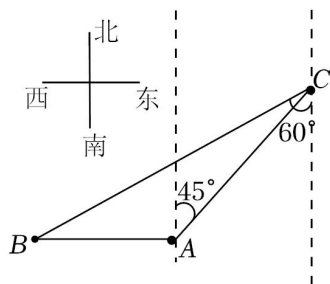
【详解】由题意可得： $y = -x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = -(x^2 - \frac{2}{3}x) + \frac{5}{3} = -(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{16}{9}$ ，

故铅球运动过程中最高点离地面的距离为： $\frac{16}{9}$ m.

故答案为 $\frac{16}{9}$.

点睛：此题主要考查了二次函数的应用，正确利用配方法求出最值是解题的关键.

14. 如图，码头 A 在码头 B 的正东方向，它们之间的距离为 10 海里. 一货船由码头 A 出发，沿北偏东 45° 方向航行到达小岛 C 处，此时测得码头 B 在南偏西 60° 方向，那么码头 A 与小岛 C 的距离是__海里 (结果保留根号).

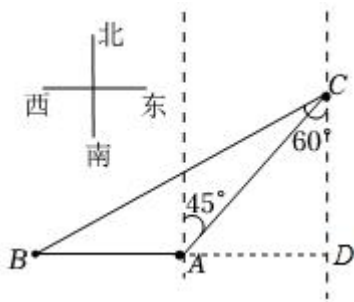


【答案】 $(5\sqrt{6} + 5\sqrt{2})$

【解析】

【分析】过 C 作 $CD \perp BA$ 于 D ，则 $\angle CDB = 90^\circ$ ，根据等角对等边可得 $\triangle ACD$ 是等腰直角三角形，得 $CD = AD$ ， $AC = \sqrt{2}CD$ ，设 $CD = AD = x$ 海里，则 $AC = \sqrt{2}x$ 海里，再由锐角三角函数得 $BD = \sqrt{3}CD = \sqrt{3}x$ ，结合图形得 $BD = AD + AB$ ， $\sqrt{3}x = x + 10$ ，求解即可解决.

【详解】解：过 C 作 $CD \perp BA$ 于 D ，则 $\angle CDB = 90^\circ$ ，



由题意得： $\angle BCD = 60^\circ$ ， $\angle CAD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle ACD$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore CD = AD, \quad AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{2}CD,$$

设 $CD = AD = x$ 海里，则 $AC = \sqrt{2}x$ 海里，

在 $Rt\triangle BCD$ 中，

$$\tan \angle BCD = \frac{BD}{CD} = \tan 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$\therefore BD = \sqrt{3}CD = \sqrt{3}x \quad (\text{海里}),$$

$$\therefore BD = AD + AB,$$

$$\therefore \sqrt{3}x = x + 10,$$

$$\text{解得： } x = 5\sqrt{3} + 5,$$

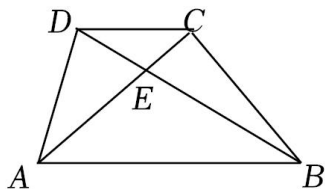
$$\therefore \sqrt{2}x = \sqrt{2} \times (5\sqrt{3} + 5) = 5\sqrt{6} + 5\sqrt{2},$$

$$\text{即 } AC = (5\sqrt{6} + 5\sqrt{2}) \text{ 海里},$$

故答案为： $5\sqrt{6} + 5\sqrt{2}$.

【点睛】 题目主要考查等腰三角形的判定和性质，锐角三角函数、勾股定理解三角形等，理解题意，熟练运用三角函数解三角形是解题关键.

15. 如图，已知在梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AB = 2CD$ ， 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ， 那么 $\overrightarrow{AE}$ 可以用 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 表示为__.



【答案】 $\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}$

【解析】

【分析】 由 $AB \parallel CD$ ， 即可证得 $\triangle PCD \sim \triangle PAB$ ， 又由 $AB = 2CD$ ， 即可求得 $\overrightarrow{BE}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 的关系， 利用三角形

法则，求得 $\overrightarrow{BD}$ ，即可求得 $\overrightarrow{AE}$ 。

【详解】解：∵ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$,

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}.$$

$$\because AB \parallel CD, AB = 2CD,$$

$$\therefore \triangle ECD \sim \triangle EAB,$$

$$\therefore \frac{CD}{AB} = \frac{DE}{BE} = \frac{1}{2},$$

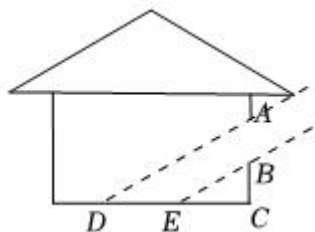
$$\therefore \overrightarrow{BE} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}),$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}.$$

故答案为： $\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}$ 。

【点睛】此题考查向量的知识与相似三角形的判定与性质。解题的关键是数形结合思想的应用，还要注意向量是有方向的。

16. 如图，某时刻阳光通过窗口 AB 照射到室内，在地面上留下 4 米宽的“亮区” DE ，光线与地面所成的角（如 $\angle BEC$ ）的正切值是 $\frac{1}{2}$ ，那么窗口的高 AB 等于___米。



【答案】2

【解析】

【分析】由题意知 $CE = 2BC$, $CD = 2AC$, 进而得到 $CD = DE + CE = 4 + 2BC$, 由 $BE \parallel AD$ 得到 $\triangle BCE \sim \triangle ACD$, 根据相似三角形的性质得到 $\frac{BC}{BC + AB} = \frac{2BC}{4 + 2BC} = \frac{BC}{2 + BC}$, 化简即可求出 AB .

【详解】解：由题意知 $\tan \angle BEC = \frac{BC}{CE} = \frac{AC}{CD} = \frac{1}{2}$, $DE = 4$,

$$\therefore CE = 2BC, CD = 2AC,$$

$$\therefore CD = DE + CE = 4 + 2BC,$$

$$\because AD \parallel BE,$$

$$\therefore \triangle BCE \sim \triangle ACD,$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{CE}{CD},$$

$$\therefore \frac{BC}{BC+AB} = \frac{2BC}{4+2BC} = \frac{BC}{2+BC},$$

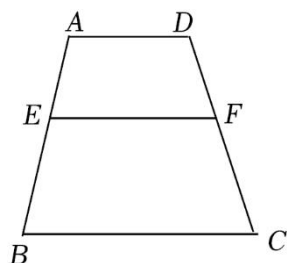
$$\therefore BC+AB = 2+BC,$$

$$\therefore AB = 2,$$

故答案为：2.

【点睛】 本题考查的是相似三角形的应用，熟知相似三角形的对应边成比例是解答此题的关键.

17. 我们知道：四个角对应相等，四条边对应成比例的两个四边形是相似四边形. 如图，已知梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD=1$ ， $BC=2$ ， E 、 F 分别是边 AB 、 CD 上的点，且 $EF \parallel BC$ ，如果四边 $AEFD$ 与四边形 $EBCF$ 相似，那么 $\frac{AE}{EB}$ 的值是_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】 根据相似多边形的性质得出 $\frac{AD}{EF} = \frac{EF}{BC}$ ，把 $AD=1$ 和 $BC=2$ 代入求出 EF ，再根据相似多边形的性质得出 $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{EF}$ ，再求出答案即可.

【详解】 解： $\because$ 四边 $AEFD$ 与四边形 $EBCF$ 相似，

$$\therefore \frac{AD}{EF} = \frac{EF}{BC},$$

$$\because AD=1, BC=2,$$

$$\therefore \frac{1}{EF} = \frac{EF}{2},$$

$$\text{解得： } EF = \sqrt{2},$$

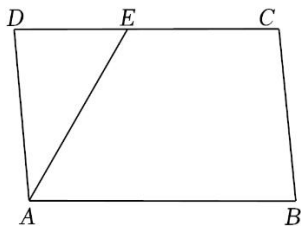
$\because$ 四边 $AEFD$ 与四边形 $EBCF$ 相似，

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{EF} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

故答案为: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【点睛】 本题考查了梯形和相似多边形的性质, 能根据相似多边形的性质得出比例式是解此题的关键.

18. 如图, 已知矩形 $ABCD$ 中, $AD=3$, $AB=5$, E 是边 DC 上一点, 将 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针旋转得到 $\triangle AD'E'$, 使得点 D 的对应点 D' 落在 AE 上, 如果 $D'E'$ 的延长线恰好经过点 B , 那么 DE 的长度等于_____.



【答案】 $\frac{9}{4}$

【解析】

【分析】 如图, 连接 BE 、 BE' , 根据矩形的性质和旋转变换的性质可得: $AD'=AD=3$, $\angle AD'E = \angle D = 90^\circ$, 利用勾股定理可得 $BD'=4$, 再运用等面积法可得: $AB \cdot AD = AE \cdot BD'$, 求出 $AE = \frac{15}{4}$, 再运用勾股定理即可求得答案.

【详解】 解: 如图, 连接 BE 、 BE' ,

$\because$ 矩形 $ABCD$ 中, $AD=3$, $AB=5$,

$\therefore \angle D = 90^\circ$,

由旋转知, $\triangle AD'E' \cong \triangle ADE$,

$\therefore AD' = AD = 3$, $\angle AD'E = \angle D = 90^\circ$,

$\because D'E'$ 的延长线恰好经过点 B ,

$\therefore \angle AD'B = 90^\circ$,

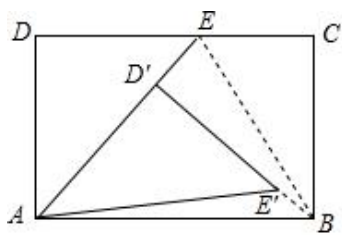
在 $Rt\triangle ABD'$ 中, $BD' = \sqrt{AB^2 - AD'^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$,

$\because S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} AE \cdot BD'$,

$\therefore AE = \frac{AB \cdot AD}{BD'} = \frac{5 \times 3}{4} = \frac{15}{4}$,

在 $Rt\triangle ADE$ 中, $DE = \sqrt{AE^2 - AD^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 - 3^2} = \frac{9}{4}$,

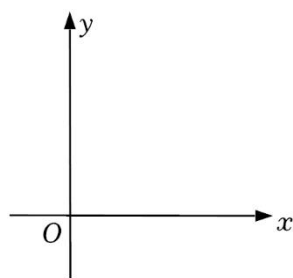
故答案为: $\frac{9}{4}$.



【点睛】 本题考查矩形的性质、旋转性质、勾股定理、三角形的面积，熟练掌握矩形性质和旋转性质，会利用等面积法求解是解答的关键.

三、解答题

19. 已知一个二次函数图象的顶点为(1, 0)，与 y 轴的交点为(0, 1).



(1) 求这个二次函数的解析式；

(2) 在所给的平面直角坐标系 xOy 中，画出这个二次函数的图象.

【答案】 (1) $y = (x-1)^2$

(2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 设抛物线解析式为 $y = a(x-1)^2$ ，将 (0,1) 代入解析式求解；

(2) 根据二次函数解析式作图即可.

【小问 1 详解】

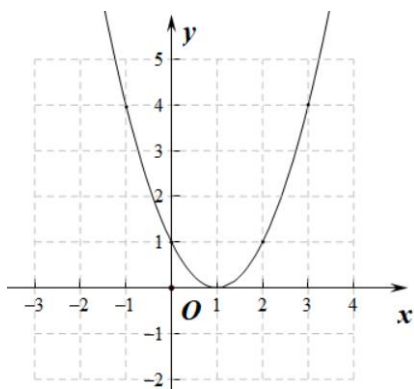
设抛物线解析式为 $y = a(x-1)^2$ ，

将 (0,1) 代入 $y = a(x-1)^2$ 得： $a = 1$ ，

$\therefore y = (x-1)^2$ ；

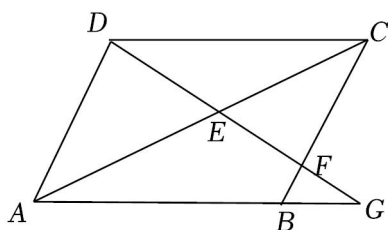
【小问 2 详解】

二次函数图像如下图所示：



【点睛】 本题考查二次函数的图像以及用待定系数法求二次函数，掌握顶点式的形式是解题的关键.

20. 如图，已知平行四边形 $ABCD$ 中， G 是 AB 延长线上一点，联结 DG ，分别交 AC 、 BC 于点 E 、 F ，且 $AE: EC = 3: 2$.



(1) 如果 $AB = 10$ ，求 BG 的长；

(2) 求 $\frac{EF}{FG}$ 的值.

【答案】 (1) 5 (2) $\frac{4}{5}$

【解析】

【分析】 (1) 根据题意由平行四边形的性质证明 $\triangle AGE \sim \triangle CDE$ ，再根据 $AE: EC = 3: 2$ 求出 $AG = 15$ ，从而得出结论；

(2) 由题意利用 $\triangle ADE \sim \triangle CFE$ 和 $\triangle AGE \sim \triangle CDE$ 得出 $\frac{DE}{EF} = \frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$ 和 $\frac{DE}{GE} = \frac{EC}{AE} = \frac{2}{3}$ ，从而得出结论.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore \angle GAE = \angle CDE, \angle AGE = \angle CDE$,

$\therefore \triangle AGE \sim \triangle CDE$,

$\therefore \frac{AG}{CD} = \frac{AE}{CE} = \frac{3}{2}$,

又 $\because AB = CD = 10$,

$$\therefore AG = \frac{3}{2} CD = \frac{3}{2} \times 10 = 15,$$

$$\therefore BG = AG - AB = 15 - 10 = 5;$$

【小问2详解】

解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC, \text{ 即 } AD \parallel CF,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle CFE, \quad \angle DAE = \angle FCE,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle CFE,$$

$$\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{AE}{EC} = \frac{3}{2},$$

$$\text{又 } \because \triangle AGE \sim \triangle CDE,$$

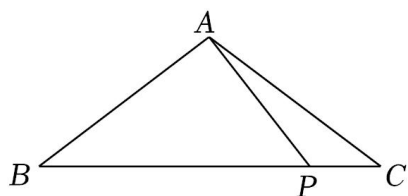
$$\therefore \frac{DE}{GE} = \frac{EC}{AE} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{EF}{GE} = \frac{EF}{DE} \times \frac{DE}{GE} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9},$$

$$\therefore \frac{EF}{FG} = \frac{EF}{GE - EF} = \frac{4}{5}.$$

【点睛】 本题考查平行四边形的性质以及相似三角形的判定与性质，解题的关键是熟练掌握相似三角形的判定与性质的基本知识.

21. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 12$ ， $\cos B = \frac{3}{4}$ ， $AP \perp AB$ ，交 BC 于点 P .



(1) 求 CP 的长；

(2) 求 $\angle PAC$ 的正弦值.

【答案】 (1) 2 (2) $\frac{1}{8}$

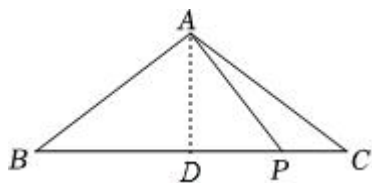
【解析】

【分析】 (1) 通过作底边上的高 AD ，在直角三角形 ABD 和直角三角形 ABP 中分别求出 BD 、 BP ，由等腰三角形的性质求出 BC ，进而求出 PC 的长；

(2) 作高构造直角三角形，求出 AE 、 PE 后，由锐角三角函数的定义进行计算即可.

【小问1详解】

过点 A 作 $AD \perp BC$ 于 D ,



在 $Rt\triangle ABD$ 中, $AB = 12$, $\cos B = \frac{3}{4}$,

$$\therefore BD = \cos B \cdot AB = 9,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore BD = CD = 9, \quad \angle B = \angle C,$$

$$\because AP \perp AB,$$

$$\therefore \angle PAB = 90^\circ,$$

在 $Rt\triangle ABP$ 中, $AB = 12$, $\cos B = \frac{3}{4}$,

$$\therefore BP = \frac{AB}{\cos B} = 16,$$

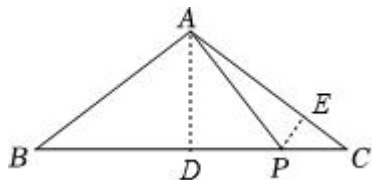
$$\therefore PC = BC - BP$$

$$= 9 \times 2 - 16$$

$$= 2;$$

【小问 2 详解】

过点 P 作 $PE \perp AC$ 于 E ,



在 $Rt\triangle PCE$ 中, $PC = 2$, $\cos C = \cos B = \frac{3}{4}$,

$$\therefore CE = \cos C \cdot PC = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore PE = \sqrt{PC^2 - CE^2} = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

$$AP = \sqrt{AD^2 + DP^2}$$

$$= \sqrt{AB^2 - BD^2 + PD^2}$$

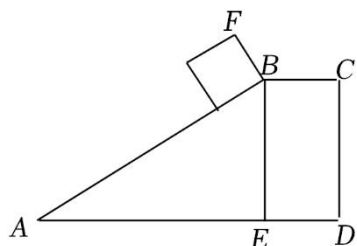
$$= \sqrt{144 - 81 + 49}$$

$$= 4\sqrt{7},$$

$$\therefore \sin \angle PAC = \frac{PE}{AP} = \frac{1}{8}.$$

【点睛】本题考查解直角三角形，等腰三角形，掌握直角三角形的边角关系以及等腰三角形的性质是正确解答的前提.

22. 某货站沿斜坡 AB 将货物传送到平台 BC . 一个正方体木箱沿着斜坡移动，当木箱的底部到达点 B 时的平面示意图如图所示. 已知斜坡 AB 的坡度为 $1:2.4$ ，点 B 到地面的距离 $BE = 1.5$ 米，正方体木箱的棱长 $BF = 0.65$ 米，求点 F 到地面的距离.



【答案】点 F 到地面的距离为 2.1 米

【解析】

【分析】过点 F 作 $FG \perp AD$ 于 G ，延长 CB 交 FG 于 H ，根据坡度的概念、勾股定理求出 BH ，进而求出 FH ，计算即可.

【详解】解：过点 F 作 $FG \perp AD$ 于 G ，延长 CB 交 FG 于 H ，
则四边形 $HGE B$ 为矩形，

$$\therefore HG = BE = 1.5 \text{ 米}, \quad \angle HBE = \angle FHB = 90^\circ,$$

$$\because \angle BEA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BFH + \angle FBH = \angle FBH + \angle HBA = \angle HBA + \angle ABE = \angle A + \angle ABE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BFH = \angle HBA = \angle A,$$

$$\therefore BE : AE = BH : FH = 1 : 2.4,$$

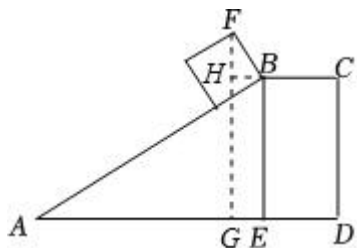
$$\text{由勾股定理得: } BF^2 = BH^2 + FH^2, \text{ 即 } 0.65^2 = BH^2 + (2.4BH)^2,$$

$$\text{解得: } BH = 0.25,$$

$$\therefore FH = 0.25 \times 2.4 = 0.6 \text{ (米)},$$

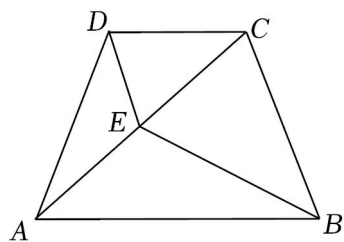
$$\therefore FG = FH + HG = 2.1 \text{ (米)},$$

答：点 F 到地面的距离为 2.1 米.



【点睛】本题考查了解直角三角形的应用—坡度坡角问题，掌握坡度的概念、熟记锐角三角函数的定义是解题的关键.

23. 已知: 如图, 梯形 $ABCD$ 中, $DC \parallel AB$, $AC = AB$, 过点 D 作 BC 的平行线交 AC 于点 E .



(1) 如果 $\angle DEC = \angle BEC$, 求证: $CE^2 = ED \cdot CB$;

(2) 如果 $AD^2 = AE \cdot AC$, 求证: $AD = BC$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 通过证明 $\triangle DEC \sim \triangle CEB$, 可得 $\frac{CE}{DE} = \frac{BE}{CE}$, 可得结论;

(2) 通过证明 $\triangle BCE \sim \triangle ACB$, 可得 $\frac{BC}{AC} = \frac{CE}{BC}$, 由相似三角形的性质可得 $\frac{DE}{CE} = \frac{CE}{BC}$, 可得 $\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{CE}$,

通过证明 $\triangle ADE \sim \triangle ACD$, 可得 $\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CD} = \frac{DE}{CE}$, 可得结论.

【小问 1 详解】

证明: (1) $\because AC = AB$,

$$\therefore \angle ACB = \angle ABC,$$

$$\because DC \parallel AB,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle CAB,$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle BCE,$$

$$\because \angle DEC = \angle BEC,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle BCE = \angle BEC = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle CBE = \angle DCE, \quad BE = BC,$$

$$\therefore \triangle DEC \sim \triangle CEB,$$

$$\therefore \frac{CE}{DE} = \frac{BE}{CE},$$

$$\therefore CE^2 = DE \cdot BE = DE \cdot CB;$$

【小问 2 详解】

证明: (2) $\because \angle BAC = \angle CBE, \quad \angle ACB = \angle BCE$,

$$\therefore \triangle BCE \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{CE}{BC},$$

$$\because \triangle DEC \sim \triangle CEB,$$

$$\therefore \frac{DE}{CE} = \frac{CE}{BC}, \quad \angle CDE = \angle BCE = \angle CED = \angle BEC,$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{CE}, \quad CD = CE,$$

$$\therefore AD^2 = AE \cdot AC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AD},$$

$$\text{又} \because \angle DAE = \angle DAC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACD,$$

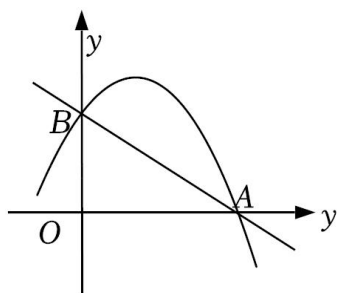
$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CD} = \frac{DE}{CE},$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{BC}{AC},$$

$$\therefore AD = BC.$$

【点睛】 本题考查了相似三角形，解题的关键是掌握相似三角形的判定与性质.

24. 如图，已知直线 $y = -\frac{2}{3}x + 2$ 与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B ，抛物线 $y = -\frac{2}{3}x^2 + bx + c$ 经过 A 、 B 两点.



(1) 求这条抛物线的表达式;

(2) 直线 $x = t$ 与该抛物线交于点 C ，与线段 AB 交于点 D (点 D 与点 A 、 B 不重合)，与 x 轴交于点 E ，联结 AC 、 BC .

①当 $\frac{DE}{CD} = \frac{AE}{OE}$ 时，求 t 的值;

②当 CD 平分 $\angle ACB$ 时，求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】 (1) $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$

(2) ① 2; ② $\frac{5}{4}$

【解析】

【分析】 (1) 先求出点 A ，点 B 坐标，利用待定系数法可求解析式;

(2) ①证明 $\triangle ADE \sim \triangle BDC$, 由相似三角形的性质得出 $\angle DAE = \angle DBC$, 证出 $AE \parallel BC$, 得出 C 点的纵坐标为 2, 则可求出答案;

②设 $C(t, -\frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{3}t + 2)$, 过点 B 作 $BH \perp CE$ 于点 H , 得出 $\tan \angle BCH = \tan \angle ACE$, 则 $\frac{BH}{CH} = \frac{AE}{CE}$, 解方程求出 t 的值, 则可求出答案.

【小问 1 详解】

解: 由 $y = -\frac{2}{3}x + 2$ 可得:

当 $x=0$ 时, $y=2$; 当 $y=0$ 时, $x=3$,

$\therefore A(3, 0), B(0, 2)$,

把 A, B 的坐标代入 $y = -\frac{2}{3}x^2 + bx + c$ 得:

$$\begin{cases} -\frac{2}{3} \times 9 + 3b + c = 0 \\ c = 2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b = \frac{4}{3} \\ c = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为: $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$;

【小问 2 详解】

①如图 1,

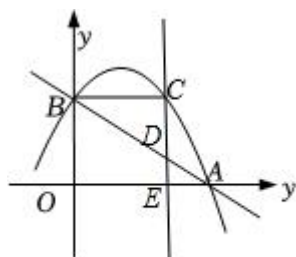


图1

$\because DE \parallel OB$,

$$\therefore \frac{AE}{OE} = \frac{AD}{BD},$$

$$\therefore \frac{AE}{OE} = \frac{DE}{CD},$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{DE}{CD},$$

又 $\because \angle ADE = \angle BDC$,

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle BDC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle DBC,$$

$$\therefore AE \parallel BC,$$

$$\therefore C \text{ 点的纵坐标为 } 2,$$

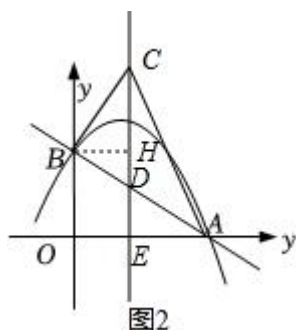
$$\therefore 2 = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2,$$

$$\therefore x=0 \text{ 或 } x=2,$$

$$\therefore C(2, 2),$$

$$\therefore t=2;$$

②如图 2, 设 $C(t, -\frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{3}t + 2),$



过点 B 作 $BH \perp CE$ 于点 H ,

$$\therefore \angle BCH = \angle ACE,$$

$$\therefore \tan \angle BCH = \tan \angle ACE,$$

$$\therefore \frac{BH}{CH} = \frac{AE}{CE},$$

$$\therefore \frac{t}{-\frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{3}t} = \frac{3-t}{-\frac{2}{3}t^2 + \frac{4}{3}t + 2},$$

$$\therefore t = \frac{1}{2},$$

$$\therefore C\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right),$$

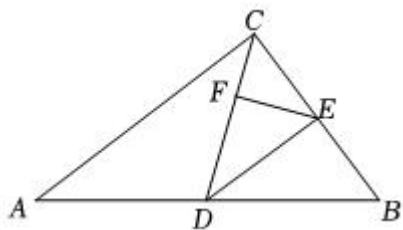
$$\therefore S_{\triangle ACB} = S_{\triangle ACE} + S_{\text{梯形 } BOCE} - S_{\triangle ABO}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \times \left(2 + \frac{5}{2}\right) \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = \frac{5}{4}.$$

【点睛】本题是二次函数综合题，考查了待定系数法求解析式，平行线的判定和性质，相似三角形的判定和性质，二次函数的性质等知识，灵活运用这些性质解决问题是解题的关键.

25. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， $BC = 4$ ， D 是边 AB 上一点（与点 A 、 B 不重合）， DE 平

分 $\angle CDB$ ，交边 BC 于点 E ， $EF \perp CD$ ，垂足为点 F 。



- (1) 当 $DE \perp BC$ 时，求 DE 的长；
- (2) 当 $\triangle CEF$ 与 $\triangle ABC$ 相似时，求 $\angle CDE$ 的正切值；
- (3) 如果 $\triangle BDE$ 的面积是 $\triangle DEF$ 面积的2倍，求这时 AD 的长。

【答案】(1) $\sqrt{5}$

(2) 1 或 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(3) $\frac{11}{3}$

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle DCE \cong \triangle DBE$ (ASA)，可得 $CE = BE = 2$ ，根据 $\frac{DE}{BE} = \tan \angle B = \frac{AC}{BC}$ ，即可求得答案；

(2) 分两种情况：①当 $\triangle CEF \sim \triangle ABC$ 时，可证得 $\angle CDB = 90^\circ$ ，再根据 DE 平分 $\angle CDB$ ，可得 $\angle CDE = 45^\circ$ ，再由特殊角的三角函数值即可求得答案；②当 $\triangle CEF \sim \triangle BAC$ 时，则 $\angle ECF = \angle ABC$ ，得出 $DC = DB$ ，再由 DE 平分 $\angle CDB$ ，可得 $DE \perp BC$ ，推出 $\angle CDE = \angle BAC$ ，利用三角函数定义即可求得答案；

(3) 如图，过点 E 作 $EG \perp AB$ 于点 G ，根据角平分线性质可得出 $EF = EG$ ，推出 $DF = DG$ ，再由 $\triangle BDE$ 的面积是 $\triangle DEF$ 面积的2倍，可得出 $BD = 2DF$ ，进而推出 $DE = BE$ ，设 $BE = x$ ，则 $DE = x$ ， $CE = BC - BE = 4 - x$ ， $BG = BE \cdot \cos B = \frac{2}{3}x$ ， $BD = 2BG = \frac{4}{3}x$ ， $DG = DF = BG = \frac{2}{3}x$ ， $AD = AB - BD = 6 - \frac{4}{3}x$ ，根据

$\triangle CDE \sim \triangle CBD$ ，得出 $\frac{CD}{CB} = \frac{CE}{CD} = \frac{DE}{BD}$ ，建立方程求解即可。

【小问1详解】

在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， $BC = 4$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5},$$

$\therefore DE$ 平分 $\angle CDB$ ，

$\therefore \angle CDE = \angle BDE$ ，

$\therefore DE \perp BC$ ，

$\therefore \angle DEC = \angle DEB = 90^\circ$ ，

在 $\triangle DCE$ 和 $\triangle DBE$ 中，

$$\begin{cases} \angle CDE = \angle BDE \\ DE = DE \\ \angle DEC = \angle DEB \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DCE \cong \triangle DBE \quad (ASA),$$

$$\therefore CE = BE,$$

$$\therefore CE + BE = BC = 4,$$

$$\therefore CE = BE = 2,$$

$$\therefore \frac{DE}{BE} = \tan \angle B = \frac{AC}{BC},$$

$$\therefore \frac{DE}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{4},$$

$$\therefore DE = \sqrt{5};$$

【小问 2 详解】

$$\therefore EF \perp CD,$$

$$\therefore \angle CFE = 90^\circ = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle CEF \text{ 与 } \triangle ABC \text{ 相似},$$

$$\therefore \triangle CEF \sim \triangle ABC \text{ 或 } \triangle CEF \sim \triangle BAC,$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \triangle CEF \sim \triangle ABC \text{ 时},$$

$$\text{则 } \angle ECF = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ECF + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDB = 90^\circ,$$

$$\therefore DE \text{ 平分 } \angle CDB,$$

$$\therefore \angle CDE = \frac{1}{2} \angle CDB = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle CDE = \tan 45^\circ = 1;$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \triangle CEF \sim \triangle BAC \text{ 时},$$

$$\text{则 } \angle ECF = \angle ABC,$$

$$\therefore DC = DB,$$

$$\therefore DE \text{ 平分 } \angle CDB,$$

$$\therefore DE \perp BC,$$

$$\therefore \angle CDE + \angle ECF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle ABC = 90^\circ,$$

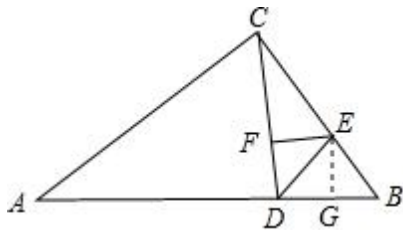
$$\therefore \angle CDE = \angle BAC,$$

$$\therefore \tan \angle CDE = \tan \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

综上所述, $\angle CDE$ 的正切值为 1 或 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$;

【小问 3 详解】

如图, 过点 E 作 $EG \perp AB$ 于点 G ,



$$\because DE \text{ 平分 } \angle CDB, EF \perp CD, EG \perp AB,$$

$$\therefore EF = EG,$$

$$\because DE = DE,$$

$$\therefore Rt\triangle DEF \cong Rt\triangle DEG \text{ (HL)},$$

$$\therefore DF = DG,$$

$$\because \triangle BDE \text{ 的面积是 } \triangle DEF \text{ 面积的 2 倍},$$

$$\therefore BD = 2DF,$$

$$\therefore DG = BG,$$

$$\because EG \perp BD,$$

$$\therefore DE = BE,$$

$$\text{设 } BE = x, \text{ 则 } DE = x, CE = BC - BE = 4 - x, BG = BE \cdot \cos B = \frac{2}{3}x,$$

$$\therefore BD = 2BG = \frac{4}{3}x, DG = DF = BG = \frac{2}{3}x,$$

$$\therefore AD = AB - BD = 6 - \frac{4}{3}x,$$

$$\because DE \text{ 平分 } \angle CDB,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle BDE,$$

$$\because DE = BE,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle B,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle B,$$

$$\because \angle DCE = \angle BCD,$$

$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle CBD,$$

$$\therefore \frac{CD}{CB} = \frac{CE}{CD} = \frac{DE}{BD}, \text{ 即 } \frac{CD}{4} = \frac{4-x}{CD} = \frac{x}{\frac{4}{3}x},$$

$$\text{解得: } CD=3, \quad x=\frac{7}{4},$$

$$\therefore AD = 6 - \frac{4}{3}x = 6 - \frac{4}{3} \times \frac{7}{4} = \frac{11}{3},$$

$$\text{故这时 } AD \text{ 的长为 } \frac{11}{3}.$$

【点睛】 本题是几何综合题，考查了直角三角形性质，勾股定理，全等三角形判定和性质，相似三角形的判定和性质，角平分线性质，三角形面积，三角函数等知识，解题关键是熟练掌握相似三角形的判定和性质等相关知识，运用分类讨论思想和方程思想解决问题.