

上海市 2021 年中考数学试题

一、选择题

1. 下列实数中，有理数是（ ）

A. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

B. $\sqrt{\frac{1}{3}}$

C. $\sqrt{\frac{1}{4}}$

D. $\sqrt{\frac{1}{5}}$

【答案】C

【解析】

【分析】先化简二次根式，再根据有理数的定义选择即可

【详解】解：

A、 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\because \sqrt{2}$ 是无理数，故 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 是无理数

B、 $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\because \sqrt{3}$ 是无理数，故 $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 是无理数

C、 $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ 为有理数

D、 $\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ $\because \sqrt{5}$ 是无理数，故 $\sqrt{\frac{1}{5}}$ 是无理数

故选：C

【点睛】本题考查二次根式的化简、无理数的定义、有理数的定义、熟练掌握有理数的定义是关键

2. 下列单项式中， a^2b^3 的同类项是（ ）

A. a^3b^2

B. $2a^2b^3$

C. a^2b

D. ab^3

【答案】B

【解析】

【分析】比较对应字母的指数,分别相等就是同类项

【详解】 $\because a$ 的指数是 3, b 的指数是 2, 与 a^2b^3 中 a 的指数是 2, b 的指数是 3 不一致,

$\therefore a^3b^2$ 不是 a^2b^3 的同类项, 不符合题意;

$\because a$ 的指数是 2, b 的指数是 3, 与 a^2b^3 中 a 的指数是 2, b 的指数是 3 一致,

$\therefore 2a^2b^3$ 是 a^2b^3 的同类项, 符合题意;

$\therefore a$ 的指数是 2, b 的指数是 1, 与 a^2b^3 中 a 的指数是 2, b 的指数是 3 不一致,

$\therefore a^2b$ 不是 a^2b^3 的同类项, 不符合题意;

$\therefore a$ 的指数是 1, b 的指数是 3, 与 a^2b^3 中 a 的指数是 2, b 的指数是 3 不一致,

$\therefore ab^3$ 不是 a^2b^3 的同类项, 不符合题意;

故选 B

【点睛】 本题考查了同类项, 正确理解同类项的定义是解题的关键.

3. 将抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 向下平移两个单位, 以下说法错误的是 ()

A. 开口方向不变 B. 对称轴不变 C. y 随 x 的变化情况不变 D. 与 y 轴的交点不变

【答案】 D

【解析】

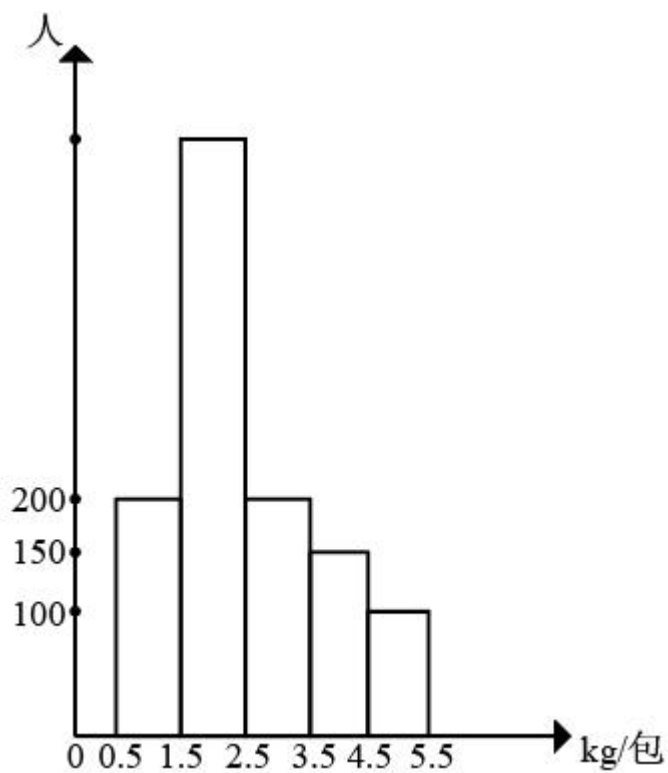
【分析】 根据二次函数的平移特点即可求解.

【详解】 将抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 向下平移两个单位, 开口方向不变、对称轴不变、故 y 随 x 的变化情况不变; 与 y 轴的交点改变

故选 D.

【点睛】 此题主要考查二次函数的函数与图象, 解题的关键是熟知二次函数图象平移的特点.

4. 商店准备一种包装袋来包装大米, 经市场调查以后, 做出如下统计图, 请问选择什么样的包装最合适 ()



- A. 2kg /包 B. 3kg /包 C. 4kg /包 D. 5kg /包

【答案】 A

【解析】

【分析】 选择人数最多的包装是最合适的.

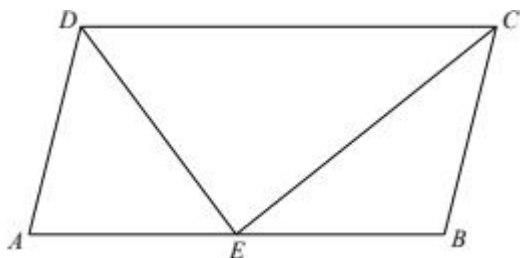
【详解】 由图可知，选择 1.5kg/包-2.5kg/包的范围内的人数最多，

∴选择在 1.5kg/包-2.5kg/包的范围内的包装最合适.

故选： A.

【点睛】 本题较简单，从图中找到选择人数最多的包装的范围，再逐项分析即可.

5. 如图，已知平行四边形 $ABCD$ 中， $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, E 为 AB 中点，求 $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} =$ ()



- A. $\overrightarrow{EC}$ B. $\overrightarrow{CE}$ C. $\overrightarrow{ED}$ D. $\overrightarrow{DE}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据向量的特点及加减法则即可求解.

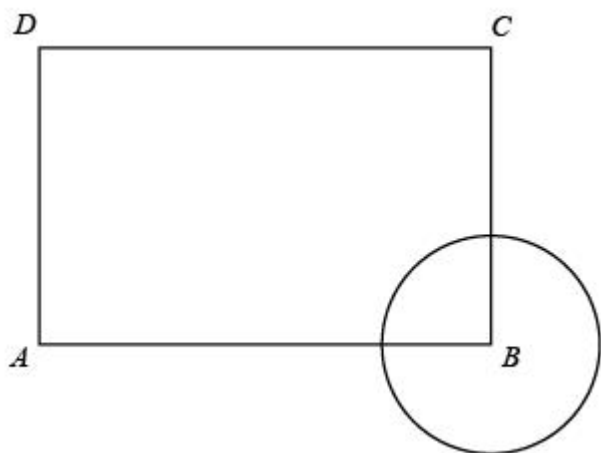
【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, E 为 AB 中点,

$$\therefore \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EC}$$

故选 A.

【点睛】此题主要考查向量的表示, 解题的关键是熟知平行四边形的特点及向量的加减法则.

6. 如图, 已知长方形 $ABCD$ 中, $AB = 4, AD = 3$, 圆 B 的半径为 1, 圆 A 与圆 B 内切, 则点 C, D 与圆 A 的位置关系是 ()



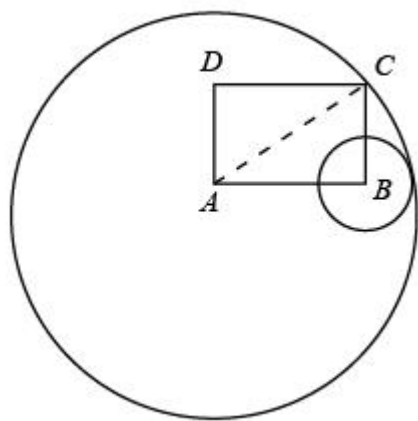
- A. 点 C 在圆 A 外, 点 D 在圆 A 内 B. 点 C 在圆 A 外, 点 D 在圆 A 外
C. 点 C 在圆 A 上, 点 D 在圆 A 内 D. 点 C 在圆 A 内, 点 D 在圆 A 外

【答案】C

【解析】

【分析】根据内切得出圆 A 的半径, 再判断点 D 、点 E 到圆心的距离即可

【详解】



$\because$ 圆 A 与圆 B 内切, $AB = 4$, 圆 B 的半径为 1

$\therefore$ 圆 A 的半径为 5

$\because AD = 3 < 5$

$\therefore$ 点 D 在圆 A 内

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$\therefore$ 点 C 在圆 A 上

故选: C

【点睛】 本题考查点与圆的位置关系、圆与圆的位置关系、勾股定理, 熟练掌握点与圆的位置关系是关键

二、填空题

7. 计算: $x^7 \div x^2 =$ _____.

【答案】 x^5

【解析】

【分析】 根据同底数幂的除法法则计算即可

【详解】 $\because x^7 \div x^2 = x^5$,

故答案为: x^5 .

【点睛】 本题考查了同底数幂的除法, 熟练掌握运算的法则是解题的关键.

8. 已知 $f(x) = \frac{6}{x}$, 那么 $f(\sqrt{3}) =$ _____.

【答案】 $2\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】直接利用已知的公式将 x 的值代入求出答案.

【详解】解: $\because f(x) = \frac{6}{x}$,

$$\therefore f(\sqrt{3}) = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3},$$

故答案为: $2\sqrt{3}$.

【点睛】本题主要考查了函数值, 正确把已知代入是解题关键.

9. 已知 $\sqrt{x+4} = 3$, 则 $x =$ _____.

【答案】5

【解析】

【分析】方程两边同平方, 化为一元一次方程, 进而即可求解.

【详解】解: $\sqrt{x+4} = 3$,

两边同平方, 得 $x+4 = 9$,

解得: $x=5$,

经检验, $x=5$ 是方程的解,

$\therefore x=5$,

故答案是: 5.

【点睛】本题主要考查解根式方程, 把根式方程化为整式方程, 是解题的关键.

10. 不等式 $2x-12 < 0$ 的解集是_____.

【答案】 $x < 6$

【解析】

【分析】根据不等式的性质即可求解.

【详解】 $2x-12 < 0$

$$2x < 12$$

$$x < 6$$

故答案为: $x < 6$.

【点睛】此题主要考查不等式的求解, 解题的关键是熟知不等式的性质.

11. 70° 的余角是_____.

【答案】 20°

【解析】

【分析】根据余角的定义即可求解.

【详解】 70° 的余角是 $90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$

故答案为: 20° .

【点睛】此题主要考查余角的求解, 解题的关键是熟知余角的定义与性质.

12. 若一元二次方程 $2x^2 - 3x + c = 0$ 无解, 则 c 的取值范围为_____.

【答案】 $c > \frac{9}{8}$

【解析】

【分析】根据一元二次方程根的判别式的意义得到 $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2c < 0$, 然后求出 c 的取值范围.

【详解】解: 关于 x 的一元二次方程 $2x^2 - 3x + c = 0$ 无解,

$$\therefore a = 2, \quad b = -3, \quad c = c,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2c < 0,$$

$$\text{解得 } c > \frac{9}{8},$$

$$\therefore c \text{ 的取值范围是 } c > \frac{9}{8}.$$

$$\text{故答案为: } c > \frac{9}{8}.$$

【点睛】本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$: 当 $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$, 方程没有实数根.

13. 有数据 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 从这些数据中取一个数据, 得到偶数的概率为_____.

【答案】 $\frac{3}{8}$

【解析】

【分析】根据概率公式计算即可

【详解】根据概率公式, 得偶数的概率为 $\frac{3}{8}$,

$$\text{故答案为: } \frac{3}{8}.$$

【点睛】本题考查了概率计算, 熟练掌握概率计算公式是解题的关键.

14. 已知函数 $y = kx$ 经过二、四象限, 且函数不经过 $(-1, 1)$, 请写出一个符合条件的函数解析式_____.

【答案】 $y = -2x$ ($k < 0$ 且 $k \neq -1$ 即可)

【解析】

【分析】正比例函数经过二、四象限，得到 $k < 0$ ，又不经过 $(-1, 1)$ ，得到 $k \neq -1$ ，由此即可求解.

【详解】解：∵ 正比例函数 $y = kx$ 经过二、四象限，

∴ $k < 0$,

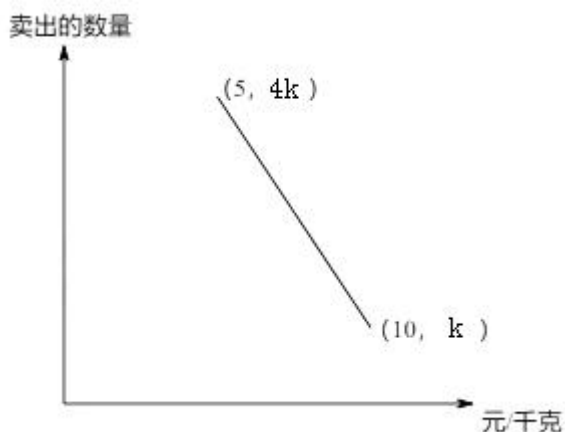
当 $y = kx$ 经过 $(-1, 1)$ 时， $k = -1$,

由题意函数不经过 $(-1, 1)$ ，说明 $k \neq -1$,

故可以写的函数解析式为： $y = -2x$ (本题答案不唯一，只要 $k < 0$ 且 $k \neq -1$ 即可).

【点睛】本题考查了正比例函数的图像和性质，属于基础题， $y = kx$ ($k \neq 0$) 当 $k < 0$ 时经过第二、四象限；当 $k > 0$ 时经过第一、三象限.

15. 某人购进一批苹果到集贸市场零售，已知卖出的苹果数量与售价之间的关系如图所示，成本为 5 元/千克，现以 8 元/千克卖出，赚_____元.



【答案】 $\frac{33k}{5}$

【解析】

【分析】利用待定系数法求出函数关系式，求出当售价为 8 元/千克时的卖出的苹果数量. 再利用利润 = (售价 - 进价) × 销售量，求出利润.

【详解】设卖出的苹果数量与售价之间的关系式为 $y = mx + n$ ($5 \leq x \leq 10$)，将 $(5, 4k)$ ， $(10, k)$ 代入关系式：

$$\begin{cases} 5m + n = 4k \\ 10m + n = k \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} m = -\frac{3}{5}k \\ n = 7k \end{cases}$$

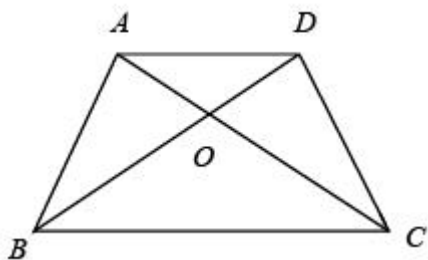
$$\therefore y = -\frac{3}{5}kx + 7k \quad (5 \leq x \leq 10)$$

令 $x=8$, 则 $y=\frac{11}{5}k$

$\therefore \text{利润}=(8-5)\times\frac{11}{5}k=\frac{33}{5}k$

【点睛】 本题考查待定系数法求函数解析式和利润求解问题. 利润= (售价-进价) $\times$ 销售量.

16. 如图, 已知 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{1}{2}$, 则 $\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle BCD}}=$ _____.



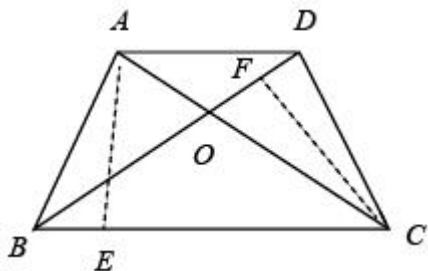
【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 先根据等高的两个三角形的面积比等于边长比, 得出 $\frac{AD}{BC}=\frac{1}{2}$, 再根据 $\triangle AOD \sim \triangle COB$ 得出

$\frac{OD}{OB}=\frac{AD}{BC}=\frac{1}{2}$, 再根据等高的两个三角形的面积比等于边长比计算即可

【详解】 解: 作 $AE \perp BC$, $CF \perp BD$



$\therefore \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{1}{2}$

$\therefore \triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 等高, 高均为 AE

$\therefore \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{\frac{1}{2}AD \cdot AE}{\frac{1}{2}BC \cdot AE}=\frac{AD}{BC}=\frac{1}{2}$

$\therefore AD \parallel BC$

$$\therefore \triangle AOD \sim \triangle COB$$

$$\therefore \frac{OD}{OB} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \triangle BOC$ 和 $\triangle DOC$ 等高，高均为 CF

$$\therefore \frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle DOC}} = \frac{\frac{1}{2}OB \cdot CF}{\frac{1}{2}OD \cdot CF} = \frac{OB}{OD} = \frac{2}{1}$$

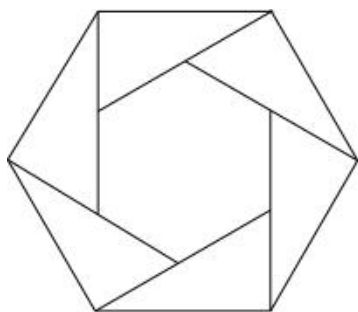
$$\therefore \frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{2}{3}$$

故答案为: $\frac{2}{3}$

【点睛】本题考查相似三角形的判定和性质、等高的两个三角形的面积比等于边长比，熟练掌握三角形的面积的特点是解题的关键

17. 六个带 30° 角的直角三角板拼成一个正六边形，直角三角板的最短边为 1，求中间正六边形的面积

-----.

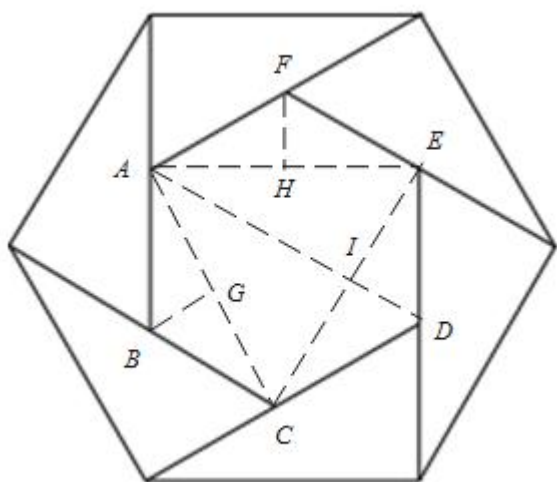


【答案】 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

【解析】

【分析】由六个带 30° 角的直角三角板拼成一个正六边形，直角三角板的最短边为 1，可以得到中间正六边形的边长为 1，做辅助线以后，得到 $\triangle ABC$ 、 $\triangle CDE$ 、 $\triangle AEF$ 为以 1 为边长的等腰三角形， $\triangle ACE$ 为等边三角形，再根据等腰三角形与等边三角形的性质求出边长，求出面积之和即可.

【详解】解：如图所示，连接 AC 、 AE 、 CE ，作 $BG \perp AC$ 、 $DI \perp CE$ 、 $FH \perp AE$ ， $AI \perp CE$ ，



在正六边形 $ABCDEF$ 中,

$\therefore$ 直角三角板的最短边为 1,

$\therefore$ 正六边形 $ABCDEF$ 为 1,

$\therefore \triangle ABC$ 、 $\triangle CDE$ 、 $\triangle EFA$ 为以 1 为边长的等腰三角形, $\triangle ACE$ 为等边三角形,

$\therefore \angle ABC = \angle CDE = \angle EFA = 120^\circ$, $AB = BC = CD = DE = EF = FA = 1$,

$\therefore \angle BAG = \angle BCG = \angle DCE = \angle DEC = \angle FAE = \angle FEA = 30^\circ$,

$\therefore BG = DI = FH = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 由勾股定理得: $AG = CG = CI = EI = EH = AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore AC = AE = CE = \sqrt{3}$,

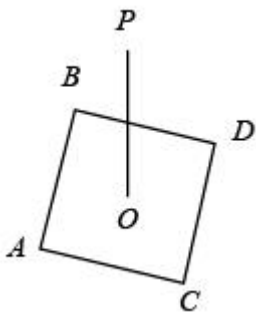
$\therefore$ 由勾股定理得: $AI = \frac{3}{2}$,

$\therefore S = 3 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

故答案为: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

【点睛】本题主要考查了含 30° 度角的直角三角形的性质、正多边形形与圆以及等边三角形的性质, 关键在于知识点: 在直角三角形中, 30° 度角所对的直角边等于斜边的一半的应用.

18. 定义: 在平面内, 一个点到图形的距离是这个点到这个图上所有点的最短距离, 在平面内有一个正方形, 边长为 2, 中心为 O , 在正方形外有一点 P , $OP = 2$, 当正方形绕着点 O 旋转时, 则点 P 到正方形的最短距离 d 的取值范围为_____.



【答案】 $2-\sqrt{2} \leq d \leq 1$

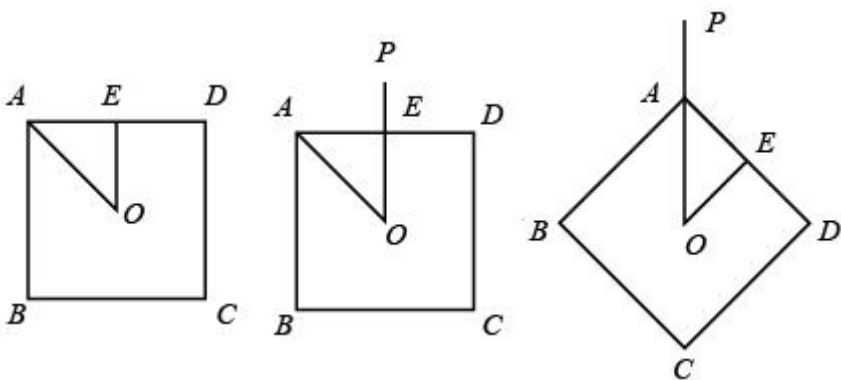
【解析】

【分析】 先确定正方形的中心 O 与各边的所有点的连线中的最大值与最小值，然后结合旋转的条件即可求解。

【详解】 解：如图 1，设 AD 的中点为 E ，连接 OA ， OE ，则 $AE=OE=1$ ， $\angle AEO=90^\circ$ ， $OA=\sqrt{2}$ 。

$\therefore$ 点 O 与正方形 $ABCD$ 边上的所有点的连线中，

OE 最小，等于 1， OA 最大，等于 $\sqrt{2}$ 。



$\therefore OP=2$ ，

$\therefore$ 点 P 与正方形 $ABCD$ 边上的所有点的连线中，

如图 2 所示，当点 E 落在 OP 上时，最大值 $PE=PO-EO=2-1=1$ ；

如图 3 所示，当点 A 落在 OP 上时，最小值 $PA=PO-AO=2-\sqrt{2}$ 。

$\therefore$ 当正方形 $ABCD$ 绕中心 O 旋转时，点 P 到正方形的距离 d 的取值范围是 $2-\sqrt{2} \leq d \leq 1$ 。

故答案为： $2-\sqrt{2} \leq d \leq 1$

【点睛】 本题考查了新定义、正方形的性质、勾股定理等知识点，准确理解新定义的含义和熟知正方形的性质是解题的关键。

三、解答题

19. 计算: $9^{\frac{1}{2}} + |1 - \sqrt{2}| - 2^{-1} \times \sqrt{8}$

【答案】2

【解析】

【分析】根据分指数运算法则，绝对值化简，负整指数运算法则，化最简二次根式，合并同类二次根式以及同类项即可.

【详解】解: $9^{\frac{1}{2}} + |1 - \sqrt{2}| - 2^{-1} \times \sqrt{8}$,
 $= \sqrt{9} - (1 - \sqrt{2}) - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2}$,
 $= 3 + \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}$,
 $= 2$.

【点睛】本题考查实数混合运算，分指数运算法则，绝对值符号化简，负整指数运算法则，化最简二次根式，合并同类二次根式与同类项，掌握实数混合运算法则与运算顺序，分指数运算法则，绝对值符号化简，负整指数运算法则，化最简二次根式，合并同类二次根式与同类项是解题关键.

20. 解方程组: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 - 4y^2 = 0 \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x = 6 \\ y = -3 \end{cases}$

【解析】

【分析】由第一个方程得到 $x = 3 - y$ ，再代入第二个方程中，解一元二次方程即可求出 y ，再回代第一个方程中即可求出 x .

【详解】解: 由题意: $\begin{cases} x + y = 3 \cdots (1) \\ x^2 - 4y^2 = 0 \cdots (2) \end{cases}$,

由方程(1)得到: $x = 3 - y$ ，再代入方程(2)中:

得到: $(3 - y)^2 - 4y^2 = 0$,

进一步整理为: $3 - y = 2y$ 或 $3 - y = -2y$,

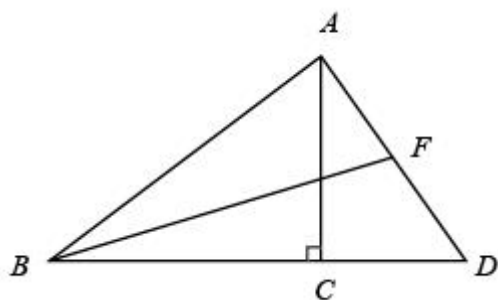
解得 $y_1 = 1$, $y_2 = -3$,

再回代方程(1)中，解得对应的 $x_1 = 2$, $x_2 = 6$,

故方程组的解为: $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=6 \\ y=-3 \end{cases}$.

【点睛】 本题考查了代入消元法解方程及一元二次方程的解法, 熟练掌握代入消元法, 运算过程中细心即可.

21. 已知在 $\triangle ABD$ 中, $AC \perp BD$, $BC = 8$, $CD = 4$, $\cos \angle ABC = \frac{4}{5}$, BF 为 AD 边上的中线.



(1) 求 AC 的长;

(2) 求 $\tan \angle FBD$ 的值.

【答案】 (1) $AC = 6$; (2) $\frac{3}{10}$

【解析】

【分析】 (1) 在 $Rt\triangle ABC$ 中, 利用三角函数即可求出 AB , 故可得到 AC 的长;

(2) 过点 F 作 $FG \perp BD$, 利用中位线的性质得到 FG , CG , 再根据正切的定义即可求解.

【详解】 (1) $\because AC \perp BD$, $\cos \angle ABC = \frac{4}{5}$

$$\therefore \cos \angle ABC = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore AB = 10$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 6;$$

(2) 过点 F 作 $FG \perp BD$,

$\because BF$ 为 AD 边上的中线.

$\therefore F$ 是 AD 中点

$\because FG \perp BD$, $AC \perp BD$

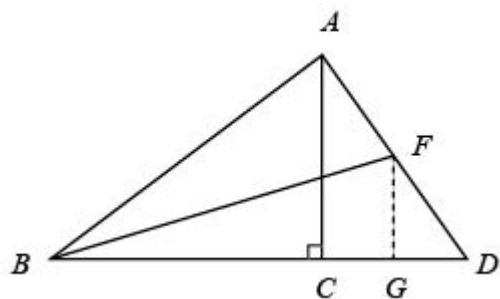
$\therefore FG \parallel AC$

$\therefore FG$ 是 $\triangle ACD$ 的中位线

$$\therefore FG = \frac{1}{2} AC = 3$$

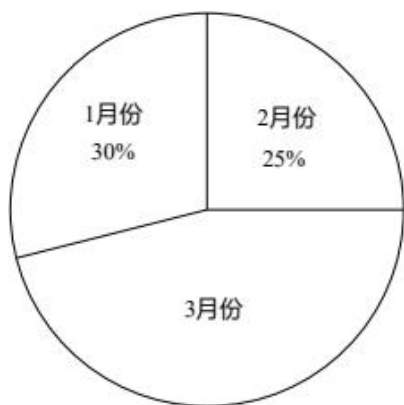
$$CG = \frac{1}{2} CD = 2$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle BFG \text{ 中, } \tan \angle FBD = \frac{FG}{BG} = \frac{3}{8+2} = \frac{3}{10}.$$



【点睛】此题主要考查解直角三角形，解题的关键是熟知三角函数的定义.

22. 现在5G手机非常流行，某公司第一季度总共生产80万部5G手机，三个月生产情况如下图.



(1) 求三月份共生产了多少部手机?

(2) 5G手机速度很快，比4G下载速度每秒多95MB，下载一部1000MB的电影，5G比4G要快190秒，求5G手机的下载速度.

【答案】(1) 36万部；(2) 100MB/秒

【解析】

【分析】(1) 根据扇形统计图求出3月份的百分比，再利用80万 $\times$ 3月份的百分比求出三月份共生产的手机数；

(2) 设5G手机的下载速度为 x MB/秒，则4G下载速度为 $(x-95)$ MB/秒，根据下载一部1000MB的电影，5G比4G要快190秒列方程求解.

【详解】(1) 3月份的百分比 $=1-30\%-25\%=45\%$

三月份共生产的手机数 $=80\times 45\%=36$ (万部)

答：三月份共生产了36万部手机.

(2) 设5G手机的下载速度为 x MB/秒, 则4G下载速度为 $(x-95)$ MB/秒,

由题意可知: $\frac{1000}{x-95} - \frac{1000}{x} = 190$

解得: $x=100$

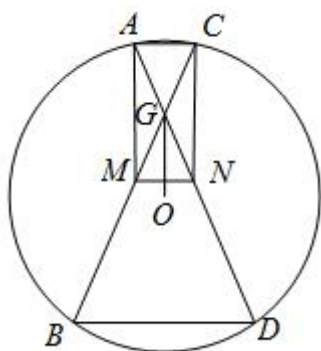
检验: 当 $x=100$ 时, $x \cdot (x-95) \neq 0$

$\therefore x=100$ 是原分式方程的解.

答: 5G手机的下载速度为 100 MB/秒.

【点睛】 本题考查实际问题与分式方程. 求解分式方程时, 需要检验最简公分母是否为 0.

23. 已知: 在圆 O 内, 弦 AD 与弦 BC 交于点 G , $AD=CB$, M, N 分别是 CB 和 AD 的中点, 联结 MN, OG .



(1) 求证: $OG \perp MN$;

(2) 联结 AC, AM, CN , 当 $CN \parallel OG$ 时, 求证: 四边形 $ACNM$ 为矩形.

【答案】 (1) 见解析; (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 连结 OM, ON , 由 M, N 分别是 CB 和 AD 的中点, 可得 $OM \perp BC, ON \perp AD$, 由 $AB=CD$, 可得 $OM=ON$, 可证 $Rt\triangle EOP \cong Rt\triangle FOP$ (HL), $MG=NG$, $\angle MGO = \angle NGO$, 根据等腰三角形三线合一性质 $OG \perp MN$;

(2) 设 OG 交 MN 于 E , 由 $Rt\triangle EOP \cong Rt\triangle FOP$, 可得 $MG=NG$, 可得 $\angle CMN = \angle ANM$, $CM = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}AD = AN$, 可证 $\triangle CMN \cong \triangle ANM$ 可得 $AM=CN$, 由 $CN \parallel OG$, 可得 $\angle AMN = \angle CNM = 90^\circ$, 由 $\angle AMN + \angle CNM = 180^\circ$ 可得 $AM \parallel CN$, 可证 $ACNM$ 是平行四边形, 再由 $\angle AMN = 90^\circ$ 可证四边形 $ACNM$ 是矩形.

【详解】 证明: (1) 连结 OM, ON ,

$\because M, N$ 分别是 CB 和 AD 的中点,

$\therefore OM, ON$ 为弦心距,

$$\therefore OM \perp BC, \quad ON \perp AD,$$

$$\therefore \angle GMO = \angle GNO = 90^\circ,$$

在 $\odot O$ 中, $AB = CD$,

$$\therefore OM = ON,$$

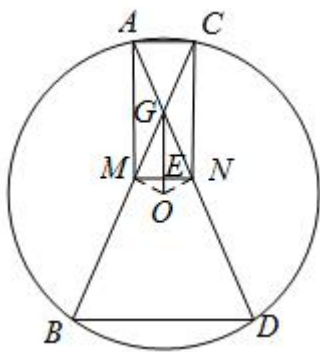
在 $Rt\triangle OMG$ 和 $Rt\triangle ONG$ 中,

$$\begin{cases} OM = ON \\ OG = OG \end{cases},$$

$$\therefore Rt\triangle GOM \cong Rt\triangle GON (HL),$$

$$\therefore MG = NG, \quad \angle MGO = \angle NGO,$$

$$\therefore OG \perp MN;$$



(2) 设 OG 交 MN 于 E ,

$$\therefore Rt\triangle GOM \cong Rt\triangle GON (HL),$$

$$\therefore MG = NG,$$

$$\therefore \angle GMN = \angle GNM, \quad \text{即 } \angle CMN = \angle ANM,$$

$$\therefore CM = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}AD = AN,$$

在 $\triangle CMN$ 和 $\triangle ANM$ 中

$$\begin{cases} CM = AN \\ \angle CMN = \angle ANM \\ MN = NM \end{cases},$$

$$\therefore \triangle CMN \cong \triangle ANM,$$

$$\therefore AM = CN, \angle AMN = \angle CNM,$$

$$\therefore CN \parallel OG,$$

$$\therefore \angle CNM = \angle GEM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AMN = \angle CNM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AMN + \angle CNM = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

$$\therefore AM \parallel CN,$$

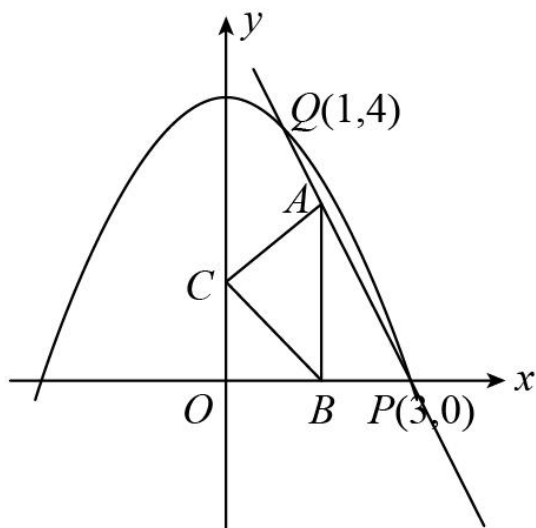
$\therefore ACNM$ 是平行四边形,

$$\because \angle AMN = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ACNM$ 是矩形.

【点睛】 本题考查垂径定理，三角形全等判定与性质，等腰三角形判定与性质，平行线判定与性质，矩形的判定，掌握垂径定理，三角形全等判定与性质，等腰三角形判定与性质，平行线判定与性质，矩形的判定是解题关键.

24. 已知抛物线 $y = ax^2 + c (a \neq 0)$ 过点 $P(3,0), Q(1,4)$.



(1) 求抛物线的解析式;

(2) 点 A 在直线 PQ 上且在第一象限内, 过 A 作 $AB \perp x$ 轴于 B , 以 AB 为斜边在其左侧作等腰直角 ABC .

①若 A 与 Q 重合, 求 C 到抛物线对称轴的距离;

②若 C 落在抛物线上, 求 C 的坐标.

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$; (2) ①1; ②点 C 的坐标是 $\left(-2, \frac{5}{2}\right)$

【解析】

【分析】 (1) 将 $P(3,0)$ 、 $Q(1,4)$ 两点分别代入 $y = ax^2 + c$, 得 $\begin{cases} 9a + c = 0, \\ a + c = 4, \end{cases}$ 解方程组即可;

(2) ①根据 $AB=4$, 斜边上的高为 2, Q 的横坐标为 1, 计算点 C 的横坐标为 -1, 即到 y 轴的距离为 1; ②根据直线 PQ 的解析式, 设点 $A(m, -2m+6)$, 三角形 ABC 是等腰直角三角形, 用含有 m 的代数式表示点 C 的坐

标，代入抛物线解析式求解即可.

【详解】(1) 将 $P(3,0)$ 、 $Q(1,4)$ 两点分别代入 $y = ax^2 + c$ ，得
$$\begin{cases} 9a + c = 0, \\ a + c = 4, \end{cases}$$

解得 $a = -\frac{1}{2}, c = \frac{9}{2}$.

所以抛物线的解析式是 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}$.

(2) ①如图 2，抛物线的对称轴是 y 轴，当点 A 与点 $Q(1,4)$ 重合时， $AB = 4$ ，

作 $CH \perp AB$ 于 H .

$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \triangle CBH$ 和 $\triangle CAH$ 也是等腰直角三角形，

$\therefore CH = AH = BH = 2$ ，

$\therefore$ 点 C 到抛物线的对称轴的距离等于 1.

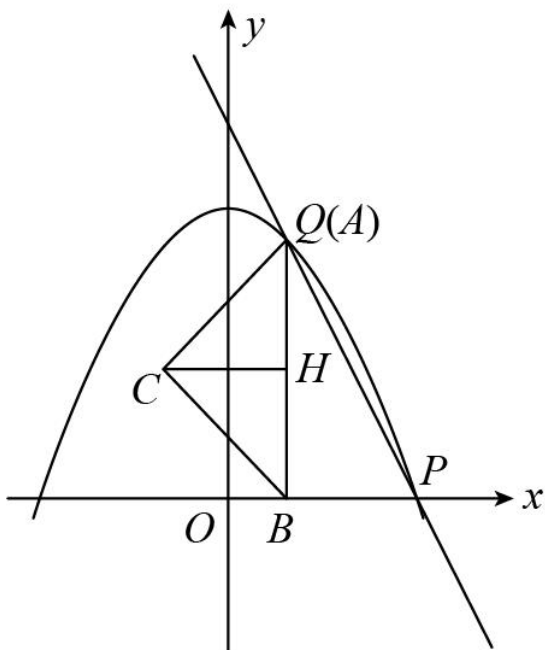


图2

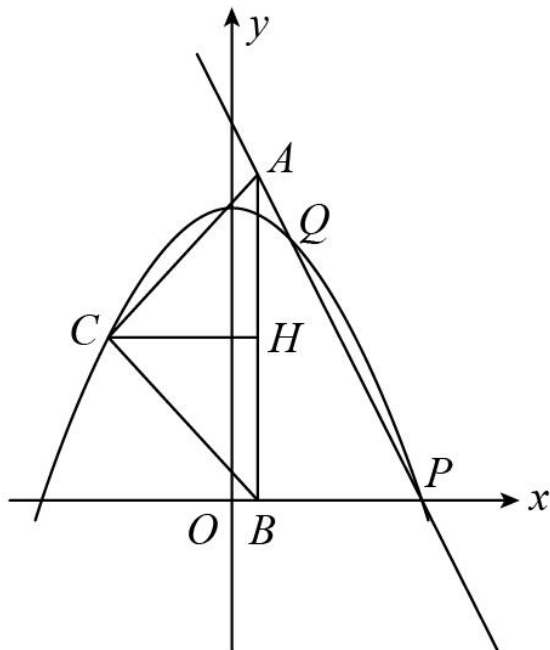


图3

②如图 3，设直线 PQ 的解析式为 $y = kx + b$ ，由 $P(3,0)$ 、 $Q(1,4)$ ，得
$$\begin{cases} 3k + b = 0, \\ k + b = 4, \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} k = -2, \\ b = 6, \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 PQ 的解析式为 $y = -2x + 6$ ，

设 $A(m, -2m+6)$,

$$\therefore AB = -2m+6,$$

$$\text{所以 } CH = BH = AH = -m+3.$$

$$\text{所以 } y_C = -m+3, x_C = -(-m+3-m) = 2m-3.$$

$$\text{将点 } C(2m-3, -m+3) \text{ 代入 } y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2},$$

$$\text{得 } -m+3 = -\frac{1}{2}(2m-3)^2 + \frac{9}{2}.$$

$$\text{整理, 得 } 2m^2 - 7m + 3 = 0.$$

$$\text{因式分解, 得 } (2m-1)(m-3) = 0.$$

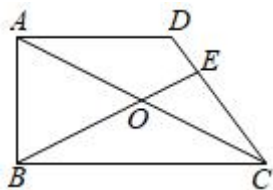
$$\text{解得 } m = \frac{1}{2}, \text{ 或 } m = 3 \text{ (与点 } B \text{ 重合, 舍去).}$$

$$\text{当 } m = \frac{1}{2} \text{ 时, } 2m-3 = 1-3 = -2, -m+3 = -\frac{1}{2}+3 = \frac{5}{2}.$$

$$\text{所以点 } C \text{ 的坐标是 } \left(-2, \frac{5}{2}\right).$$

【点评】 本题考查了抛物线解析式的确定, 一次函数解析式的确定, 等腰直角三角形的性质, 一元二次方程的解法, 熟练掌握待定系数法, 灵活用解析式表示点的坐标, 熟练解一元二次方程是解题的关键.

25. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AD = CD$, O 是对角线 AC 的中点, 联结 BO 并延长交边 CD 或边 AD 于 E .



(1) 当点 E 在边 CD 上时,

①求证: $\triangle DAC \sim \triangle OBC$;

②若 $BE \perp CD$, 求 $\frac{AD}{BC}$ 的值;

(2) 若 $DE = 2, OE = 3$, 求 CD 的长.

【答案】 (1) ①见解析; ② $\frac{2}{3}$; (2) $1 + \sqrt{19}$ 或 $3 + \sqrt{19}$

【解析】

【分析】(1) ①根据已知条件、平行线性质以及直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可推导， $\angle DAC = \angle DCA = \angle OBC = \angle OCB$ ，由此可得 $\triangle DAC \sim \triangle OBC$ ；

②若 $BE \perp CD$ ，那么在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中，由 $\angle 2 = \angle 3 = \angle 4$ ，可得 $\angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 30^\circ$ ，作 $DH \perp BC$ 于 H ，设 $AD = CD = 2m$ ，那么 $BH = AD = 2m$ 。根据 30° 所对直角边是斜边的一半可知 $CH = m$ ，由此可得 $\frac{AD}{BC}$ 的值。

(2) ①当点 E 在 AD 上时，可得四边形 $ABCE$ 是矩形，设 $AD = CD = x$ ，在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 和 $\text{Rt}\triangle DCE$ 中，根据 $CE^2 = CE^2$ ，列方程 $6^2 - (x-2)^2 = x^2 - 2^2$ 求解即可。

②当点 E 在 CD 上时，设 $AD = CD = x$ ，由 $\triangle DAC \sim \triangle OBC$ ，得 $\frac{DC}{OC} = \frac{AC}{BC}$ ，所以 $\frac{x}{m} = \frac{2OC}{BC}$ ，所以

$\frac{OC}{BC} = \frac{x}{2m}$ ；由 $\triangle EOC \sim \triangle ECB$ 得 $\frac{EO}{EC} = \frac{EC}{EB} = \frac{OC}{CB}$ ，所以 $\frac{3}{x-2} = \frac{x-2}{m+3} = \frac{OC}{CB}$ ，解出 x 的值即可。

【详解】(1) ①由 $AD = CD$ ，得 $\angle 1 = \angle 2$ 。

由 $AD \parallel BC$ ，得 $\angle 1 = \angle 3$ 。

因为 BO 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 斜边上的中线，所以 $OB = OC$ 。所以 $\angle 3 = \angle 4$ 。

所以 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$ 。

所以 $\triangle DAC \sim \triangle OBC$ 。

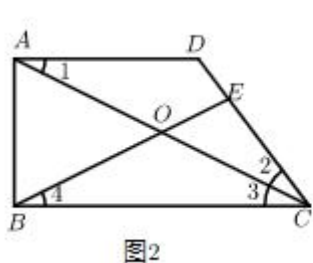


图2

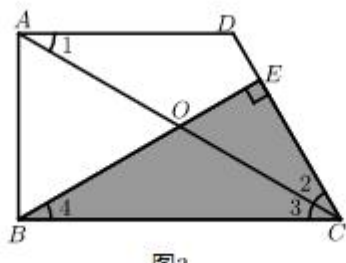


图3

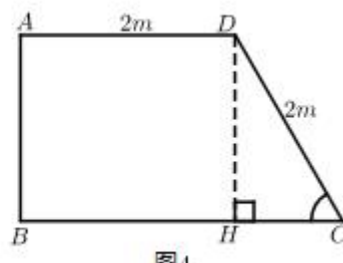


图4

②若 $BE \perp CD$ ，那么在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中，由 $\angle 2 = \angle 3 = \angle 4$ ，可得 $\angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 30^\circ$ 。

作 $DH \perp BC$ 于 H 。设 $AD = CD = 2m$ ，那么 $BH = AD = 2m$ 。

在 $\text{Rt}\triangle DCH$ 中， $\angle DCH = 60^\circ$ ， $DC = 2m$ ，所以 $CH = m$ 。

所以 $BC = BH + CH = 3m$ 。

所以 $\frac{AD}{BC} = \frac{2m}{3m} = \frac{2}{3}$ 。

(2) ①如图 5，当点 E 在 AD 上时，由 $AD \parallel BC$ ， O 是 AC 的中点，可得 $OB = OE$ ，

所以四边形 $ABCE$ 是平行四边形。

又因为 $\angle ABC = 90^\circ$ ，所以四边形 $ABCE$ 是矩形，

设 $AD = CD = x$ ，已知 $DE = 2$ ，所以 $AE = x - 2$ 。

已知 $OE = 3$ ，所以 $AC = 6$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 和 $\text{Rt}\triangle DCE$ 中，根据 $CE^2 = CE^2$ ，列方程 $6^2 - (x - 2)^2 = x^2 - 2^2$ 。

解得 $x = 1 + \sqrt{19}$ ，或 $x = 1 - \sqrt{19}$ （舍去负值）。

②如图 6，当点 E 在 CD 上时，设 $AD = CD = x$ ，已知 $DE = 2$ ，所以 $CE = x - 2$ 。

设 $OB = OC = m$ ，已知 $OE = 3$ ，那么 $EB = m + 3$ 。

一方面，由 $\triangle DAC \sim \triangle OBC$ ，得 $\frac{DC}{OC} = \frac{AC}{BC}$ ，所以 $\frac{x}{m} = \frac{2OC}{BC}$ ，所以 $\frac{OC}{BC} = \frac{x}{2m}$ ，

另一方面，由 $\angle 2 = \angle 4$ ， $\angle BEC$ 是公共角，得 $\triangle EOC \sim \triangle ECB$ 。

所以 $\frac{EO}{EC} = \frac{EC}{EB} = \frac{OC}{CB}$ ，所以 $\frac{3}{x-2} = \frac{x-2}{m+3} = \frac{OC}{CB}$ 。

等量代换，得 $\frac{3}{x-2} = \frac{x-2}{m+3} = \frac{x}{2m}$ 。由 $\frac{3}{x-2} = \frac{x}{2m}$ ，得 $m = \frac{x^2 - 2x}{6}$ 。

将 $m = \frac{x^2 - 2x}{6}$ 代入 $\frac{3}{x-2} = \frac{x-2}{m+3}$ ，整理，得 $x^2 - 6x - 10 = 0$ 。

解得 $x = 3 + \sqrt{19}$ ，或 $x = 3 - \sqrt{19}$ （舍去负值）。

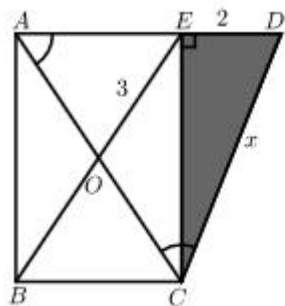


图5

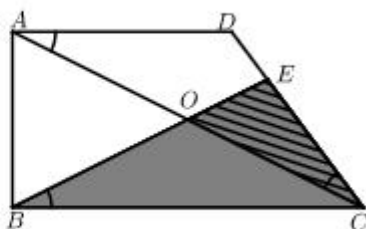


图6

【点睛】 本题主要考查相似三角形的判定与性质，斜边上的中线，勾股定理等，能够运用相似三角形边的关系列方程是解题的关键。