

2021 年上海市闵行区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1.（4 分）下列运算中，运算结果正确的是（ ）

A. $(x^2)^3 = x^5$ B. $x^2 \cdot x^3 = x^5$ C. $x^2 + x^3 = x^5$ D. $x^{10} \div x^2 = x^5$

【分析】根据合并同类项法则，同底数幂相乘，底数不变指数相加；幂的乘方，底数不变指数相乘；同底数幂相除，底数不变指数相减，对各选项分析判断后利用排除法求解．

【解答】解： $\because (x^2)^3 = x^6 \neq x^5$ ，故 A 运算结果错误；

$x^2 \cdot x^3 = x^5$ ，故 B 运算结果正确；

x^2 与 x^3 不是同类项，不能合并，故 C 运算结果错误；

$x^{10} \div x^2 = x^8 \neq x^5$ ，故 D 运算结果错误．

故选：B．

【点评】本题考查合并同类项、同底数幂的乘法、幂的乘方、同底数幂的除法，熟练掌握运算性质和法则是解题的关键．

2.（4 分）下列二次根式中，是最简二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ B. $\sqrt{5b^3}$ C. $\sqrt{x-y}$ D. $\sqrt{x^2+2x+1}$

【分析】根据最简二次根式的意义进行判断即可．

【解答】解： $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 的被开方数是分数，因此它不是最简二次根式；

$\sqrt{5b^3}$ 的被开方数中含有能开得尽方的因式，因此它不是最简二次根式；

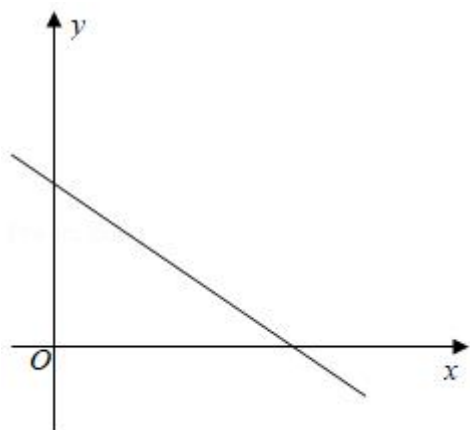
$\sqrt{x-y}$ 符合最简二次根式的定义，因此它是最简二次根式；

$\sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2}$ 的被开方数中含有能开得尽方的因式，因此它不是最简二次根式；

故选：C．

【点评】本题考查最简二次根式，理解最简二次根式的定义是正确判断的前提．

3.（4 分）在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y = kx + b$ 的图象如图所示，那么根据图象，下列结论正确的是（ ）



- A. $k > 0, b > 0$ B. $k > 0, b < 0$ C. $k < 0, b < 0$ D. $k < 0, b > 0$

【分析】根据函数图象经过的象限，可以判断 k 和 b 的正负情况，从而可以解答本题.

【解答】解：由图象可得，

一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过第一、二、四象限，

$$\therefore k < 0, b > 0,$$

故选：D.

【点评】本题考查一次函数图象与系数的关系，解答本题的关键是明确题意，利用一次函数的性质解答.

4. (4分) 如果一组数据为 $-1, 0, 1, 0, 0$ ，那么下列说法不正确的是 ()

- A. 这组数据的方差是 0 B. 这组数据的众数是 0
C. 这组数据的中位数是 0 D. 这组数据的平均数是 0

【分析】将这组数据重新排列，再根据众数、中位数、平均数及方差的定义求解即可.

【解答】解：这组数据重新排列为 $-1, 0, 0, 0, 1$ ，

其众数是 0，中位数为 0，平均数为 $\frac{-1+0+0+0+1}{5} = 0$ ，

$$\text{方差为 } \frac{1}{5} \times [(-1-0)^2 + 3 \times (0-0)^2 + (1-0)^2] = \frac{2}{5},$$

故选：A.

【点评】本题主要考查方差，解题的关键是掌握众数、中位数、平均数及方差的定义.

5. (4分) 下列命题中，真命题是 ()

- A. 有两个内角是 90° 的四边形是矩形
B. 一组邻边互相垂直的菱形是正方形
C. 对角线相互垂直的梯形是等腰梯形
D. 两组内角相等的四边形是平行四边形

【分析】根据矩形的判定定理、正方形的判定定理、等腰梯形的判定定理、平行四边形的判定定理判断即可.

【解答】解：A、有三个内角是 90° 的四边形是矩形，故本选项说法是假命题；

B、一组邻边互相垂直的菱形是正方形，本选项说法是真命题；

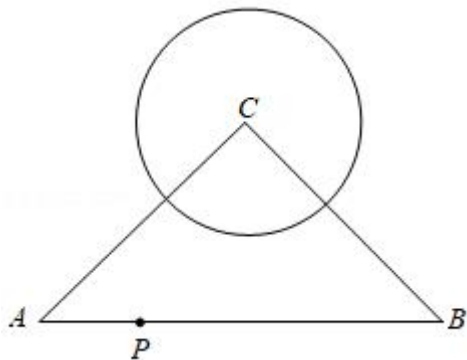
C、对角线相等的梯形是等腰梯形，故本选项说法是假命题；

D、两组对角相等的四边形是平行四边形，故本选项说法是假命题；

故选：B.

【点评】本题考查的是命题的真假判断，正确的命题叫真命题，错误的命题叫做假命题.判断命题的真假关键是要熟悉课本中的性质定理.

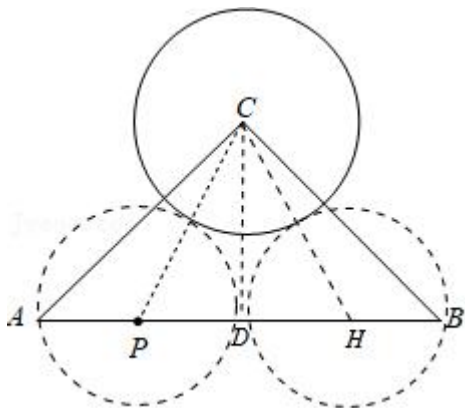
6. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， $AB = 8$ ，点 P 在边 AB 上， $\odot P$ 的半径为 3， $\odot C$ 的半径为 2，如果 $\odot P$ 和 $\odot C$ 相交，那么线段 AP 长的取值范围是 ()



- A. $0 < AP < 8$ B. $1 < AP < 5$ C. $1 < AP < 7$ D. $4 < AP < 8$

【分析】先画出图形，假设相切的时候求出 AP ，结合相交，即可找到答案.

【解答】解：根据题意，画出两圆相切的图，作 $CD \perp AB$ 于点 D ，如图所示：



$\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ， $AB = 8$ ， $CD \perp AB$.

$\therefore CD = DB = DA = 4$.

当两圆相切时，如图知道： $CP = 5$ ， $CH = 5$.

根据勾股定理可得： $PD = DH = 3$ ．

∴图上有： $AP = 1$ ， $AH = 7$ ．

如果 $\odot P$ 和 $\odot C$ 相交，那么线段 AP 长的取值范围为： $1 < AP < 7$ ．

故选： C ．

【点评】 本题考查等腰三角形性质，圆与圆的位置关系知识，关键在于利用两圆相切求出 AP 的长度．属于基础题．

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7.（4 分） $\frac{4}{3}$ 的倒数是 $-\frac{3}{4}$ ．

【分析】 根据倒数的定义求解即可．

【解答】 解： $\frac{4}{3}$ 的倒数是 $-\frac{3}{4}$ ，

故答案为： $-\frac{3}{4}$ ．

【点评】 本题考查了倒数，分子分母交换位置是求一数的倒数的关键．

8.（4 分）在实数范围内分解因式： $2x - 6 = 2(x - 3)$ ．

【分析】 利用提取公因式法，提取公因式 2 即可．

【解答】 解： $2x - 6 = 2(x - 3)$ ．

故答案为： $2(x - 3)$ ．

【点评】 本题主要考查了在实数范围内因式分解，应用提取公因式法是解题的关键．

9.（4 分）已知函数 $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ ，那么 $f(3) = 3$ ．

【分析】 把 $x = 3$ 代入函数解析式即可．

【解答】 解：当 $x = 3$ 时， $f(3) = \frac{2 \times 3}{3-1} = 3$ ．

故答案为：3．

【点评】 本题考查求函数值的知识点，把自变量取值代入函数解析式即可．

10.（4 分）方程 $\sqrt{2x-1} = x$ 的解是 $x = 1$ ．

【分析】 本题要先平方化简后才能求出 x 的值．

【解答】 解： $\sqrt{2x-1} = x$ ，

两边都平方得 $x^2 - 2x + 1 = 0$ ，

即 $(x - 1)^2 = 0$ ，

∴ $x = 1$ ．

【点评】本题要先平方化简后，化成 $x^2 = a$ ($a \geq 0$) 的形式，利用数的开方直接求解.

才能求出 x 的值. 法则：要把方程化为“左平方，右常数，先把系数化为 1，再开平方取正负，分开求得方程解”.

11. (4 分) 二元一次方程组 $\begin{cases} 3x+2y=15 \\ x-2y=5 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases}$.

【分析】利用加减消元法即可求解.

【解答】解： $\begin{cases} 3x+2y=15 \text{ ①} \\ x-2y=5 \text{ ②} \end{cases}$,

①+②，得 $4x = 20$ ，解得 $x = 5$ ，

把 $x = 5$ 代入②，得 $5 - 2y = 5$ ，解得 $y = 0$ ，

故方程组的解为 $\begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases}$.

故答案为： $\begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases}$.

【点评】此题考查了解二元一次方程组，利用了消元的思想，消元的方法有：代入消元法与加减消元法.

12. (4 分) 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x - c = 0$ 有两个相等的实数根，那么 $c = -1$.

【分析】利用判别式的意义得到 $\Delta = (-2)^2 - 4(-c) = 0$ ，然后解关于 c 的方程即可.

【解答】解：根据题意得 $\Delta = 2^2 + 4c = 0$ ，

解得 $c = -1$.

故答案为 -1 .

【点评】本题考查了根的判别式：一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根.

13. (4 分) 已知点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 均在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 的图象上，且

$x_2 > x_1 > 0$ ，那么 $y_1 > y_2$. (填 $<$, $>$ 或 $=$)

【分析】先判断此函数图象所在的象限，再根据 $x_2 > x_1 > 0$ 判断出 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 所在的象限，根据此函数的增减性即可解答.

【解答】解： $\because k > 0$ ，

$\therefore$ 此函数的图象在一、三象限，在每一象限内 y 随 x 的增大而减小，

$\because x_2 > x_1 > 0$ ，

$\therefore A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 两点均位于第一象限,

$\therefore y_1 > y_2$.

故答案为: $>$.

【点评】 本题考查的是反比例函数图象上点的坐标特点, 熟知反比例函数的性质是解答此题的关键.

14. (4 分) 布袋中有五个大小一样的球, 分别写有 $2\sqrt[3]{27}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{27}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{29}{11}$ 这五个实数, 从布袋中任意摸出一个球, 那么摸出写有无理数的球的概率为 $\frac{2}{5}$.

【分析】 用无理数的个数除以球的总个数即可.

【解答】 解: 在所列 5 个实数中, 无理数有 $\sqrt{3}$, $\frac{\pi}{3}$ 这 2 个,

所以从布袋中任意摸出一个球, 摸出写有无理数的球的概率为 $\frac{2}{5}$,

故答案为: $\frac{2}{5}$.

【点评】 考查了概率公式, 用到的知识点为: 概率 = 所求情况数与总情况数之比.

15. (4 分) 为了解全区 104000 个小学生家庭是否有校内课后服务需求, 随机调查了 4000 个小学生家庭, 结果发现有 2800 个小学生家庭有校内课后服务需求, 那么估计该区约有 72800 个小学生家庭有校内课后服务需求.

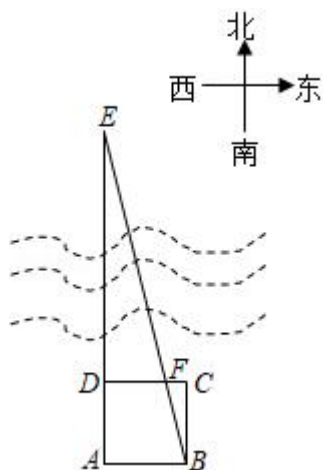
【分析】 用全区家庭总数量乘以样本中有校内课后服务需求的家庭数所占比例即可.

【解答】 解: 估计该区有校内课后服务需求的小学生家庭数量为 $104000 \times \frac{2800}{4000} = 72800$ (个),

故答案为: 72800.

【点评】 本题主要考查用样本估计总体, 从一个总体得到一个包含大量数据的样本, 我们很难从一个个数字中直接看出样本所包含的信息. 这时, 我们用频率分布直方图来表示相应样本的频率分布, 从而去估计总体的分布情况.

16. (4 分) 《九章算术》中记载了一种测距的方法. 如图, 有座塔在河流北岸的点 E 处, 一棵树位于河流南岸的点 A 处, 从点 A 处开始, 在河流南岸立 4 根标杆, 以这 4 根标杆为顶点, 组成边长为 10 米的正方形 $ABCD$, 且 A, D, E 三点在一条直线上, 在标杆 B 处观察塔 E , 视线 BE 与边 DC 相交于点 F , 如果测得 $FC = 4$ 米, 那么塔与树的距离 AE 为 25 米.

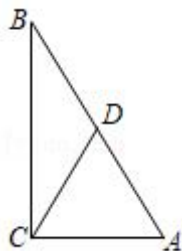


【分析】根据正方形的性质求出 FD ， $BC \parallel AD$ ，可得 $\triangle FDE \sim \triangle FCB$ ，根据相似三角形的性质可得 DE 的值，即可得出结论．

【解答】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，边长为 10 米，
 $\therefore AD = CD = BC = 10$ 米， $FD = CD - CF = 6$ 米， $BC \parallel AD$ ，
 $\therefore \triangle FDE \sim \triangle FCB$ ，
 $\therefore \frac{DE}{CB} = \frac{DF}{CF}$ ，即 $\frac{DE}{10} = \frac{6}{4}$ ，
 $\therefore DE = 15$ ，
 $\therefore AE = DE + AD = 25$ 米，
 故答案为：25．

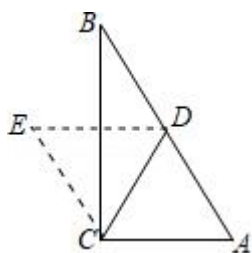
【点评】本题考查相似三角形的判定与性质的实际应用及分析问题、解决问题的能力．利用数学知识解决实际问题中学数学的重要内容．解决此问题的关键在于正确理解题意的基础上建立数学模型，把实际问题转化为数学问题．

17. (4 分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，点 D 为 AB 中点，将 $\triangle ACD$ 沿直线 CD 翻折后，点 A 落在点 E 处，设 $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$ ，那么向量 $\overrightarrow{DE}$ 用向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 表示为 $2\vec{b} + \vec{a}$ ．



【分析】证明 $DE \parallel AC$ ， $DE = AC$ ，求出 $\overrightarrow{AC}$ ，可得结论．

【解答】解：如图，



$$\because \angle ACB = 90^\circ, AD = BD,$$

$$\therefore CD = DB = DA,$$

$$\because \angle A = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ADC$ 是等边三角形，

由翻折的性质可知， $ED = EC = AD = AC$ ，

$\therefore$ 四边形 $ACED$ 是菱形，

$$\therefore AC = DE, AC \parallel DE,$$

$$\therefore \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC},$$

$$\therefore \vec{AC} = 2\vec{b} + \vec{a},$$

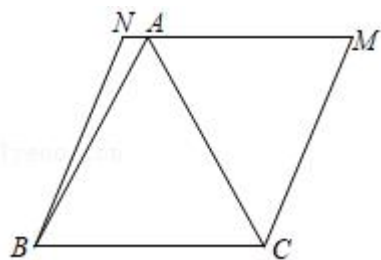
$$\therefore \vec{DE} = 2\vec{b} + \vec{a},$$

故答案为： $2\vec{b} + \vec{a}$.

【点评】 本题考查直角三角形斜边中线的性质，菱形的判定和性质，三角形法则等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

18. (4 分) 对于任意三角形，如果存在一个菱形，使得这个菱形的一条边与三角形的一条边重合，且三角形的这条边所对的顶点在菱形的这条边的对边上，那么称这个菱形为该三角形的“最优覆盖菱形”.

问题：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $BC = 4$ ，且 $\triangle ABC$ 的面积为 m ，如果 $\triangle ABC$ 存在“最优覆盖菱形”为菱形 $BCMN$ ，那么 m 的取值范围是 $4\sqrt{3} \leq m \leq 8$.



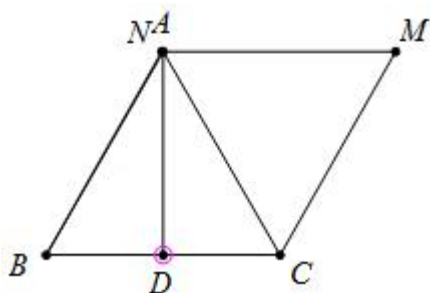
【分析】由 $\triangle ABC$ 的面积为 m 可得 $\triangle ABC$ 的高为 $\frac{m}{2}$ ，然后再分三角形的高取最大值和最小值两种情况求解即可．

【解答】解： $\because \triangle ABC$ 的面积为 m ，

$\therefore \triangle ABC$ 的 BC 边上的高为 $\frac{m}{2}$ ，

如图：当高取最小值时， $\triangle ABC$ 为等边三角形，

点 A 与 M 或 N 重合，



如图：过 A 作 $AD \perp BC$ ，垂足为 D

$\because$ 等边三角形 ABC ， $BC = 4$ ，

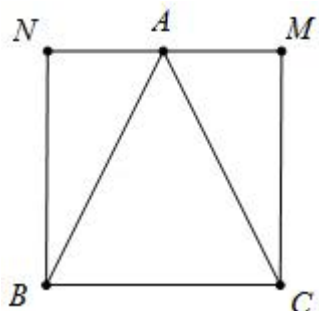
$\therefore \angle ABC = 60^\circ$ ， $BC = 4$ ， $\angle BAD = 30^\circ$ ．

$\therefore BD = 2$ ，

$\therefore AD = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ ，

$\therefore \frac{m}{2} = 2\sqrt{3}$ ，即 $m = 4\sqrt{3}$ ．

如图：



当高取最大值时，菱形为正方形．

$\therefore$ 点 A 在 MN 的中点，

$\therefore \frac{m}{2} = 4$ ，即 $m = 8$ ，

$\therefore 4\sqrt{3} \leq m \leq 8$ ，

故答案为: $4\sqrt{3} \leq m \leq 8$.

【点评】本题主要考查了菱形的性质/正方形的性质/等边三角形的性质以及勾股定理, 考查知识点较多, 灵活运用相关知识成为解答本题关键.

三、解答题(本大题共 7 题, 满分 78 分)

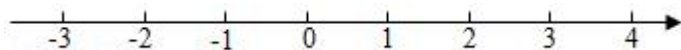
19. (10 分) 计算: $(1-\sqrt{3})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3})^{-1} - 9^{\frac{1}{2}} + |1-\sqrt{3}|$.

【分析】直接利用负整数指数幂的性质以及分数指数幂的性质和绝对值的性质、二次根式的性质化简得出答案.

【解答】解: 原式 $= 1+3 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 3 + \sqrt{3} - 1$
 $= 0$.

【点评】此题主要考查了实数运算, 正确化简各数是解题关键.

20. (10 分) 解不等式组: $\begin{cases} \frac{1}{3}x \geq x-2 \\ 9x+1 > 7x-3 \end{cases}$. 并把解集在数轴上表示出来.



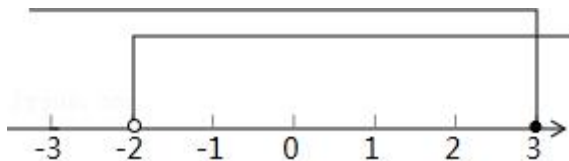
【分析】分别求出每一个不等式的解集, 根据口诀: 同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小无解了确定不等式组的解集.

【解答】解: 解不等式 $\frac{1}{3}x \geq x-2$, 得: $x \leq 3$,

解不等式 $9x+1 > 7x-3$, 得: $x > -2$,

则不等式组的解集为 $-2 < x \leq 3$,

将不等式组的解集表示在数轴上如下:

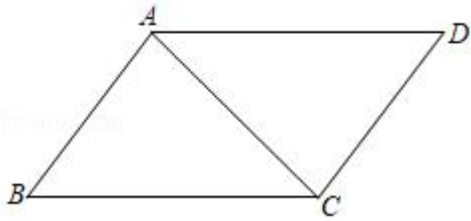


【点评】本题考查的是解一元一次不等式组, 正确求出每一个不等式解集是基础, 熟知“同大取大; 同小取小; 大小小大中间找; 大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

21. (10 分) 如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 联结 AC , $AB=5$, $BC=7$, $\cos B = \frac{3}{5}$.

(1) 求 $\angle ACB$ 的度数;

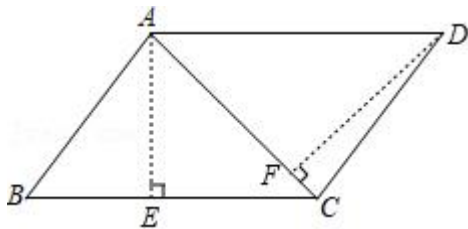
(2) 求 $\sin \angle ACD$ 的值.



【分析】(1) 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E ，过点 D 作 $DF \perp AC$ 于点 F ，根据已知条件证明 $\triangle AEC$ 是等腰直角三角形，进而可得结果；

(2) 根据四边形 $ABCD$ 是平行四边形，可得 $\triangle ABC$ 的面积 = $\triangle ADC$ 的面积，列式计算可得 DF 的值，进而可得 $\sin \angle ACD$ 的值．

【解答】解：(1) 如图，过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E ，过点 D 作 $DF \perp AC$ 于点 F ，



$$\because AB = 5, \cos B = \frac{BE}{AB} = \frac{3}{5}.$$

$$\therefore BE = 3,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = 4,$$

$$\because BC = 7,$$

$$\therefore CE = BC - BE = 7 - 3 = 4,$$

$$\therefore AE = CE = 4,$$

$\therefore \triangle AEC$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore \angle ACB = 45^\circ ;$$

$$(2) \because AE = CE = 4,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AE^2 + CE^2} = 4\sqrt{2},$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 = $\triangle ADC$ 的面积，

$$\therefore \frac{1}{2} \times BC \cdot AE = \frac{1}{2} \times AC \cdot DF,$$

$$\therefore 7 \times 4 = 4\sqrt{2}DF,$$

$$\therefore DF = \frac{7\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle DFC \text{ 中, } \sin \angle ACD = \frac{DF}{DC} = \frac{\frac{7\sqrt{2}}{2}}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

【点评】本题考查了平行四边形的性质，解直角三角形，解决本题的关键是掌握平行四边形的性质.

22. (10 分) 在疫情防控常态化背景下，每周需要对面积为 4800 平方米的仓库进行一次全面消毒工作. 最初采用人工操作完成消毒任务. 为提高效率采用机器人消毒，机器人消毒每分钟消毒面积比人工操作多 60 平方米，并且提前 40 分钟完成消毒任务. 求人工操作每分钟消毒面积为多少平方米.

【分析】设人工操作每分钟消毒面积为 x 平方米，则机器人每分钟消毒面积为 $(x+60)$ 平方米，根据工作时间 = 工作总量 $\div$ 工作效率，结合机器人比人工操作可以提前 40 分钟完成消毒任务，即可得出关于 x 的分式方程，解之经检验后即可得出结论.

【解答】解：设人工操作每分钟消毒面积为 x 平方米，则机器人每分钟消毒面积为 $(x+60)$ 平方米，

$$\text{依题意得: } \frac{4800}{x} - \frac{4800}{x+60} = 40,$$

$$\text{整理得: } x^2 + 60x - 7200 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = 60, x_2 = -120,$$

经检验， $x_1 = 60$ ， $x_2 = -120$ 是原方程的解， $x_1 = 60$ 符合题意， $x_2 = -120$ 不符合题意，舍去.

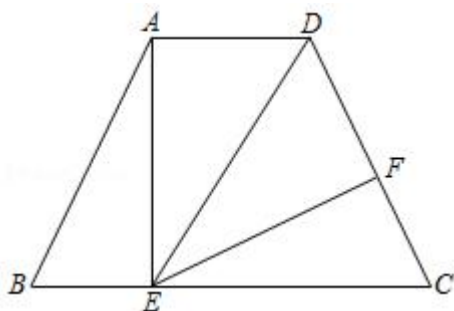
答：人工操作每分钟消毒面积为 60 平方米.

【点评】本题考查了分式方程的应用，找准等量关系，正确列出分式方程是解题的关键.

23. (12 分) 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = CD$ ，过点 A 作 $AE \perp BC$ ，垂足为点 E ，过点 E 作 $EF \perp CD$ ，垂足为点 F ，联结 DE ，且 DE 平分 $\angle ADC$.

(1) 求证： $\triangle ABE \cong \triangle ECF$;

(2) 联结 BD ， BD 与 AE 交于点 G ，当 $AB^2 = BG \cdot BD$ 时，求证 $EC^2 = BE \cdot BC$.



【分析】(1) 根据已知, 找到 $\angle AEB = \angle EFC$. $\angle EDC = \angle DEC$. 即可利用 AAS 证明全等.

(2) 根据 $AB^2 = BG \cdot BD$ 结合 $\angle ABG = \angle DBA$. 即可得到: $\triangle ABD \sim \triangle GBA$. 利用对应角相等, 即可证明 $\triangle AEB \sim \triangle BDC$. 再利用对应边成比例, 即可求证.

【解答】证明: 方法一: (1) 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = CD$.

$$\therefore \angle B = \angle C. \quad \angle ADE = \angle DEC.$$

$$\because DE \text{ 平分 } \angle ADC.$$

$$\therefore \angle ADE = \angle EDC.$$

$$\therefore \angle EDC = \angle DEC.$$

$$\therefore EC = CD.$$

$$\therefore AB = EC.$$

$$\because AE \perp BC, EF \perp CD.$$

$$\therefore \angle AEB = \angle EFC.$$

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ECF$ 中,

$$\begin{cases} AB=CE \\ \angle B=\angle C \\ \angle AEB=\angle EFC \end{cases}.$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ECF \text{ (AAS)}.$$

方法二:

$$\because DE \text{ 平分 } \angle ADC. \quad AE \perp BC, EF \perp CD.$$

$$\therefore AE = EF.$$

$$\because AE \perp BC, EF \perp CD.$$

$$\therefore \angle AEB = \angle EFC.$$

$$\because AD \parallel BC, \quad AB = CD.$$

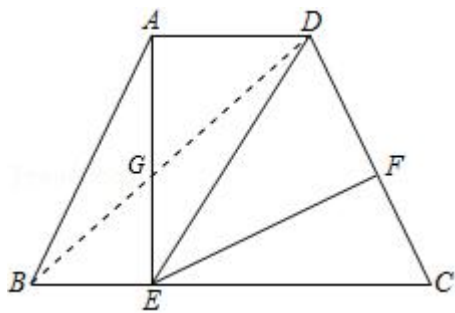
$$\therefore \angle B = \angle C.$$

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ECF$ 中,

$$\begin{cases} AE=EF \\ \angle B=\angle C \\ \angle AEB=\angle EFC \end{cases}.$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ECF \text{ (AAS)}.$$

(2) 联接 BD , BD 与 AE 交于点 G , 如图:



$$\because AB^2 = BG \cdot BD.$$

$$\therefore \frac{AB}{BG} = \frac{BD}{AB}.$$

$$\because \angle ABG = \angle DBA.$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle GBA.$$

$$\therefore \angle ADB = \angle GAB.$$

$$\because AD \parallel BC.$$

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC.$$

$$\therefore \angle BAG = \angle DBC.$$

$$\therefore \triangle AEB \sim \triangle BDC.$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{EB}{DC}.$$

$$\therefore AB \cdot DC = BC \cdot EB.$$

$$\therefore EC^2 = BE \cdot BC.$$

【点评】 本题考查三角形全等判断和性质，三角形相似判断和性质．关键在于掌握三角形的判定定理在本题中的应用．属于拔高题．

24. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = -x^2 + mx + n$ 经过点 $A(5, 0)$ ，顶点为点 B ，对称轴为直线 $x = 3$ ，且对称轴与 x 轴交于点 C ．直线 $y = kx + b$ ，经过点 A ，与线段 BC 交于点 E ．

(1) 求抛物线 $y = -x^2 + mx + n$ 的表达式；

(2) 联结 BO 、 EO ．当 $\triangle BOE$ 的面积为 3 时，求直线 $y = kx + b$ 的表达式；

(3) 在 (2) 的条件下，设点 D 为 y 轴上的一点，联结 BD 、 AD ，当 $BD = EO$ 时，求 $\angle DAO$ 的余切值．

【分析】 (1) 利用待定系数法和抛物线对称轴公式即可求解；

(2) 先求出顶点 B 坐标，根据 $\triangle BOE$ 的面积为 3 求出 BE ，进而求出点 E 坐标，利用待定系数法即可求解；

(3) 分 $BD \parallel OE$ 和 BD 与 OE 不平行两种情况, 分别求出 D 坐标, 利用余切定义即可求解.

【解答】解: (1) $\because$ 抛物线 $y = -x^2 + mx + n$ 经过点 $A(5, 0)$, 对称轴为直线 $x = 3$,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{m}{-2} = 3 \\ -25 + 5m + n = 0 \end{cases},$$
$$\therefore \begin{cases} m = 6 \\ n = -5 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线表达式为 $y = -x^2 + 6x - 5$;

(2) 把 $x = 3$ 代入 $y = -x^2 + 6x - 5$ 得 $y = 4$,

$\therefore$ 抛物线顶点 B 坐标为 $(3, 4)$,

由 $\triangle BOE$ 的面积为 3 得 $\frac{1}{2}BE \times 3 = 3$,

$\therefore BE = 2$,

$\because$ 点 E 在线段 BC 上,

$\therefore$ 点 E 坐标为 $E(3, 2)$,

把点 $E(3, 2)$ 和点 $A(5, 0)$ 代入 $y = kx + b$ 得,

$$\begin{cases} 5k + b = 0 \\ 3k + b = 2 \end{cases},$$
$$\therefore \begin{cases} k = -1 \\ b = 5 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线表达式为 $y = -x + 5$;

(3) 如图, ①若 $BD \parallel OE$,

如图,

则四边形 $OEBD_1$ 为平行四边形,

则点 D_1 坐标为 $(0, 2)$,

连接 D_1A ,

$$\therefore \cot \angle D_1AO = \frac{AO}{D_1O} = \frac{5}{2},$$

②若 BD 不平行 OE , 如图 D_2 ,

则四边形 $OEBD_2$ 为等腰梯形,

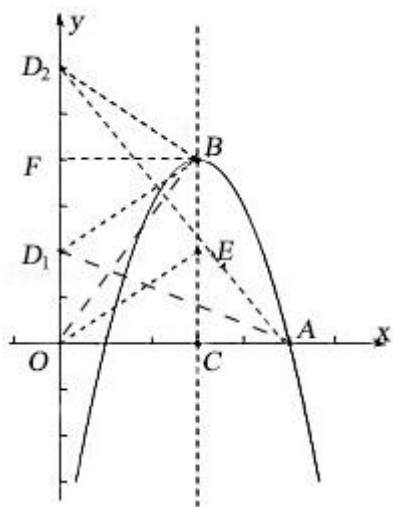
做 $BF \perp y$ 轴于 F , 则 $D_1F = D_2F = 2$,

$\therefore$ 点 D_2 坐标为 $(0, 6)$,

连接 D_2A ,

$$\therefore \cot \angle D_1AO = \frac{AO}{D_1O} = \frac{5}{6},$$

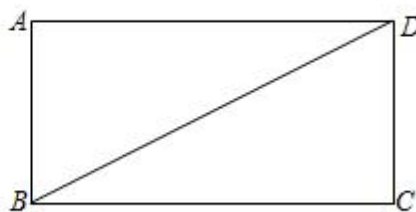
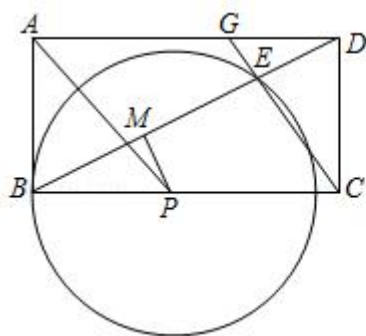
综上所述，此时 $\angle DAO$ 的余切值为 $\frac{5}{2}$ 或 $\frac{5}{6}$ 。



【点评】 本题为二次函数综合题，考查了二次函数性质，求一次函数解析式，余切定义等知识，熟练掌握各知识点是解题关键，解第（3）步时要注意分类讨论思想应用。

25. (14分) 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB=4$ ， $BC=8$ ，点 P 在边 BC 上（点 P 与端点 B 、 C 不重合），以 P 为圆心， PB 为半径作圆，圆 P 与射线 BD 的另一个交点为点 E ，直线 CE 与射线 AD 交于点 G 。点 M 为线段 BE 的中点，联结 PM 。设 $BP=x$ ， $BM=y$ 。

- (1) 求 y 关于 x 的函数解析式，并写出该函数的定义域；
- (2) 联结 AP ，当 $AP \parallel CE$ 时，求 x 的值；
- (3) 如果射线 EC 与圆 P 的另一个公共点为点 F ，当 $\triangle CPF$ 为直角三角形时，求 $\triangle CPF$ 的面积。



备用图

【分析】 (1) 先由垂径定理证明 $PM \perp BE$ ，得出 $\triangle BMP$ 与 $\triangle BCD$ 相似，利用 $\triangle BCD$ 三边之间的特殊比值求出 y 与 x 之间的函数关系式；

(2) 当 $AP \parallel CE$ 时，则 $DG = BP = x$ ，再用 $\triangle DGE$ 与 $\triangle BCE$ 相似，列出方程，求得结果；

(3) $\triangle CPF$ 为直角三角形分两种情况, 第一种是点 E 与点 D 重合, 第二种是 $PF \perp BC$, 利用 $\angle EPC$ 的正切值为 $\frac{4}{3}$ 这一隐含条件, 即可求解.

【解答】 解: (1) 在矩形 $ABCD$ 中, $CD = AB = 4$, $BC = 8$, $\angle BCD = 90^\circ$,

$$\therefore BD = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5},$$

$\because M$ 为弦 BE 的中点, P 为圆心,

$$\therefore PM \perp BE, \angle BMP = 90^\circ,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle PBM = \angle DBC,$$

$$\therefore \frac{BM}{BP} = \frac{BC}{BD} = \cos \angle DBC,$$

$$\therefore \frac{y}{x} = \frac{8}{4\sqrt{5}},$$

$$\therefore y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x,$$

当点 G 与点 A 重合时, 则点 E 为 BD 中点, 此时 $y = \frac{1}{4}BD = \sqrt{5}$,

$$\text{由 } \frac{2\sqrt{5}}{5}x = \sqrt{5}, \text{ 得 } x = \frac{5}{2},$$

$$\therefore y \text{ 关于 } x \text{ 的函数解析式 } y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x \left(\frac{5}{2} \leq x < 8 \right);$$

(2) 如图 1, 当 $AP \parallel CE$ 时, 则四边形 $APCG$ 是平行四边形, $AG = PC$,

$$\therefore DG = BP = x.$$

$$\text{由 } BM = \frac{2\sqrt{5}}{5}x, \text{ 得 } BE = \frac{4\sqrt{5}}{5}x, DE = 4\sqrt{5} - \frac{4\sqrt{5}}{5}x$$

$$\because DG \parallel BC$$

$$\therefore \triangle DGE \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \frac{DG}{BC} = \frac{DE}{BE} = \frac{4\sqrt{5} - \frac{4\sqrt{5}}{5}x}{\frac{4\sqrt{5}}{5}x} = \frac{5-x}{x};$$

$$\therefore \frac{x}{8} = \frac{5-x}{x},$$

整理, 得 $x^2 + 8x - 40 = 0$, 解得 $x_1 = -4 + 2\sqrt{14}$, $x_2 = -4 - 2\sqrt{14}$ (不符合题意, 舍去).

$$\therefore x = -4 + 2\sqrt{14}.$$

(3) 如图 2, 若 $\angle PFC = 90^\circ$, 则点 F 与点 E 重合, 不符合题意;

如图 3, 当 $\angle PCF = 90^\circ$ 时, 则点 E 与点 D 重合, 此时 $y = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$,

由 $\frac{2\sqrt{5}}{5}x = 2\sqrt{5}$, 得 $x = 5$,

$$\therefore PC = 8 - 5 = 3, \quad CF = CD = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle CPF} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6;$$

如图 4, 当 $\angle CPF = 90^\circ$ 时, 过点 E 作 $EQ \perp BC$ 交 BC 的延长线于点 Q ,

在 BC 边上取一点 H , 连接 DH , 使 $DH = BH$,

由图 3 得, 当点 E 与点 D 重合时, 则点 P 与图 4 中的点 H 重合, 此时, $CH = 3$, $DH = 5$,

$$\therefore CH : CD : DH = 3 : 4 : 5,$$

$$\because \angle EPQ = \angle DHC = 2\angle DBC, \quad \angle Q = \angle DCH = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle EPQ \sim \triangle DHC,$$

$$\therefore PQ : EQ : PE = 3 : 4 : 5,$$

$$\because PE = BP = PF = x,$$

$$\therefore EQ = \frac{4}{5}x, \quad PQ = \frac{3}{5}x$$

$$\because PF \parallel EQ,$$

$$\therefore \triangle CPF \sim \triangle CQE,$$

$$\therefore \frac{CP}{CQ} = \frac{PF}{EQ} = \frac{x}{\frac{4}{5}x} = \frac{5}{4},$$

$$\therefore PC = \frac{5}{9}PQ = \frac{5}{9} \times \frac{3}{5}x = \frac{1}{3}x,$$

$$\therefore 8 - x = \frac{1}{3}x,$$

解得 $x = 6$,

$$\therefore PC = 8 - 6 = 2, \quad PF = 6,$$

$$\therefore S_{\triangle CPF} = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6.$$

综上所述, $\triangle CPF$ 的面积为 6.

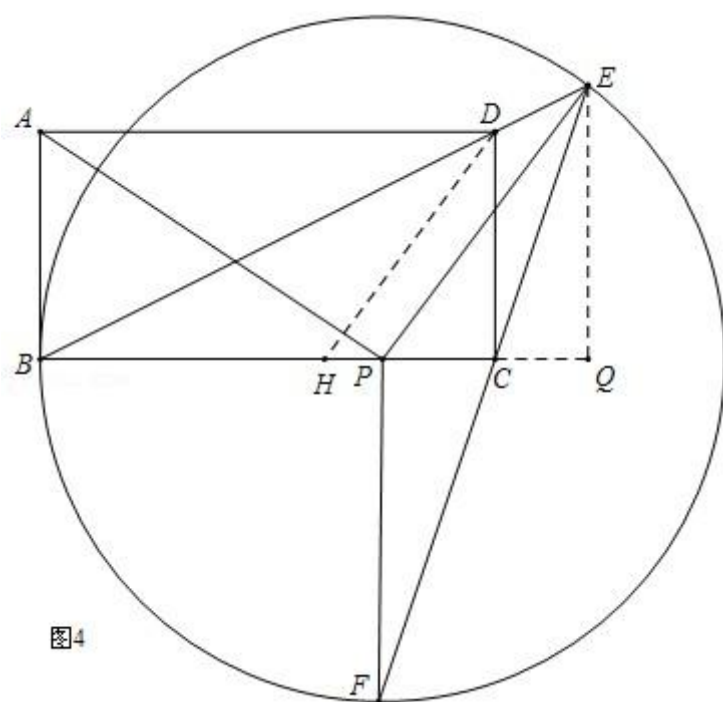


图4

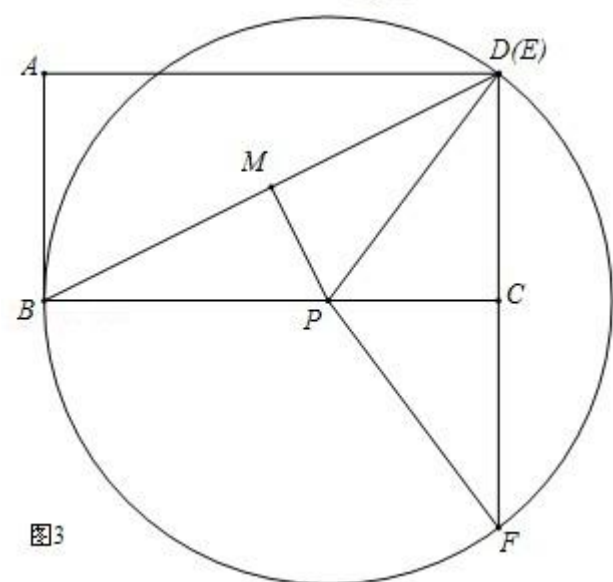


图3

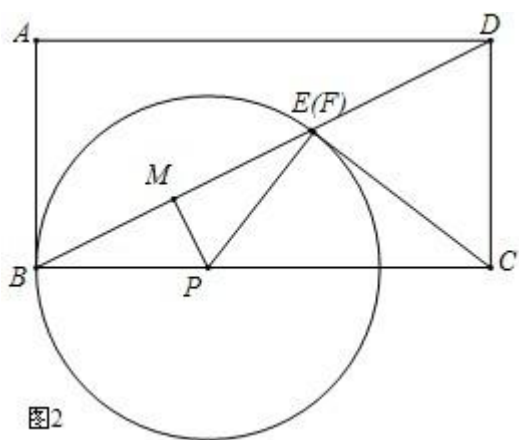


图2

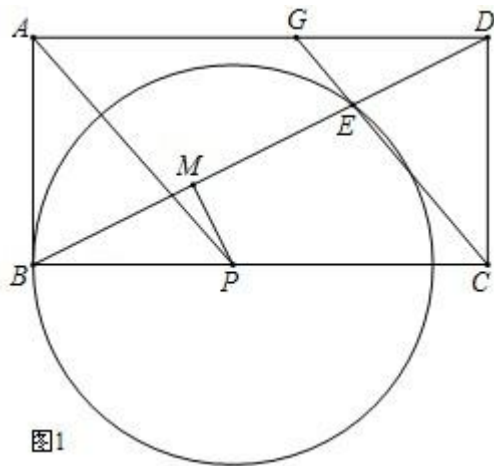


图1

【点评】此题重点考查垂径定理与相似三角形的性质的综合应用，涉及点和图形的运动，要求在不同的位置上画出相应的图形，进行分类讨论，解题的关键是正确地作出辅助线并利用相似比找出数量之间的关系．此题综合性强，难度较大．