

2021 年上海市长宁区中考数学二模试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）[每题只有一个正确选项，在答题纸相应题号的选项上用 2B 铅笔正确填涂]

1. -8 的倒数是（ ）

- A. -8 B. 8 C. $-\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{8}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据倒数的定义，互为倒数的两数乘积为 1， $-8 \times (-\frac{1}{8}) = 1$ ，即可解答.

【详解】根据倒数的定义得： $-8 \times (-\frac{1}{8}) = 1$ ，

因此 -8 的倒数是 $-\frac{1}{8}$.

故选 C.

【点睛】此题主要考查倒数的概念及性质，属于基础题，注意掌握倒数的定义：若两个数的乘积是 1，我们就称这两个数互为倒数.

2. 下列运算正确的是（ ）

- A. $(a^2)^3 = a^5$ B. $a^4 \cdot a^2 = a^8$ C. $a^6 \div a^3 = a^2$ D. $(ab)^3 = a^3b^3$

【答案】D

【解析】

【分析】分别利用幂的乘方、同底数幂的乘法、除法以及积的乘方等法则一一计算出结果即可作出判断.

【详解】A. $(a^2)^3 = a^{2 \times 3} = a^6$ ，故 A 错误；

B. $a^4 \cdot a^2 = a^{4+2} = a^6$ ，故 B 错误；

C. $a^6 \div a^3 = a^{6-3} = a^3$ ，故 C 错误；

D. $(ab)^3 = a^3b^3$ ，故 D 正确.

故答案为：D.

【点睛】本题主要考查了同底数幂的乘除法以及幂的乘方与积的乘方，熟记幂的运算法则是解答本题的关键.

3. 一家鞋店对上周某品牌女鞋的销售量统计如下：

尺寸（码）	35	36	37	38	39
-------	----	----	----	----	----

销售量（双）	2	4	11	7	3
--------	---	---	----	---	---

这家鞋店决定本周进该品牌女鞋时多进一些尺寸为 37 码的鞋，影响鞋店决策的统计量是（ ）

- A. 平均数 B. 众数 C. 中位数 D. 方差

【答案】B

【解析】

【分析】平均数、中位数、众数是描述一组数据集中程度的统计量；方差、标准差是描述一组数据离散程度的统计量．销量大的尺码就是这组数据的众数．

【详解】解：鞋店最关心的应该是某一尺码鞋子的销售量最多，在统计量中也就是众数，所以影响鞋店决策的统计量是众数，

故选：B．

【点睛】此题主要考查统计的有关知识，熟练掌握平均数、中位数、众数、方差的意义是解题的关键．

4. 下列方程中，有实数解的是（ ）

- A. $x^2 - x + 1 = 0$ B. $x^2 + 1 = 0$
C. $\frac{1}{x-1} = \frac{2}{x^2-1}$ D. $\sqrt{x-1} = 1-x$

【答案】D

【解析】

【分析】解各个方程，根据解的情况得结论．

【详解】解：方程 $x^2 - x + 1 = 0$ 的根的判别式 $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ ，

所以方程 A 没有实数解；

方程 $x^2 + 1 = 0$ 的根的判别式 $\Delta = 0 - 4 = -4 < 0$ ，

故方程 B 没有实数解；

方程 $\frac{1}{x-1} = \frac{2}{x^2-1}$ 可变形为 $x^2 - 1 = 2x - 2$ ，整理得 $x^2 - 2x + 1 = 0$ ．

解得 $x=1$ ，当 $x=1$ 时，分式方程无解．故方程 C 没有实数解；

方程 $\sqrt{x-1} = 1-x$ 的解为 $x=1$ ．

故选：D．

【点睛】本题考查了一元二次方程、分式方程、无理方程的解法，掌握一元二次方程、分式方程及无理方程的解法是解决本题的关键．

5. 下列命题中，假命题是（ ）

- A. 对角线互相垂直的矩形是正方形
- B. 对角线相等的菱形是正方形
- C. 对角线互相垂直平分的四边形是正方形
- D. 对角线互相垂直且相等的平行四边形是正方形

【答案】C

【解析】

【分析】根据正方形的判定判断即可.

【详解】解：A、对角线互相垂直的矩形是正方形；故该选项不符合题意；

B、对角线相等的菱形是正方形；故该选项不符合题意；

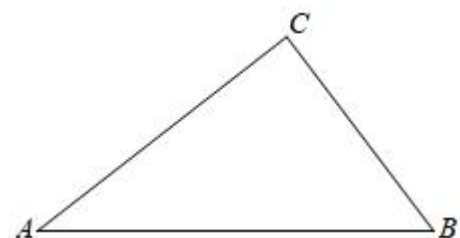
C、对角线互相相等且垂直平分的四边形是正方形；故该选项符合题意；

D、对角线互相垂直且相等的平行四边形是正方形；故该选项不符合题意；

故选：C.

【点睛】本题考查的是正方形的判定以及命题的真假判断，正确的命题叫真命题，错误的命题叫做假命题. 判断命题的真假关键是要熟悉课本中的性质定理.

6. 如果两个圆相交，且其中一个圆的圆心在另一个圆的圆内时，我们称此两圆的位置关系为“内相交”. 如图1，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=4$ ， $BC=3$ ，点 O 在边 AC 上. 如果 $\odot C$ 与直线 AB 相切，以 OA 为半径的 $\odot O$ 与 $\odot C$ “内相交”，那么 OA 的长度可以是（ ）



A. $\frac{16}{5}$

B. $\frac{12}{5}$

C. $\frac{8}{5}$

D. $\frac{4}{5}$

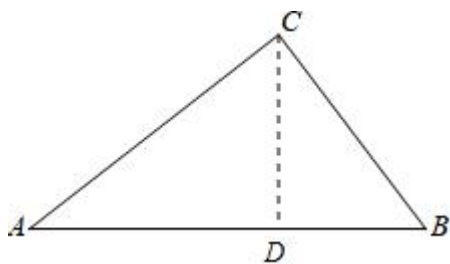
【答案】B

【解析】

【分析】根据勾股定理求得 $AB=5$ ，两个三角形面积公式求得 CD ，即可得出 $\odot C$ 的半径，根据“内相交”的定义得出 $\frac{8}{5} < OA < \frac{16}{5}$ ，即可得出结论.

【详解】解： $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=4$ ， $BC=3$ ，
 $\therefore AB=5$ ，

作 $CD \perp AB$ 于 D ，以 C 为圆心，以 CD 为半径的圆 C 与直线 AB 相切于 D ，



$\therefore CD$ 是 $\odot C$ 半径，

$$\therefore \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CD, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{1}{2} \times 5 CD,$$

$$\therefore CD = \frac{12}{5},$$

$$\therefore \odot C \text{ 的半径为 } \frac{12}{5},$$

$$\therefore 4 - \frac{12}{5} = \frac{8}{5}, \quad 4 + \frac{12}{5} = \frac{32}{5},$$

$$\therefore \frac{8}{5} < OA < \frac{16}{5}.$$

故选：B.

【点睛】本题考查了圆与圆的位置关系，勾股定理的应用，三角形的面积，求得 $\odot C$ 的半径是解题的关键.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）【在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案】

7. 计算： $a(a+1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 a^2+a

【解析】

【分析】原式利用单项式乘以多项式法则计算即可得到结果.

【详解】解： $a(a+1) = a^2+a$.

故答案为： a^2+a

【点睛】此题考查了单项式乘以多项式，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

8. 函数 $y = \sqrt{x-2}$ 的定义域是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x \geq 2$

【解析】

【分析】根据二次根式的性质，被开方数大于等于 0，可知： $x-2 \geq 0$ ，解得 x 的范围.

【详解】根据题意得： $x-2 \geq 0$,

解得： $x \geq 2$.

故答案为 $x \geq 2$.

【点睛】此题考查二次根式，解题关键在于掌握二次根式有意义的条件.

9. 方程组 $\begin{cases} x+2y=3 \\ x^2-y^2=0 \end{cases}$ 的解是_____.

【答案】 $\begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

【解析】

【分析】根据 $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ 把原方程组变为 $\begin{cases} x+2y=3 \\ x+y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+2y=3 \\ x-y=0 \end{cases}$ 再求解即可.

【详解】解： $\because x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$.

$\therefore x^2 - y^2 = 0$ 可改写成： $x+y=0$ 或者 $x-y=0$.

$\therefore$ 方程组 $\begin{cases} x+2y=3 \\ x^2-y^2=0 \end{cases}$ 可以改写为： $\begin{cases} x+2y=3 \\ x+y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+2y=3 \\ x-y=0 \end{cases}$.

解得： $\begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

故答案为： $\begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

【点睛】本题考查二元二次方程组的应用，根据乘法公式把二元二次方程组变形为二元一次方程组是解题关键.

10. 正多边形的一个外角等于 20° ，则这个正多边形的边数是_____.

【答案】 18

【解析】

【详解】试题分析：因为正多边形的外角和是 360° ，若这个正多边形的一个外角等于 20° ，则这个正多边形的边数是 $360 \div 20 = 18$. 是正十八边形.

考点：正多边形的边角计算.

11. 如果抛物线 $y = (m+1)x^2$ 的最高点是坐标轴的原点，那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < -1$

【解析】

【分析】 根据函数图像有最高点可得出开口向下，即可得出答案；

【详解】 $\because$ 抛物线 $y = (m+1)x^2$ 的最高点是坐标轴的原点，

$\therefore$ 抛物线开口向下，

$\therefore m+1 < 0$ ，

$\therefore m < -1$ ．

故答案是 $m < -1$ ．

【点睛】 本题主要考查了根据二次函数的开口方向求参数，准确分析判断是解题的关键．

12. 观察反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象，当 $0 < x < 1$ 时， y 的取值范围是_____．

【答案】 $y > 2$

【解析】

【分析】 将 $x=1$ 代入解析式，根据反比例函数的增减性可求 y 的取值范围．

【详解】 解： $\because k = 2$ ，

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象在一三象限，

当 $x = 1$ 时， $y = 2$ ，

$\therefore$ 当 $0 < x < 1$ 时， y 的取值范围 $y > 2$ ，

故答案为 $y > 2$ ．

【点睛】 本题考查了函数图象上点的坐标特征，反比例函数的增减性，关键是利用反比例函数的增减性解决问题．

13. 从 $\frac{2}{9}, \sqrt{2}, \pi$ 这三个数中任选一个数，选出的这个数是有理数的概率为_____．

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 根据实数的分类及概率公式即可求解．

【详解】 解： $\because$ 在 $\frac{2}{9}, \sqrt{2}, \pi$ 这三个数中，有 1 个有理数 $\frac{2}{9}$ ，

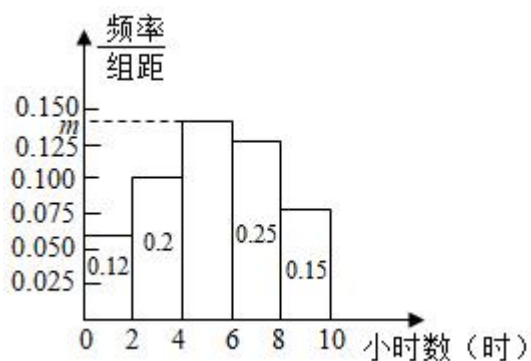
$\therefore$ 选出的这个数是有理数的概率为 $\frac{1}{3}$ ，

故答案为： $\frac{1}{3}$ ．

【点睛】 此题主要考查概率的求解，解题的关键是熟知概率的求解公式及实数的分类．

14. 某校为了解本校学生每周阅读课外书籍的时间，对本校全体学生进行了调查，并绘制如图所示的频率分

布直方图，那么图中 m 的值为_____.



【答案】 0.140

【解析】

【分析】 根据题意和直方图中的数据，可以计算出 m 的值，本题得以解决.

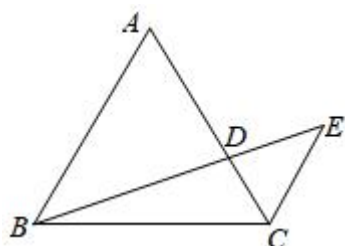
【详解】 解： $m = (1 - 0.12 - 0.2 - 0.25 - 0.15) \div 2 = 0.28 \div 2 = 0.140$,

故答案为： 0.140.

【点睛】 本题考查频数分布直方图，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 12$, $DC = 4$, 过点 C 作 $CE \parallel AB$ 交 BD 的延长线于点 E , $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$,

那么 $\overrightarrow{BE}$ 用向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示为_____.



【答案】 $\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$

【解析】

【分析】 由在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 12$, $DC = 4$, $CE \parallel AB$, 可得 $AB = 2CE$, 然后由 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 即可求得 $\overrightarrow{BE}$.

【详解】 解： $\because CE \parallel AB$,

$$\therefore \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{CE},$$

$$\because AB = AC = 12, DC = 4,$$

$$\therefore AD = 8;$$

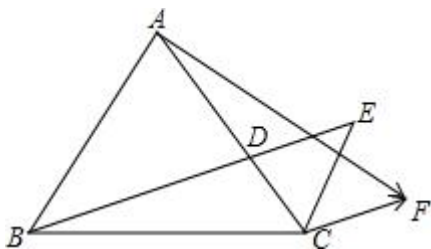
$$\therefore \frac{CE}{AB} = \frac{6}{8} = \frac{1}{8},$$

$$\therefore AB = 2CE,$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \vec{a},$$

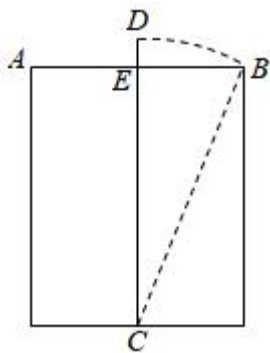
$$\therefore \overrightarrow{CE} = -\frac{1}{5}\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$$



【点睛】本题考查了平面向量的知识. 此题难度适中, 注意掌握三角形法则的应用, 注意数形结合思想的应用.

16. 我国古代数学著作《九章算术》中有这样一个问题: “今有池方一丈, 葭生其中央, 出水一尺. 引葭赴岸, 适与岸齐, 问水深几何?” (注: 丈, 尺是长度单位, 1 丈 = 10 尺) 这段话的意思是: 有一水池一丈见方, 池中央生有一棵芦苇, 露出水面一尺. 如把它引向岸边, 正好与岸边齐. 问水有多深? 即如图所示的截面图中, $AB = 1$ 丈, CD 垂直平分 AB , $DE = 1$ 尺, $CD = CB$, 那么水的深度 CE 是_____尺.



【答案】12

【解析】

【分析】根据勾股定理列出方程, 解方程即可.

【详解】解: 设水池里水的深度是 x 尺,

$$\text{由题意得, } x^2 + 5^2 = (x+1)^2,$$

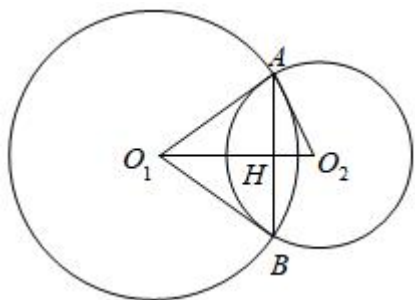
$$\text{解得: } x = 12,$$

答: 水池里水的深度是 12 尺.

故答案为: 12.

【点睛】 本题考查的是勾股定理的应用，掌握勾股定理、根据勾股定理正确列出方程是解题的关键.

17. 如图，已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 A 、 B 两点，圆心 O_1 、 O_2 在公共弦 AB 的两侧， $AB = O_1O_2 = 4$ ， $\sin \angle AO_1B = \frac{12}{13}$ ，那么 O_2A 的长是_____.

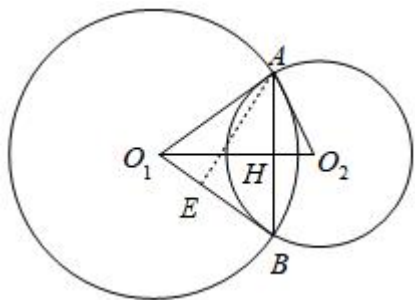


【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 过点 A 作 $AE \perp O_1B$ 于 E ，由锐角三角函数和勾股定理可求 $AO_1 = 13x = \sqrt{13}$ ，可求 $O_2H = 1$ ，即可求解.

【详解】 解：如图，过点 A 作 $AE \perp O_1B$ 于 E ，



$\because \odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 A 、 B 两点，

$\therefore O_1O_2$ 垂直平分 AB ，

$\therefore AH = BH = 2$ ，

$\because \sin \angle AO_1B = \frac{AE}{AO_1} = \frac{12}{13}$ ，

$\therefore$ 设 $AE = 12x$ ， $AO_1 = 13x$ ，

$\therefore O_1E = \sqrt{O_1A^2 - AE^2} = 5x$ ，

$\therefore BE = 8x$ ，

$\because AE^2 + BE^2 = AB^2$ ，

$\therefore 144x^2 + 64x^2 = 16$ ，

$$\therefore x = \frac{\sqrt{13}}{13},$$

$$\therefore AO_1 = 13x = \sqrt{13},$$

$$\therefore O_1H = \sqrt{O_1A^2 - AH^2} = \sqrt{13 - 4} = 3,$$

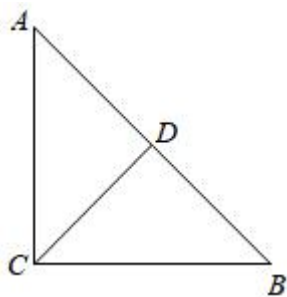
$$\therefore O_2H = 1,$$

$$\therefore O_2A = \sqrt{AH^2 + O_2H^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5},$$

故答案为 $\sqrt{5}$.

【点睛】本题考查了锐角三角函数，勾股定理，相交两圆的性质等知识，灵活运用这些性质解决问题是本题的关键.

18. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， CD 是斜边 AB 的中线. 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 旋转，点 B 、点 C 分别落在点 B' 、点 C' 处，且点 B' 在射线 CD 上，边 AC' 与射线 CD 交于点 E . 如果 $\frac{AE}{EC'} = 3$ ，那么线段 CE 的长是_____.

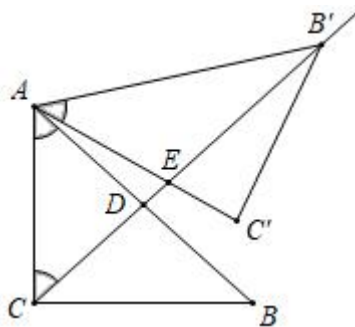


【答案】 $\frac{7}{2}$

【解析】

【分析】根据已知，作出图形，求出 AD 、 CD 、 AE . 利用相似三角形的性质求出 $B'C$ ， $B'E$ 即可利用 $EC = B'C - B'E$ 求解.

【详解】解：根据已知，作出的图形



$\because \triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， CD 是斜边 AB 的中线.

$$\therefore AD = CD = DB = \frac{1}{2} AB = 3,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ACD,$$

根据旋转性质: $\angle B'AE = \angle B'CA$,

$$\therefore \triangle B'AE \sim \triangle B'CA,$$

$$\therefore \frac{B'A}{B'C} = \frac{AE}{AC} = \frac{B'E}{B'A},$$

$$\therefore \frac{AE}{EC'} = 3,$$

$$\therefore \frac{AE}{AC'} = \frac{AE}{AC} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{6}{B'C} = \frac{3}{4} = \frac{B'E}{6},$$

$$\therefore B'C = 8, B'E = \frac{9}{2},$$

$$\therefore EC = B'C - B'E = 8 - \frac{9}{2} = \frac{7}{2},$$

故答案为: $\frac{7}{2}$.

【点睛】 本题考查旋转的性质, 直角三角形斜边中线的性质, 相似三角形的判定和性质等知识, 解题的关键是正确寻找相似三角形解决问题, 属于中考填空题掌握的压轴题.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分) [将下列各题的解答过程, 做在答题纸的相应位置上]

19. 计算: $27^{\frac{1}{3}} + (\sqrt{2} - 1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \frac{2}{\sqrt{2} - 1}.$

【答案】 6

【解析】

【分析】 根据实数的运算法则计算 .

【详解】 解: 原式 $= 3 + 3 - 2\sqrt{2} - 2 + \frac{2(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}$

$$= 3 + 3 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} + 2$$

$$= 6.$$

【点睛】 本题考查实数的混合运算, 熟练掌握与实数有关的立方根、完全平方公式、二次根式的运算及负整数指数运算等是解题关键.

20. 解不等式组:
$$\begin{cases} 6(\frac{2}{3}x-2) < x-3 \\ \frac{1-x}{2} \leq x \end{cases}$$
, 并求出它的正整数解.

【答案】不等式组的解集是 $\frac{1}{3} \leq x < 3$, 正整数解是 1, 2.

【解析】

【分析】根据解不等式组的方法, 可以求得该不等式组的解集, 然后即可写出该不等式组的整数解.

【详解】解:
$$\begin{cases} 6(\frac{2}{3}x-2) < x-3 \text{ ①} \\ \frac{1-x}{2} \leq x \text{ ②} \end{cases},$$

由不等式①, 得 $x < 3$,

由不等式②, 得 $x \geq \frac{1}{3}$,

故原不等式组的解集是 $\frac{1}{3} \leq x < 3$,

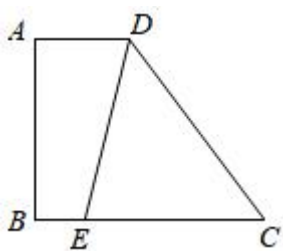
$\therefore$ 该不等式组的正整数解是 1, 2.

【点睛】本题考查一元一次不等式组的整数解, 解答本题的关键是明确解一元一次不等式组的方法.

21. 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = 90^\circ$, $CD = 15$, $BC = 16$, $AB = 12$, 点 E 是边 BC 上的一点, 联结 DE , 且 $DE = CE$.

(1) 求梯形 $ABCD$ 的面积;

(2) 求 $\angle DEC$ 的正切值.



【答案】(1) 138; (2) $\frac{24}{7}$

【解析】

【分析】(1) 过 D 点作垂线构造直角三角形求出 AD 的长, 再利用面积公式求解即可;

(2) 分别求出 DF 和 EF 的长后, 利用正切公式求解即可.

【详解】解: (1) 如图, 过 D 作 $DF \perp BC$ 于 F ,

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $CD = 15$, $AB = 12$,

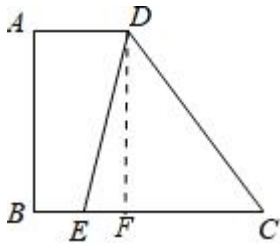
$$\therefore DF = AB = 12,$$

$$\therefore CF = \sqrt{CD^2 - DF^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9,$$

$$\therefore AD = BF = BC - CF = 16 - 9 = 7,$$

$$\therefore \text{梯形 } ABCD \text{ 的面积} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = \frac{7 + 16}{2} \times 12 = 138;$$

答：梯形 $ABCD$ 的面积为 138；



$$(2) \because DE = CE,$$

$$\therefore EF = DE - 9,$$

$$\because DE^2 = DF^2 + EF^2,$$

$$\therefore DE^2 = 144 + (DE - 9)^2,$$

$$\therefore DE = \frac{25}{2},$$

$$\therefore EF = \frac{7}{2},$$

$$\therefore \tan \angle DEC = \frac{DF}{EF} = \frac{24}{7};$$

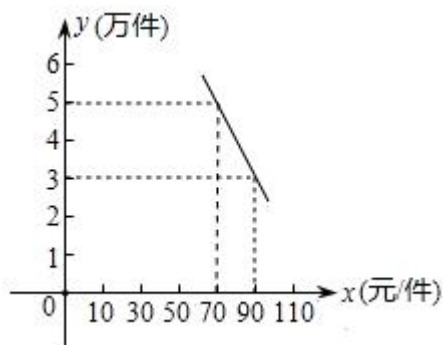
答： $\angle DEC$ 的正切值为 $\frac{24}{7}$ 。

【点睛】 本题涉及到了梯形的性质及面积公式、三角函数、勾股定理等知识，要求学生能通过作辅助线构造直角三角形求出相应线段的长，能运用梯形面积公式和正切公式进行求解等，解题的关键是构造直角三角形求出所需的线段的长以及牢记公式等。

22. 某商店销售一种商品，经过市场调查发现：该产品的销售单价需定在 50 元到 110 元之间较为合理，每月销售量 y （万件）与销售单价 x （元/件）存在如图所示的一次函数关系，根据图象提供的信息，解答下列问题：

(1) 求这种商品的每月销售量 y （万件）关于销售单价 x （元/件）（ $50 \leq x \leq 110$ ）的函数解析式；

(2) 已知六月份、八月份这种商品的销售单价分别为 95 元/件和 84 元/件，且每月销售量的增长率是相同的，求这个增长率。



【答案】(1) $y = -\frac{1}{10}x + 12$ ($50 \leq x \leq 110$); (2) 20%

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法即可得出一次函数解析式

(2) 先算出六月、七月的销量再列一元二次方程即可

【详解】解：(1) 由题意，设 $y = kx + b$,

图象过点 (70, 5)、(90, 3),

$$\therefore \begin{cases} 5 = 70k + b \\ 3 = 90k + b \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{1}{10} \\ b = 12 \end{cases},$$

$\therefore$ 函数解析式为: $y = -\frac{1}{10}x + 12$ ($50 \leq x \leq 110$);

(2) 由 (1) 中解析式知:

六月份的销售量为: $y = -\frac{1}{10} \times 95 + 12 = 2.5$ (万件),

九月份的销售量为: $y = -\frac{1}{10} \times 84 + 12 = 3.6$ (万件),

设每月销售量的增长率为 x , 则由题意得:

$$2.5(1+x)^2 = 3.6,$$

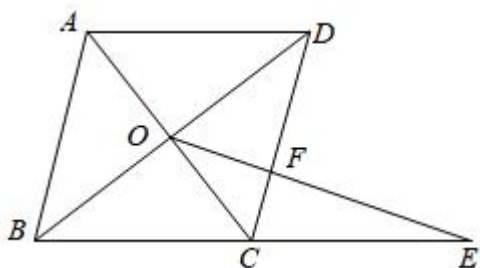
解得: $x = 20\%$ (负值舍去)

答: 每个月的增长率为 20%.

【点睛】本题考查一次函数解析式、一元二次方程, 熟练掌握一元二次方程增长率问题是关键, 本题是中考的常考知识点.

23. 如图, 已知四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , AC 平分 $\angle BAD$, BD 平分 $\angle ABC$, 点 E 在边 BC 的延长线上, 联结 OE , 交边 CD 于点 F .

- (1) 求证：四边形 $ABCD$ 是菱形；
 (2) 如果 $OE \perp CD$ ，求证： $CE \cdot OF = CF \cdot OE$ 。



【答案】(1) 见解析；(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 由平行线的性质和角平分线的性质可证 $AB=BC$ ， $AB=AD$ ，由菱形的判定可得结论；

(2) 由菱形的性质和角平分线的性质可得 $OF=OH$ ，通过证明 $\triangle CEF \sim \triangle OEH$ ，可得结论。

【详解】解：(1) 证明： $\because AC$ 平分 $\angle BAD$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ，

$$\therefore \angle DAC = \angle BAC, \quad \angle ABD = \angle CBD,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ACB = \angle BAC, \quad \angle ADB = \angle DBC = \angle ABD,$$

$$\therefore AB = BC, \quad AB = AD,$$

$$\therefore AD = BC,$$

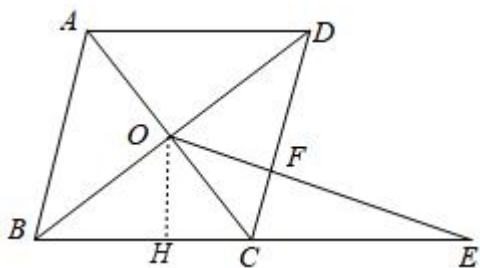
$$\text{又} \because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 是平行四边形},$$

$$\text{又} \because AB = AD,$$

$$\therefore \text{平行四边形 } ABCD \text{ 是菱形};$$

(2) 如图，过点 O 作 $OH \perp BC$ 于 H ，



$$\because \text{四边形 } ABCD \text{ 是菱形},$$

$$\therefore \angle OCB = \angle OCD,$$

$$\text{又} \because OF \perp CD, \quad OH \perp BC,$$

$$\therefore OF = OH,$$

$$\because \angle E = \angle E, \angle EFC = \angle EHO = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CEF \sim \triangle OEH,$$

$$\therefore \frac{CE}{OE} = \frac{CF}{OH},$$

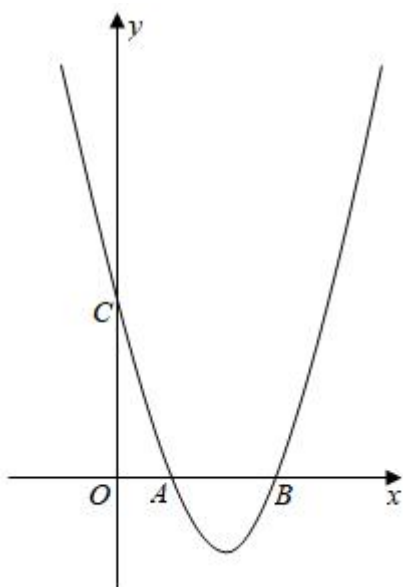
$$\therefore CE \cdot OH = CF \cdot OE$$

$$\therefore CE \cdot OF = CF \cdot OE.$$

【点睛】本题考查了相似三角形的判定和性质，等腰三角形的判定和性质，菱形的判定和性质，添加恰当辅助线构造相似三角形是本题的关键.

24. 如图，已知在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 - \frac{16}{3}x + c$ 经过点 $A(1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ ，且与 y 轴交于点 C .

- (1) 求抛物线的表达式;
- (2) 如果将抛物线向左平移 m ($m > 0$) 个单位长度，联结 AC 、 BC ，当抛物线与 $\triangle ABC$ 的三边有且只有一个公共点时，求 m 的值;
- (3) 如果点 P 是抛物线上一动点，且在点 B 的右侧，联结 PC ，直线 PA 交 y 轴于点 E ，当 $\angle PCE = \angle PEC$ 时，求点 P 的坐标.



【答案】(1) $y = \frac{4}{3}x^2 - \frac{16}{3}x + 4$; (2) $m = 4$; (3) $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{3}\right)$

【解析】

【分析】(1) 由待定系数法即可求解;

(2) 当抛物线与 $\triangle ABC$ 的三边有且只有一个公共点时，则抛物线过点 $C(0, 4)$ ，即可求解;

(3) 求出直线 PA 的表达式, 得到点 E 的坐标为 $(0, -\frac{4}{3}t+4)$, 由 $\angle PCE = \angle PEC$, 则点 P 在 CE 的中垂线上, 进而求解.

【详解】解: (1) 将点 A 、 B 的坐标代入抛物线表达式得:
$$\begin{cases} a - \frac{16}{3} + c = 0 \\ 9a - 16 + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ c = 4 \end{cases}$$

故抛物线的表达式为 $y = \frac{4}{3}x^2 - \frac{16}{3}x + 4$;

(2) 令 $x=0$, $y=4$

$\therefore C(0, 4)$

当抛物线与 $\triangle ABC$ 的三边有且只有一个公共点时, 则抛物线过点 $C(0, 4)$

由抛物线的表达式知, 其对称轴为 $x=2$,

则平移后抛物线再过点 C 时, $m=4$;

(3) 设点 P 的坐标为 $(t, \frac{4}{3}t^2 - \frac{16}{3}t + 4)$,

设直线 PA 的表达式为 $y=kx+b$,

$$\text{代入 } A、P \text{ 坐标得} \begin{cases} \frac{5}{3}t^2 - \frac{16}{4}t + 4 = kt + b \\ 0 = k + b \end{cases}, \text{ 解得} \begin{cases} k = \frac{4}{3}t - 4 \\ b = -\frac{4}{3}t + 4 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 PA 的表达式为 $y = (\frac{4}{3}t - 4)x - \frac{4}{3}t + 4$,

令 $x=0$, $y = -\frac{4}{3}t + 4$

故点 E 的坐标为 $(0, -\frac{4}{3}t+4)$,

而点 $C(0, 4)$,

$\therefore \angle PCE = \angle PEC$,

则点 P 在 CE 的中垂线上,

由中点公式得: $y_P = \frac{1}{2}(y_C + y_E)$, 即 $\frac{4}{3}t^2 - \frac{16}{3}t + 4 = \frac{1}{2}(-\frac{4}{3}t + 4)$,

解得 $t=1$ (舍去) 或 $\frac{7}{2}$,

故点 P 的坐标为 $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{3}\right)$.

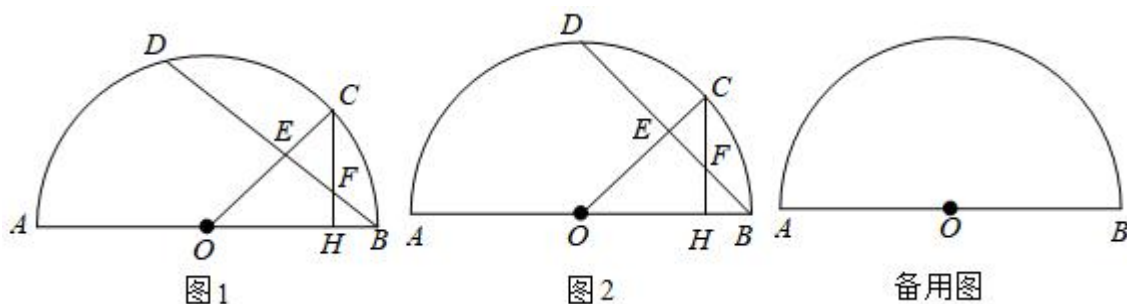
【点睛】 本题考查的是二次函数综合运用，涉及到一次函数的性质、中垂线的性质、图形的平移等，有一定的综合性，难度适中.

25. 已知半圆 O 的直径 $AB=4$ ，点 C 、 D 在半圆 O 上（点 C 与点 D 不重合）， $\angle COB=\angle DBO$ ，弦 BD 与半径 OC 相交于点 E ， $CH \perp AB$ ，垂足为点 H ， CH 交弦 BD 于点 F .

(1) 如图 1，当点 D 是 $\widehat{AC}$ 的中点时，求 $\angle COB$ 的度数；

(2) 如图 2，设 $OH=x$ ， $\frac{CF}{CE}=y$ ，求 y 关于 x 函数解析式，并写出定义域；

(3) 联结 OD 、 OF ，如果 $\triangle DOF$ 是等腰三角形，求线段 OH 的长.



【答案】 (1) $\angle COB=36^\circ$. (2) $y=\sqrt{4-x^2}$ ($0 < x < 2$). (3) OH 的值为 $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$ 或 $\sqrt{2}$.

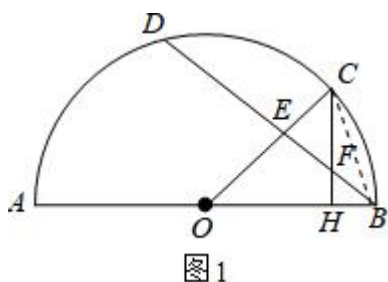
【解析】

【分析】 (1) 连接 BC ，想办法证明 $\angle OCB=\angle OBC=2\angle COB$ ，可得结论.

(2) 如图 2 中，过点 E 作 $EJ \perp CF$ 于 J . 首先证明 $EC=EF$ ，再利用平行线分线段成比例定理解决问题即可.

(3) 分两种情形：如图 3-1 中，当 $FD=FO$ 时，证明 $FD=FO=EO=EB$ ，设 $FD=FO=EO=EB=x$ ，则 $EC=EF=2-x$ ， $BF=2x-2$ ， $BD=3x-2$ ，证明 $\triangle BOD \sim \triangle BEO$ ，利用相似三角形的性质求解. 如图 3-2 中，当 $DO=DF$ 时，证明 $\triangle OCH$ 是等腰直角三角形即可求解.

【详解】 解：(1) 如图 1 中，连接 BC .



$\therefore \widehat{AD} = \widehat{CD}$,

$$\therefore \angle ABD = \angle DBC,$$

$$\because \angle COB = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle OBC = 2\angle COB,$$

$$\text{设 } \angle COB = x,$$

$$\because OB = OC,$$

$$\therefore \angle OCB = \angle OBC = 2x,$$

$$\because \angle COB + \angle OCB + \angle OBC = 180^\circ,$$

$$\therefore x + 2x + 2x = 180^\circ,$$

$$\therefore x = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle COB = 36^\circ;$$

(2) 如图 2 中, 过点 E 作 $EJ \perp CF$ 于 J .

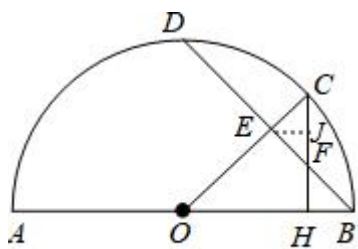


图 2

$$\because CH \perp OB,$$

$$\therefore \angle CHO = \angle CHB = 90^\circ,$$

$$\because \angle COB + \angle C = 90^\circ, \quad \angle ABD + \angle HFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle HFB,$$

$$\because \angle HFB = \angle CFE,$$

$$\therefore \angle C = \angle CFE,$$

$$\therefore EC = EF,$$

$$\because EJ \perp CF,$$

$$\therefore CJ = JF,$$

$$\because OC = \frac{1}{2}AB = 2, \quad OH = x,$$

$$\therefore CH = \sqrt{2^2 - x^2} = \sqrt{4 - x^2},$$

$$\because EJ \parallel OH,$$

$$\therefore \frac{EC}{OC} = \frac{CJ}{CH},$$

$$\therefore \frac{CJ}{CE} = \frac{CH}{OC},$$

$$\therefore \frac{2CJ}{CE} = \frac{2CH}{OC},$$

$$\therefore \frac{CF}{CE} = \frac{2\sqrt{4-x^2}}{2},$$

$$\therefore y = \sqrt{4-x^2} (0 < x < 2);$$

(3) 如图 3-1 中, 当 $FD=FO$ 时,

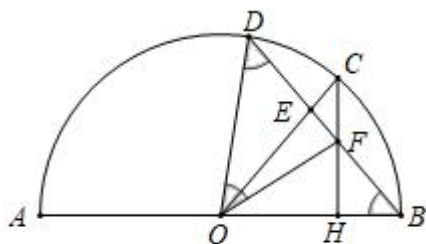


图3-1

$$\because FD=FO, OD=OB,$$

$$\therefore \angle D = \angle FOD = \angle B,$$

$$\therefore \angle EOB = \angle B,$$

$$\therefore \angle D = \angle DOF = \angle B = \angle EOB,$$

$$\therefore \triangle FDO \cong \triangle EOB \text{ (ASA)},$$

$$\therefore FD=FO=EO=EB,$$

设 $FD=FO=EO=EB=x$, 则 $EC=EF=2-x$, $BF=2x-2$, $BD=3x-2$,

$$\therefore \triangle BOD \sim \triangle BEO,$$

$$\therefore \frac{BD}{OB} = \frac{OB}{BE},$$

$$\therefore \frac{3x-2}{2} = \frac{2}{x},$$

$$\text{解得 } x = \frac{1+\sqrt{13}}{3} \text{ 或 } \frac{1-\sqrt{13}}{3} \text{ (舍弃)},$$

$$\text{经检验 } x = \frac{1+\sqrt{13}}{3} \text{ 是原方程的解,}$$

$$\therefore OF^2 - OH^2 = BF^2 - BH^2,$$

$$\therefore OF^2 - OH^2 = BF^2 - (2-OH)^2,$$

$$\therefore \left(\frac{1+\sqrt{13}}{3}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{13}-4}{3}\right)^2 - 4 + 4OH,$$

$$\therefore OH = \frac{\sqrt{13}-1}{2};$$

如图 3-2 中, 当 $DO=DF$ 时,

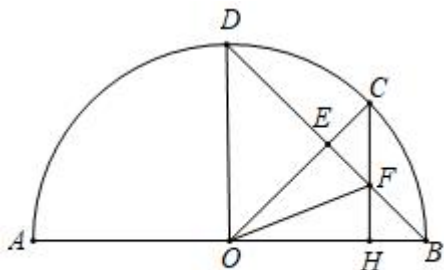


图3-2

$$\therefore OC=OD,$$

$$\therefore DF=OC,$$

$$\therefore EC=EF,$$

$$\therefore DE=OE,$$

$$\therefore \angle D = \angle DOE,$$

$$\therefore OD=OB,$$

$$\therefore \angle D = \angle EBO,$$

$$\therefore \angle COB = \angle B,$$

$$\therefore \angle D = \angle B = \angle EOB = \angle DOE = 45^\circ,$$

$$\therefore CH \perp OB,$$

$$\therefore \triangle OCH \text{ 是等腰直角三角形,}$$

$$\therefore OH = \frac{\sqrt{2}}{2} OC = \sqrt{2},$$

综上所述, OH 的值为 $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$ 或 $\sqrt{2}$.

【点睛】本题属于圆综合题, 考查了圆周角定理, 等腰三角形的判定和性质, 相似三角形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质等知识, 解题的关键是正确寻找全等三角形或相似三角形解决问题, 需要利用参数解决问题, 属于中考压轴题.

