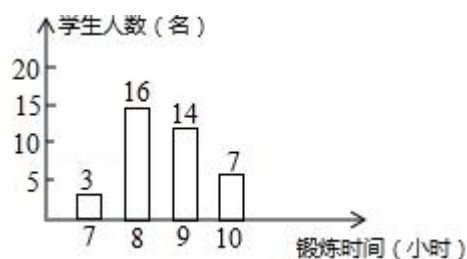


2020 年上海市长宁区中考数学二模试卷

一、选择题

1. (3 分) 下列实数中, 无理数是 ()
- A. 0 B. $\sqrt{3}$ C. -3 D. $\sqrt{9}$
2. (3 分) 下列单项式中, 与 xy^2 是同类项的是 ()
- A. x^2y B. x^2y^2 C. $2xy^2$ D. $3xy$
3. (3 分) 关于反比例函数 $y = \frac{2}{x}$, 下列说法不正确的是 ()
- A. 点 $(-2, -1)$ 在它的图象上
- B. 它的图象在第一、三象限
- C. 它的图象关于原点中心对称
- D. y 的值随着 x 的值的增大而减小
4. (3 分) 如图是关于某班同学一周体育锻炼情况的统计图, 那么该班学生这一周参加体育锻炼时间的众数、中位数分别是 ()

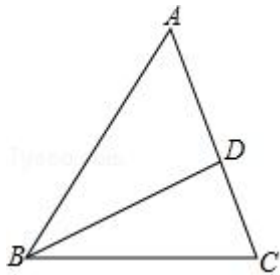


- A. 8、9 B. 8、8.5 C. 16、8.5 D. 16、14
5. (3 分) 如果两圆的半径长分别为 5 和 3, 圆心距为 7, 那么这两个圆的位置关系是 ()
- A. 内切 B. 外离 C. 相交 D. 外切
6. (3 分) $\square ABCD$ 中, E, F 是对角线 BD 上不同的两点. 下列条件中, 不能得出四边形 $AECF$ 一定为平行四边形的是 ()
- A. $BE = DF$ B. $AE = CF$ C. $AF \parallel CE$ D. $\angle BAE = \angle DCF$

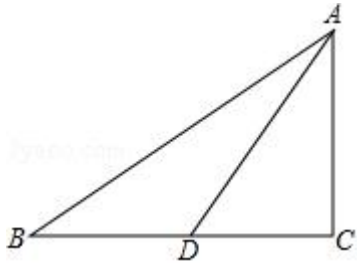
二、填空题

7. (3 分) 计算: $(x^3)^2 \div (-x)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.
8. (3 分) 方程 $\sqrt{3-x} = 2$ 的根是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
9. (3 分) 不等式组 $\begin{cases} 3x+4 \geq 0 \\ \frac{1}{2}x-2 \leq 1 \end{cases}$ 的解集是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

10. (3分) 已知正三角形的边心距为 1, 那么它的边长为_____.
11. (3分) 如果抛物线 $y = (a - 1)x^2 - 1$ (a 为常数) 不经过第二象限, 那么 a 的取值范围是_____.
12. (3分) 如果关于 x 的多项式 $x^2 - 2x + k$ 在实数范围内能分解因式, 那么 k 的取值范围是_____.
13. (3分) 从 1, 2, 3, 4 四个数中任意取出 2 个数做加法, 其和为偶数的概率是_____.
14. (3分) 我国古代数学著作《九章算术》中有一道阐述“盈不足术”的问题, 原文是“今有人共买物, 人出八, 盈三; 人出七, 不足四, 问人数、物价各几何?” 大致意思是: “现有几个人共同购买一个物品, 每人出 8 元, 则多 3 元; 每人出 7 元, 则差 4 元. 问人数、物品的价格各是多少?” 如果设共有 x 人, 物品的价格为 y 元, 那么根据题意可列出方程组为_____.
15. (3分) 甲乙两位运动员在一次射击训练中各打五发, 成绩的平均环数相同, 甲的方差为 1.6; 乙的成绩 (环) 为: 7, 8, 10, 6, 9, 那么这两位运动员中_____的成绩较稳定.
16. (3分) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 AC 上, $AD = 2DC$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, 那么 $\overrightarrow{BD} =$ _____. (用含向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的式子表示)



17. (3分) 如果一个四边形有且只有三个顶点在圆上, 那么称这个四边形是该圆的“联络四边形”, 已知圆的半径长为 5, 这个圆的一个联络四边形是边长为 $2\sqrt{5}$ 的菱形, 那么这个菱形不在圆上的顶点与圆心的距离是_____.
18. (3分) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 2$, 点 D 是边 BC 的中点, $\angle ABC = \angle CAD$, 将 ACD 沿直线 AD 翻折, 点 C 落在点 E 处, 连结 BE , 那么线段 BE 的长为_____.



三、解答题。

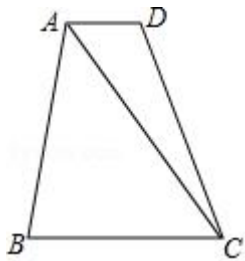
19. 计算: $\sqrt{4\frac{1}{2}} + 2\frac{1}{2} + (\sqrt{2}+1)^{-1} + (\sqrt{2}-1)^0$.

20. 解方程: $\frac{x}{x+3} - \frac{6}{9-x^2} = \frac{1}{x-3}$.

21. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = 2$, $BC = 5$, $\angle BAC = 45^\circ$, $\cos \angle ACB = \frac{3}{5}$

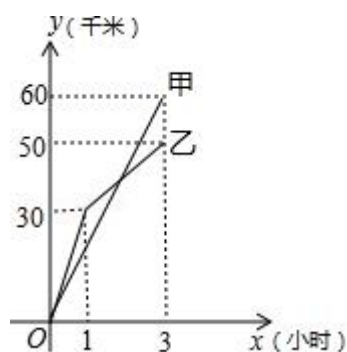
(1) 求线段 AC 的长;

(2) 联结 BD , 交对角线 AC 于点 O , 求 $\angle ADO$ 的余切值.



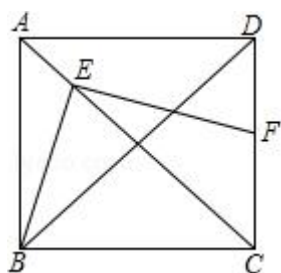
22. 如图，反映了甲、乙两名自行车爱好者同时骑车从 A 地到 B 地进行训练时行驶路程 y (千米) 和行驶时间 x (小时) 之间关系的部分图象，根据图象提供的信息，解答下列问题：

- (1) 求乙的行驶路程 y 和行驶时间 x ($1 \leq x \leq 3$) 之间的函数解析式；
- (2) 如果甲的速度一直保持不变，乙在骑行 3 小时之后又以第 1 小时的速度骑行，结果两人同时到达 B 地，求 A 、 B 两地之间的距离。



23. 如图，已知四边形 $ABCD$ 是矩形，点 E 在对角线 AC 上，点 F 在边 CD 上 (点 F 与点 C 、 D 不重合)， $BE \perp EF$ ，且 $\angle ABE + \angle CEF = 45^\circ$ 。

- (1) 求证：四边形 $ABCD$ 是正方形；
- (2) 连结 BD ，交 EF 于点 Q ，求证： $DQ \cdot BC = CE \cdot DF$ 。

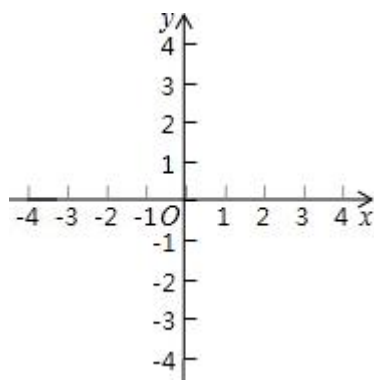


24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = x^2 + mx + n$ 经过点 $A(2, -2)$, 对称轴是直线 $x = 1$, 顶点为点 B , 抛物线与 y 轴交于点 C .

(1) 求抛物线的表达式和点 B 的坐标;

(2) 将上述抛物线向下平移 1 个单位, 平移后的抛物线与 x 轴正半轴交于点 D , 求 $\triangle BCD$ 的面积;

(3) 如果点 P 在原抛物线上, 且在对称轴的右侧, 联结 BP 交线段 OA 于点 Q , $\frac{BQ}{PQ} = \frac{1}{5}$, 求点 P 的坐标.



25. 已知 AB 是 $\odot O$ 的一条弦, 点 C 在 $\odot O$ 上, 联结 CO 并延长, 交弦 AB 于点 D , 且 $CD = CB$.

(1) 如图 1, 如果 BO 平分 $\angle ABC$, 求证: $\widehat{AB} = \widehat{BC}$;

(2) 如图 2, 如果 $AO \perp OB$, 求 $AD:DB$ 的值;

(3) 延长线段 AO 交弦 BC 于点 E , 如果 $\triangle EOB$ 是等腰三角形, 且 $\odot O$ 的半径长等于 2, 求弦 BC 的长.

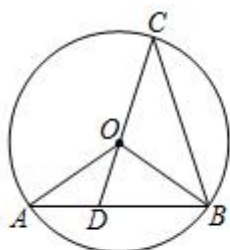


图 1

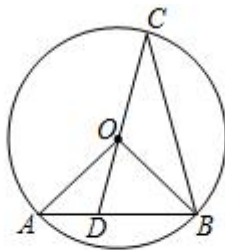
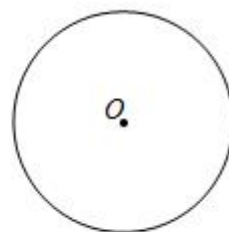


图 2



备用图

2020 年上海市长宁区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题

1. (3 分) 下列实数中，无理数是 ()

A. 0

B. $\sqrt{3}$

C. -3

D. $\sqrt{9}$

【分析】无理数就是无限不循环小数. 理解无理数的概念，一定要同时理解有理数的概念，有理数是整数与分数的统称. 即有限小数和无限循环小数是有理数，而无限不循环小数是无理数. 由此即可判定选择项.

【解答】解：A. 0 是整数，属于有理数；

B. $\sqrt{3}$ 是无理数；

C. -3 是整数，属于有理数；

D. $\sqrt{9}=3$ ，是整数，属于有理数.

故选：B.

【点评】此题主要考查了无理数的定义，其中初中范围内学习的无理数有： π ， 2π 等；开方开不尽的数；以及像 0.1010010001...，等有这样规律的数.

2. (3 分) 下列单项式中，与 xy^2 是同类项的是 ()

A. x^2y

B. x^2y^2

C. $2xy^2$

D. $3xy$

【分析】根据同类项的定义，所含字母相同且相同字母的指数也相同的项是同类项，同类项与字母的顺序无关，与系数无关.

【解答】解：A. x^2y 与 xy^2 所含字母的指数不同，所以不是同类项；

B. x^2y^2 与 xy^2 所含字母的指数不尽相同，所以不是同类项；

C. $2xy^2$ 与 xy^2 所含字母相同且相同字母的指数也相同的项是同类项；

D. $3xy$ 与 xy^2 所含字母的指数不尽相同，所以不是同类项.

故选：C.

【点评】此题考查同类项，关键是根据同类项定义中的两个“相同”：(1) 所含字母相同；(2) 相同字母的指数相同，是易混点，还有注意同类项与字母的顺序无关，与系数无关.

3. (3 分) 关于反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ ，下列说法不正确的是 ()

A. 点 (-2, -1) 在它的图象上

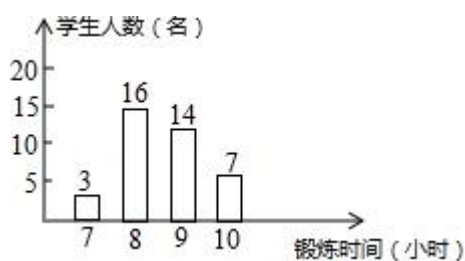
- B. 它的图象在第一、三象限
C. 它的图象关于原点中心对称
D. y 的值随着 x 的值的增大而减小

【分析】根据反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 和反比例函数的性质，可以判断各个选项中的说法是否正确，从而可以解答本题.

【解答】解： $\because$ 反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ ，
 $\therefore$ 当 $x = -2$ 时， $y = -1$ ，即点 $(-2, -1)$ 在它的图象上，故选项 A 正确；
它的图象在第一、三象限，故选项 B 正确；
它的图象关于原点中心对称，故选项 C 正确；
在每个象限内， y 的值随着 x 的值的增大而减小，故选项 D 不正确；
故选：D.

【点评】本题考查反比例函数的性质，解答本题的关键是明确题意，利用反比例函数的性质解答.

4. (3 分) 如图是关于某班同学一周体育锻炼情况的统计图，那么该班学生这一周参加体育锻炼时间的众数、中位数分别是 ()



- A. 8、9 B. 8、8.5 C. 16、8.5 D. 16、14

【分析】根据中位数、众数的概念分别求得这组数据的中位数、众数.

【解答】解：众数是一组数据中出现次数最多的数，即 8；
而将这组数据从小到大的顺序排列后，处于中间位置的那个数为 9，由中位数的定义可知，这组数据的中位数是 9；
故选：A.

【点评】考查了中位数、众数的概念. 本题为统计题，考查众数与中位数的意义，中位数是将一组数据从小到大（或从大到小）重新排列后，最中间的那个数（最中间两个数的平均数），叫做这组数据的中位数，如果中位数的概念掌握得不好，不把数据按要求重

新排列，就会错误地将这组数据最中间的那个数当作中位数．

5. (3分) 如果两圆的半径长分别为 5 和 3，圆心距为 7，那么这两个圆的位置关系是()

- A. 内切 B. 外离 C. 相交 D. 外切

【分析】 求出两圆半径的和与差，再与圆心距比较大小，确定两圆位置关系．根据两圆的位置关系得到其数量关系．

设两圆的半径分别为 R 和 r ，且 $R \geq r$ ，圆心距为 d ：外离，则 $d > R+r$ ；外切，则 $d = R+r$ ；相交，则 $R - r < d < R+r$ ；内切，则 $d = R - r$ ；内含，则 $d < R - r$ ．

【解答】 解：设圆心距为 d ，

因为 $5 - 3 = 2$ ， $3+5 = 8$ ，圆心距为 $7cm$ ，

所以， $2 < d < 8$ ，

根据两圆相交，圆心距的长度在两圆的半径的差与和之间，

所以两圆相交．

故选：C．

【点评】 考查了圆与圆的位置关系，本题利用了两圆相交，圆心距的长度在两圆的半径的差与和之间求解．

6. (3分) $\square ABCD$ 中， E, F 是对角线 BD 上不同的两点．下列条件中，不能得出四边形 $AECF$ 一定为平行四边形的是()

- A. $BE = DF$ B. $AE = CF$ C. $AF \parallel CE$ D. $\angle BAE = \angle DCF$

【分析】 连接 AC 与 BD 相交于 O ，根据平行四边形的对角线互相平分可得 $OA = OC$ ， $OB = OD$ ，再根据对角线互相平分的四边形是平行四边形，只要证明得到 $OE = OF$ 即可，然后根据各选项的条件分析判断即可得解．

【解答】 解：如图，连接 AC 与 BD 相交于 O ，

在 $\square ABCD$ 中， $OA = OC$ ， $OB = OD$ ，

要使四边形 $AECF$ 为平行四边形，只需证明得到 $OE = OF$ 即可；

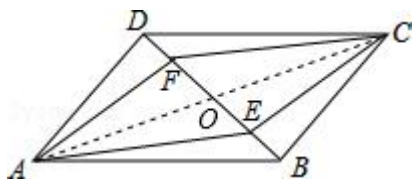
A、若 $BE = DF$ ，则 $OB - BE = OD - DF$ ，即 $OE = OF$ ，故本选项不符合题意；

B、若 $AE = CF$ ，则无法判断 $OE = OF$ ，故本选项符合题意；

C、 $AF \parallel CE$ 能够利用“角角边”证明 $\triangle AOF$ 和 $\triangle COE$ 全等，从而得到 $OE = OF$ ，故本选项不符合题意；

D、 $\angle BAE = \angle DCF$ 能够利用“角角边”证明 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 全等，从而得到 $DF = BE$ ，然后同 A，故本选项不符合题意；

故选：B.



【点评】本题考查了平行四边形的判定与性质，熟练掌握平行四边形的判定方法是解题的关键.

二、填空题

7. (3分) 计算： $(x^3)^2 \div (-x)^2 = x^4$.

【分析】直接利用幂的乘方运算法则以及同底数幂的除法运算法则计算得出答案.

【解答】解： $(x^3)^2 \div (-x)^2$

$$= x^6 \div x^2$$

$$= x^4.$$

故答案为： x^4 .

【点评】此题主要考查了幂的乘方运算以及同底数幂的除法运算，正确掌握相关运算法则是解题关键.

8. (3分) 方程 $\sqrt{3-x}=2$ 的根是 $x=-1$.

【分析】此题需把方程两边平方去根号后求解，然后把求得的值进行检验即可.

【解答】解：两边平方得： $3-x=4$,

$$x=-1.$$

检验：当 $x=-1$ 时，

原方程的左边 $=2$ ，右边 $=2$ ，

$\therefore x=-1$ 是原方程的根.

故答案为： $x=-1$.

【点评】本题主要考查解无理方程，在解无理方程是最常用的方法是两边平方法及换元法，本题用了平方法. 注意要把求得的 x 的值代入原方程进行检验.

9. (3分) 不等式组 $\begin{cases} 3x+4 \geq 0 \\ \frac{1}{2}x-2 \leq 1 \end{cases}$ 的解集是 $-\frac{4}{3} \leq x \leq 6$.

【分析】分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小无解了确定不等式组的解集.

【解答】解：解不等式 $3x+4 \geq 0$ ，得： $x \geq -\frac{4}{3}$ ，

解不等式 $\frac{1}{2}x - 2 \leq 1$ ，得： $x \leq 6$ ，

则不等式组的解集为 $-\frac{4}{3} \leq x \leq 6$ ，

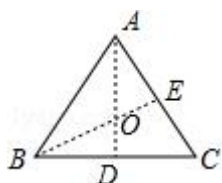
故答案为： $-\frac{4}{3} \leq x \leq 6$ 。

【点评】本题考查的是解一元一次不等式组，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键。

10. (3分) 已知正三角形的边心距为1，那么它的边长为 $2\sqrt{3}$ 。

【分析】根据题意，画出图形作 $AD \perp BC$ ， $BE \perp AC$ 于点 D 和 E ，点 O 即为 $\triangle ABC$ 的外心，根据特殊角 30° 即可求出 BD 的值，进而可得三角形的边长。

【解答】解：根据题意，画出图形，



$\because \triangle ABC$ 是正三角形，

作 $AD \perp BC$ ， $BE \perp AC$ 于点 D 和 E ，

$\therefore$ 点 O 即为 $\triangle ABC$ 的外心，

$\therefore OD = 1$ ， $\angle DBO = 30^\circ$ ，

$\therefore BD = \sqrt{3}$ ，

$\therefore BC = 2BD = 2\sqrt{3}$ 。

故答案为： $2\sqrt{3}$ 。

【点评】本题考查了正多边形和圆，解决本题的关键是掌握正多边形和圆的关系。

11. (3分) 如果抛物线 $y = (a-1)x^2 - 1$ (a 为常数) 不经过第二象限，那么 a 的取值范围是 $a < 1$ 。

【分析】根据抛物线 $y = (a-1)x^2 - 1$ (a 为常数) 不经过第二象限可以确定不等式的开口方向，从而确定 a 的取值范围。

【解答】解： $\because$ 抛物线 $y = (a-1)x^2 - 1$ (a 为常数) 不经过第二象限，且该抛物线与 y 轴交于负半轴，

$\therefore a - 1 < 0$ ，

解得： $a < 1$ 。

故答案为： $a < 1$ 。

【点评】考查了二次图象与系数的关系，根据抛物线的开口方向，与 y 轴的交点，对称轴判断抛物线经过的象限。

12. (3分) 如果关于 x 的多项式 $x^2 - 2x + k$ 在实数范围内能分解因式，那么 k 的取值范围是 $k \leq 1$ 。

【分析】本题实际上求一元二次方程 $x^2 - 2x + k$ 在实数范围内有实数根时， k 的取值范围。所以根据一元二次方程的根的判别式解答即可。

【解答】解： $\because$ 二次三项式 $x^2 - 2x + k$ 在实数范围内能分解因式，

$\therefore$ 一元二次方程 $x^2 - 2x + k$ 在实数范围内有实数根，

$\therefore \Delta = 4 - 4k \geq 0$ ，

解得， $k \leq 1$ 。

故答案为： $k \leq 1$ 。

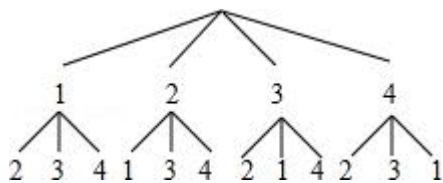
【点评】本题考查了实数范围内分解因式、根的判别式。在解答该题时，注意问题之间的相互转化。

13. (3分) 从1, 2, 3, 4四个数中任意取出2个数做加法，其和为偶数的概率是 $\frac{1}{3}$ 。

【分析】列举出所有情况，看和为偶数的情况数占总情况数的多少即可。

【解答】解：共12种情况，和为偶数的情况数有4种，所以概率为 $\frac{1}{3}$ 。

故答案为 $\frac{1}{3}$ 。



【点评】考查概率的求法；用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比。

14. (3分) 我国古代数学著作《九章算术》中有一道阐述“盈不足术”的问题，原文是“今有人共买物，人出八，盈三；人出七，不足四，问人数、物价各几何？”大致意思是：“现有几个人共同购买一个物品，每人出8元，则多3元；每人出7元，则差4元。问人数、物品的价格各是多少？”如果设共有 x 人，物品的价格为 y 元，那么根据题意可列出方

程组为 $\begin{cases} 8x-3=y \\ 7x+4=y \end{cases}$.

【分析】根据“ $8 \times \text{人数} - \text{多出的钱数} = \text{物品的价格和}$ $7 \times \text{人数} + \text{差的钱数} = \text{物品的价格}$ ”列方程即可得.

【解答】解：设共有 x 人，物品的价格为 y 元，

根据题意，可列方程组为 $\begin{cases} 8x-3=y \\ 7x+4=y \end{cases}$,

故答案为： $\begin{cases} 8x-3=y \\ 7x+4=y \end{cases}$.

【点评】本题主要考查由实际问题抽象出二元一次方程组，解题的关键是掌握理解题意，找到题目蕴含的相等关系.

15. (3 分) 甲乙两位运动员在一次射击训练中各打五发，成绩的平均环数相同，甲的方差为 1.6；乙的成绩（环）为：7，8，10，6，9，那么这两位运动员中 甲 的成绩较稳定.

【分析】利用方差的公式求得乙的方差，与甲的方差比较，方差较小的成绩稳定.

【解答】解：乙的平均成绩为 $(7+8+10+6+9) \div 5 = 8$,

方差为： $\frac{1}{5}[(7-8)^2 + (8-8)^2 + (10-8)^2 + (6-8)^2 + (9-8)^2] = 2$,

$\therefore$ 甲的方差为 1.6,

$\therefore$ 甲的方差较小,

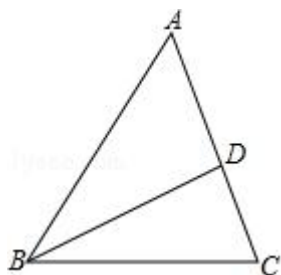
$\therefore$ 成绩较稳定的是甲,

故答案为：甲.

【点评】本题考查了方差的知识，解题的关键是了解方程的意义并牢记方差的计算公式，难度不大.

16. (3 分) 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AC 上， $AD = 2DC$ ， $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，那么

$\overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$. (用含向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的式子表示)



【分析】利用三角形法则可知： $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ ，求出 $\overrightarrow{AD}$ 即可解决问题.

【解答】解：∵ $AD = 2DC$,

$$\therefore AD = \frac{2}{3}AC,$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b},$$

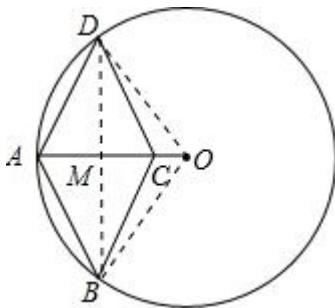
$$\text{故答案为 } -\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}.$$

【点评】本题考查平面向量，三角形法则等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

17. (3分) 如果一个四边形有且只有三个顶点在圆上，那么称这个四边形是该圆的“联络四边形”，已知圆的半径长为5，这个圆的一个联络四边形是边长为 $2\sqrt{5}$ 的菱形，那么这个菱形不在圆上的顶点与圆心的距离是 1.

【分析】先根据题意画出图形，连接 BD 、 OD ，设 $AM = x$ ，根据 $AD^2 - AM^2 = OD^2 - OM^2$ ，列出方程，求出 x ，再根据 $OC = OA - AM - CM$ 计算即可.

【解答】解：根据题意画图如下：



连接 BD ，与 AC 交与点 M ，

∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore \angle AMD = \angle DMC = 90^\circ,$$

$$\angle ACD = \angle ACB, CD = CB, AM = CM,$$

$$\therefore DM^2 = AD^2 - AM^2,$$

设 $AM = x$ ，

$$\text{则 } DM^2 = (2\sqrt{5})^2 - x^2,$$

连接 OD 、 OB ，

在 $\triangle OCD$ 和 $\triangle OCB$ 中，

$$\begin{cases} OD=OB \\ OC=OC, \\ CD=CB \end{cases}$$

$\therefore \triangle OCD \cong \triangle OCB$ (SSS),

$\therefore \angle OCD = \angle OCB$,

$\therefore \angle ACD + \angle OCD = \angle ACB + \angle OCB = 180^\circ$,

$\therefore OC$ 与 AC 在一条直线上,

$\therefore \triangle OMD$ 是一个直角三角形,

$$OM = OA - AM = 5 - x,$$

$$\therefore DM^2 = OD^2 - OM^2,$$

$$= 5^2 - (5 - x)^2,$$

$$\therefore (2\sqrt{5})^2 - x^2 = 5^2 - (5 - x)^2,$$

$$x = 2,$$

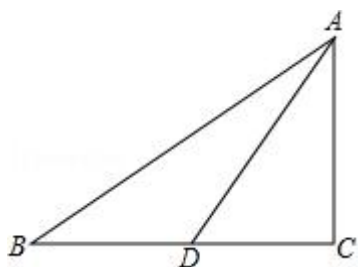
$$\therefore AM = CM = 2,$$

$$\therefore OC = OA - AM - CM = 5 - 2 - 2 = 1.$$

故答案为: 1.

【点评】此题考查了圆的性质与计算,用到的知识点是菱形的性质、勾股定理,关键是
根据题意画出图形,列出方程.

18. (3分) 如图, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 2$, 点 D 是边 BC 的中点, $\angle ABC = \angle CAD$, 将 ACD 沿直线 AD 翻折, 点 C 落在点 E 处, 连结 BE , 那么线段 BE 的长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



【分析】证 $\triangle ABC \sim \triangle DAC$, 得出 $AC^2 = BC \times CD = 2$, $AC = \sqrt{2}$, 由勾股定理得出 $AD = \sqrt{3}$, 由折叠的性质得 $ED = CD = 1$, $\angle ADE = \angle ADC$, 得出 $BD = ED$, 作 $DF \perp BE$ 于 F , 则 $BF = EF$, $\angle BDF = \angle EDF$, 证 $\triangle BDF \sim \triangle DAC$, 求出 $BF = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即可得出答案.

【解答】解: 如图所示:

$\because BC=2$, 点 D 是边 BC 的中点,

$$\therefore BD=CD=1,$$

$$\because \angle ABC = \angle CAD, \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DAC,$$

$$\therefore AC:CD=BC:AC,$$

$$\therefore AC^2 = BC \times CD = 2 \times 1 = 2,$$

$$\therefore AC = \sqrt{2},$$

$$\therefore AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3},$$

由折叠的性质得: $ED=CD=1$, $\angle ADE = \angle ADC$,

$$\therefore BD=ED,$$

作 $DF \perp BE$ 于 F , 则 $BF=EF$, $\angle BDF = \angle EDF$,

$$\therefore \angle BDF + \angle ADC = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ,$$

$$\because \angle ADC + \angle DAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDF = \angle DAC,$$

$$\text{又} \because \angle DFB = \angle C = 90^\circ,$$

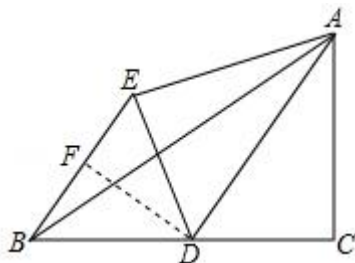
$$\therefore \triangle BDF \sim \triangle DAC,$$

$$\therefore \frac{BF}{CD} = \frac{BD}{AD}, \text{ 即 } \frac{BF}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore BF = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore BE = 2BF = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{故答案为: } \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$



【点评】 本题考查了翻折变换的性质、相似三角形的判定与性质、勾股定理、等腰三角形的性质等知识; 熟练掌握翻折变换和等腰三角形的性质, 证明三角形相似是解题的关键.

三、解答题。

19. 计算: $\sqrt{4\frac{1}{2}} + 2\frac{1}{2} + (\sqrt{2}+1)^{-1} + (\sqrt{2}-1)^0$.

【分析】根据实数运算的法则计算即可.

【解答】解: 原式 $= \frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} + (\sqrt{2}-1) + 1 = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.

【点评】本题考查了实数的运算, 熟练掌握运算法则是解题的关键.

20. 解方程: $\frac{x}{x+3} - \frac{6}{9-x^2} = \frac{1}{x-3}$.

【分析】两边乘 $(x+3)(x-3)$ 化为整式方程即可解决问题.

【解答】解: 两边乘 $(x+3)(x-3)$ 得到: $x(x-3) + 6 = x+3$

解得 $x_1 = 1, x_2 = 3$,

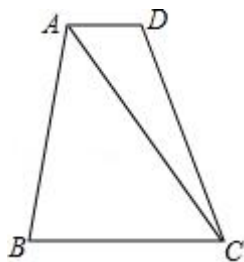
经检验: $x = 1$ 是分式方程的解.

【点评】本题考查解分式方程, 解题的关键是熟练掌握解分式方程的步骤, 注意解分式方程必须检验.

21. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = 2$, $BC = 5$, $\angle BAC = 45^\circ$, $\cos \angle ACB = \frac{3}{5}$

(1) 求线段 AC 的长;

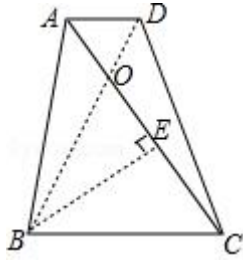
(2) 联结 BD , 交对角线 AC 于点 O , 求 $\angle ADO$ 的余切值.



【分析】(1) 如图, 过点 B 作 $BE \perp AC$ 于点 E , 根据已知条件和 $\cos \angle ACB = \frac{3}{5}$ 可得, $CE = 3$, $AE = BE = 4$, 进而可求 AC 的长;

(2) 结合 (1) 和 $AD \parallel BC$, 可得 $\frac{AD}{BC} = \frac{AO}{OC}$, 得 AO 和 OC 的长, 从而可求 OE 的长, 进而得 $\angle ADO$ 的余切值即为 $\angle BOE$ 的余切值.

【解答】解: (1) 如图, 过点 B 作 $BE \perp AC$ 于点 E ,



$$\therefore \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAC = 45^\circ,$$

$$\therefore AE = BE,$$

$$\because \cos \angle ACB = \frac{3}{5},$$

$$\text{即 } \frac{CE}{BC} = \frac{3}{5},$$

$$\because BC = 5,$$

$$\therefore CE = 3,$$

$$\therefore BE = \sqrt{BC^2 - CE^2} = 4,$$

$$\therefore AE = BE = 4,$$

$$\therefore AC = AE + EC = 4 + 3 = 7.$$

答：线段 AC 的长为 7；

$$(2) \because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{AD}{BC} = \frac{AO}{OC},$$

$$\therefore \frac{2}{5} = \frac{AO}{7-AO},$$

$$\text{解得 } AO = 2,$$

$$\therefore OC = 5,$$

$$\therefore OE = OC - CE = 5 - 3 = 2,$$

$$\therefore \frac{OE}{BE} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\because \angle ADO = \angle BOE,$$

$$\therefore \cot \angle ADO = \cot \angle BOE = \frac{1}{2}.$$

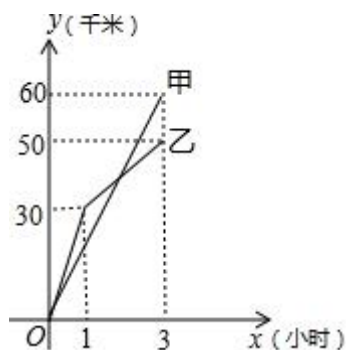
$$\therefore \angle ADO \text{ 的余切值即为 } \angle BOE \text{ 的余切值为 } \frac{1}{2}.$$

【点评】 本题考查了梯形、解直角三角形，解决本题的关键是掌握梯形的性质．

22. 如图, 反映了甲、乙两名自行车爱好者同时骑车从 A 地到 B 地进行训练时行驶路程 y (千米) 和行驶时间 x (小时) 之间关系的部分图象, 根据图象提供的信息, 解答下列问题:

(1) 求乙的行驶路程 y 和行驶时间 x ($1 \leq x \leq 3$) 之间的函数解析式;

(2) 如果甲的速度一直保持不变, 乙在骑行 3 小时之后又以第 1 小时的速度骑行, 结果两人同时到达 B 地, 求 A 、 B 两地之间的距离.



【分析】(1) 根据函数图象中的数据, 可以求得乙的行驶路程 y 和行驶时间 x ($1 \leq x \leq 3$) 之间的函数解析式;

(2) 根据函数图象中的数据, 可以分别求得甲的速度和乙开始的速度, 然后设出 A 、 B 两地之间的距离, 再根据甲的速度一直保持不变, 乙在骑行 3 小时之后又以第 1 小时的速度骑行, 结果两人同时到达 B 地, 可以列出相应的方程, 从而可以得到 A 、 B 两地之间的距离.

【解答】解: (1) 设乙的行驶路程 y 和行驶时间 x ($1 \leq x \leq 3$) 之间的函数解析式为 $y = kx + b$,

$$\begin{cases} k + b = 30 \\ 3k + b = 50 \end{cases},$$

解得, $\begin{cases} k = 10 \\ b = 20 \end{cases}$,

即乙的行驶路程 y 和行驶时间 x ($1 \leq x \leq 3$) 之间的函数解析式是 $y = 10x + 20$;

(2) 设 A 、 B 两地之间的距离为 S 千米,

甲的速度为 $60 \div 3 = 20$ (千米/时), 乙开始的速度为 $30 \div 1 = 30$ (千米/时),

$$\frac{S-60}{20} = \frac{S-50}{30},$$

解得, $S = 80$,

答: A 、 B 两地之间的距离是 80 千米.

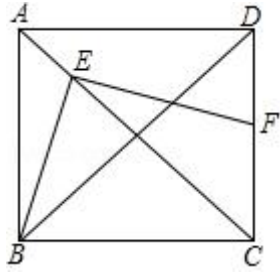
【点评】 本题考查一次函数的应用, 解答本题的关键是明确题意, 利用一次函数的性质

和数形结合的思想解答.

23. 如图, 已知四边形 $ABCD$ 是矩形, 点 E 在对角线 AC 上, 点 F 在边 CD 上 (点 F 与点 C 、 D 不重合), $BE \perp EF$, 且 $\angle ABE + \angle CEF = 45^\circ$.

(1) 求证: 四边形 $ABCD$ 是正方形;

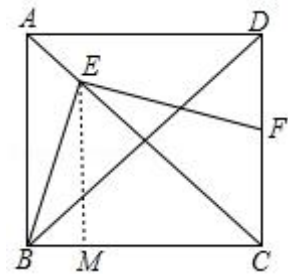
(2) 连结 BD , 交 EF 于点 Q , 求证: $DQ \cdot BC = CE \cdot DF$.



【分析】(1) 作 $EM \perp BC$ 于点 M , 可证 $EM \parallel AB$, 可得 $\angle ABE = \angle BEM$, $\angle BAC = \angle CEM$, 由角的数量关系可得 $\angle CEM = 45^\circ = \angle BAC$, 可证 $AB = BC$, 可得结论;

(2) 通过证明 $\triangle BCE \sim \triangle FDQ$, 可得 $\frac{BC}{DF} = \frac{CE}{DQ}$, 可得结论.

【解答】证明: (1) 如图, 作 $EM \perp BC$ 于点 M ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AB \perp BC$,

$\therefore EM \parallel AB$,

$\therefore \angle ABE = \angle BEM$, $\angle BAC = \angle CEM$,

$\because \angle ABE + \angle CEF = 45^\circ$,

$\therefore \angle BEM + \angle CEF = 45^\circ$,

$\because BE \perp EF$,

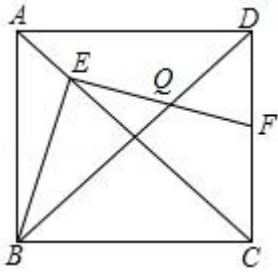
$\therefore \angle CEM = 45^\circ = \angle BAC$,

$\therefore \angle BAC = \angle ACB = 45^\circ$,

$\therefore AB = BC$,

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 是正方形;

(2) 如图,



$$\begin{aligned}
 &\because \angle BEF + \angle BCF + \angle EFC + \angle EBC = 360^\circ, \\
 &\therefore \angle EBC + \angle EFC = 180^\circ, \text{ 且 } \angle EFC + \angle QFD = 180^\circ, \\
 &\therefore \angle DFQ = \angle EBC, \\
 &\because \text{四边形 } ABCD \text{ 是正方形}, \\
 &\therefore \angle ACB = \angle BDC = 45^\circ, \\
 &\therefore \triangle BCE \sim \triangle FDQ, \\
 &\therefore \frac{BC}{DF} = \frac{CE}{DQ}, \\
 &\therefore BC \cdot DQ = CE \cdot DF.
 \end{aligned}$$

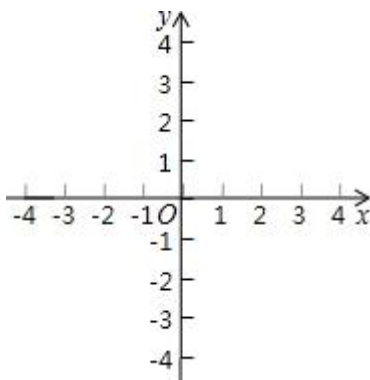
【点评】 本题考查了正方形的判定和性质, 矩形的性质, 相似三角形的判定和性质, 灵活运用这些性质进行推理是本题的关键.

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $y = x^2 + mx + n$ 经过点 $A(2, -2)$, 对称轴是直线 $x = 1$, 顶点为点 B , 抛物线与 y 轴交于点 C .

(1) 求抛物线的表达式和点 B 的坐标;

(2) 将上述抛物线向下平移 1 个单位, 平移后的抛物线与 x 轴正半轴交于点 D , 求 $\triangle BCD$ 的面积;

(3) 如果点 P 在原抛物线上, 且在对称轴的右侧, 联结 BP 交线段 OA 于点 Q , $\frac{BQ}{PQ} = \frac{1}{5}$, 求点 P 的坐标.



【分析】(1) 先根据对称轴求出 m ，再将点 A 坐标代入抛物线解析式中求出 n ，得出抛物线解析式，最后配成顶点式，即可得出结论；

(2) 先求出点 D 坐标，进而求出直线 CD 解析式，得出点 E 坐标，再用面积公式求解即可得出结论；

(3) 设出点 P 坐标，构造出 $\triangle PMQ \sim \triangle PNB$ ，得出 $\frac{QM}{BN} = \frac{PM}{PN} = \frac{PQ}{PB}$ ，表示出 $QM = \frac{5}{6}(a^2 - 2a + 1)$ ， $PM = \frac{5}{6}(a - 1)$ ，进而表示出 $Q(\frac{1}{6}a + \frac{5}{6}, \frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{3}a - \frac{11}{6})$ ，代入直线 OA 中，即可得出结论。

【解答】解：(1) $\because$ 抛物线 $y = x^2 + mx + n$ 的对称轴是直线 $x = 1$ ，

$$\therefore -\frac{m}{2} = 1,$$

$$\therefore m = -2,$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为 } y = x^2 - 2x + n,$$

$$\therefore \text{抛物线过点 } (2, -2),$$

$$\therefore 4 - 2 \times 2 + n = -2,$$

$$\therefore n = -2,$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = x^2 - 2x - 2 = (x - 1)^2 - 3,$$

$$\therefore \text{顶点 } B \text{ 的坐标为 } (1, -3);$$

$$(2) \text{ 如图 1, 由平移知, 平移后的抛物线解析式为 } y = x^2 - 2x - 3,$$

$$\text{令 } y = 0, \text{ 则 } x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$\therefore x = -1 \text{ 或 } x = 3,$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 在 } x \text{ 正半轴上,}$$

$$\therefore D(3, 0),$$

$$\text{针对于抛物线 } y = x^2 - 2x - 2,$$

$$\text{令 } x = 0, \text{ 则 } y = -2,$$

$$\therefore C(0, -2),$$

$$\therefore \text{直线 } CD \text{ 的解析式为 } y = \frac{2}{3}x - 2,$$

$$\text{记直线 } CD \text{ 与直线 } x = 1 \text{ 的交点为 } E, \text{ 则 } E(1, -\frac{4}{3}),$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} BE \cdot |x_D - x_C| = \frac{1}{2} \times \left| -\frac{4}{3} - (-3) \right| \times 3 = \frac{5}{2};$$

(3) 如图 2, 设 $P(a, a^2 - 2a - 2)$,

过点 P 作 PN 垂直于直线 $x = 1$ 于点 N 过点 Q 作 $QM \perp PN$ 于 M ,

$$\therefore QM \parallel NB,$$

$$\therefore \triangle PMQ \sim \triangle PNB,$$

$$\therefore \frac{QM}{BN} = \frac{PM}{PN} = \frac{PQ}{PB},$$

$$\therefore \frac{BQ}{PQ} = \frac{1}{5},$$

$$\therefore \frac{QM}{BN} = \frac{PM}{PN} = \frac{5}{6},$$

$$\therefore PN = a - 1, BN = a^2 - 2a - 2 + 3 = a^2 - 2a + 1,$$

$$\therefore \frac{QM}{a^2 - 2a + 1} = \frac{PM}{a - 1} = \frac{5}{6},$$

$$\therefore QM = \frac{5}{6}(a^2 - 2a + 1), PM = \frac{5}{6}(a - 1),$$

$$\therefore MN = PN - PM = \frac{1}{6}(a - 1), \text{ 点 } Q \text{ 与点 } B \text{ 的纵坐标之差的绝对值为 } \frac{1}{6}(a^2 - 2a + 1),$$

$$\therefore Q\left(\frac{1}{6}a + \frac{5}{6}, \frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{3}a - \frac{11}{6}\right),$$

$$\therefore A(2, -2),$$

$$\therefore \text{直线 } OA \text{ 的解析式为 } y = -x,$$

$\therefore$ 点 Q 在线段 OA 上,

$$\therefore \frac{1}{6}a + \frac{5}{6} + \frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{3}a - \frac{11}{6} = 0,$$

$$\therefore a = -3 \text{ (舍)} \text{ 或 } a = 4,$$

$$\therefore P(4, 6).$$

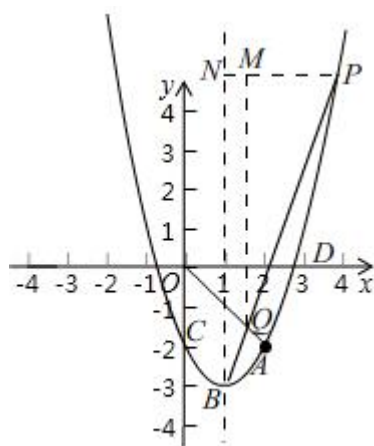


图2

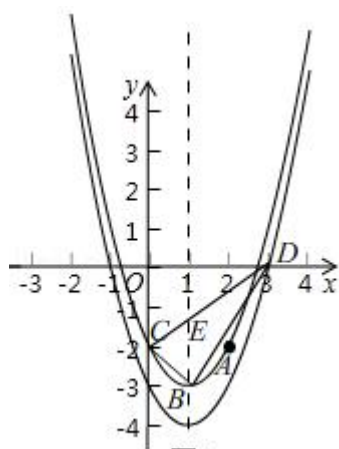


图1

【点评】此题是二次函数综合题，主要考查了待定系数法，三角形面积的求法，平移的性质，相似三角形的性质，构造出相似三角形，进而表示出点 Q 的坐标是解本题的关键.

25. 已知 AB 是 $\odot O$ 的一条弦，点 C 在 $\odot O$ 上，联结 CO 并延长，交弦 AB 于点 D ，且 $CD = CB$.

(1) 如图 1，如果 BO 平分 $\angle ABC$ ，求证： $\widehat{AB} = \widehat{BC}$;

(2) 如图 2，如果 $AO \perp OB$ ，求 $AD:DB$ 的值;

(3) 延长线段 AO 交弦 BC 于点 E ，如果 $\triangle EOB$ 是等腰三角形，且 $\odot O$ 的半径长等于 2，求弦 BC 的长.

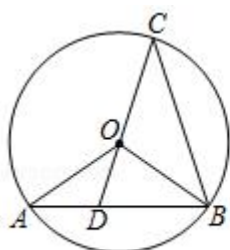


图 1

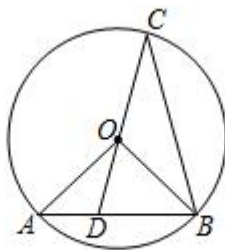
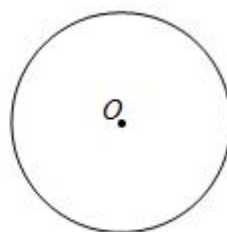


图 2



备用图

【分析】(1) 证明 $\triangle OBA \cong \triangle OBC$ 即可解决问题.

(2) 如图 2 中, 作 $DM \perp OB$ 于 M , $DN \perp OA$ 于 N , 设 $OM = a$. 首先证明 $\angle CDB = \angle CBD = 75^\circ$, 解直角三角形求出 AD , BD (用 a 表示) 即可解决问题.

(3) 因为 $\angle OEB = \angle C + \angle COE > \angle OBE$, 推出 $OE \neq OB$, 分两种情形: 如图 3 - 1 中, 当 $BO = BE$ 时, 如图 3 - 2 中, 当 $EO = EB$ 时, 分别求解即可解决问题.

【解答】(1) 证明: 如图 1 中,

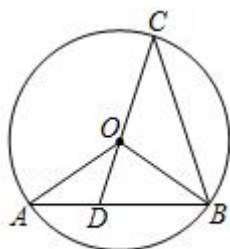


图 1

$\because BO$ 平分 $\angle ABC$,
 $\therefore \angle ABO = \angle CBO$,
 $\because OB = OA = OC$,
 $\therefore \angle A = \angle ABO$, $\angle C = \angle OBC$,
 $\therefore \angle A = \angle C$,
 $\because OB = OB$,
 $\therefore \triangle OBA \cong \triangle OBC$ (AAS),
 $\therefore AB = BC$,
 $\therefore \widehat{AB} = \widehat{BC}$.

(2) 解: 如图 2 中, 作 $DM \perp OB$ 于 M , $DN \perp OA$ 于 N , 设 $OM = a$.

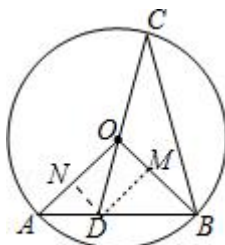


图 2

$\because OA \perp OB$,
 $\therefore \angle MON = \angle DMO = \angle DNO = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $DMON$ 是矩形,
 $\therefore DN = OM = a$,
 $\because OA = OB$, $\angle AOB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle A = \angle ABO = 45^\circ$,
 $\because OC = OB$, $CD = CB$,
 $\therefore \angle C = \angle OBC$, $\angle CDB = \angle CBD$,
 $\because \angle C + \angle CDB + \angle CBD = 180^\circ$,
 $\therefore 3\angle C + 90^\circ = 180^\circ$,
 $\therefore \angle C = 30^\circ$,
 $\therefore \angle CDB = \angle CBD = 75^\circ$,
 $\because \angle DMB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle MDB = \angle DBM = 45^\circ$,
 $\therefore DM = BM$, $\angle ODM = 30^\circ$,
 $\therefore DM = \sqrt{3}OM = \sqrt{3}a$, $DN = \sqrt{2}DM = \sqrt{6}a$, $AD = \sqrt{2}DN = \sqrt{2}a$,
 $\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{6}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3) 解: 如图 3-1 中, 当 $BO = BE$ 时,

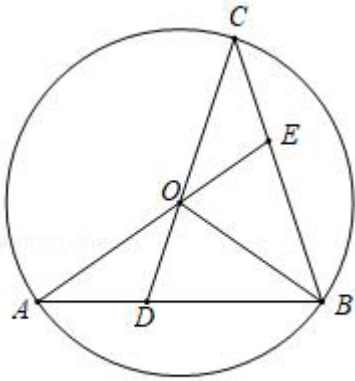


图3-1

$\because CD = CB$,
 $\therefore \angle CDB = \angle CBD$,
 $\therefore \angle A + \angle AOD = \angle OBA + \angle OBC$,
 $\because \angle A = \angle ABO$,
 $\therefore \angle AOD = \angle OBC = \angle C$,

$$\because \angle AOD = \angle COE,$$

$$\therefore \angle C = \angle COE = \angle CBO,$$

$$\because \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle OCE \sim \triangle BCO,$$

$$\therefore \frac{OC}{BC} = \frac{CE}{OC},$$

$$\therefore \frac{2}{2+EC} = \frac{EC}{2},$$

$$\therefore EC^2 + 2EC - 4 = 0,$$

$$\text{解得 } EC = -1 + \sqrt{5} \text{ 或 } -1 - \sqrt{5} \text{ (舍去)},$$

$$\therefore BC = \sqrt{5} + 1.$$

如图 3-2 中, 当 $EO = EB$ 时, 同法可证 $\triangle OEB$ 是等腰直角三角形,

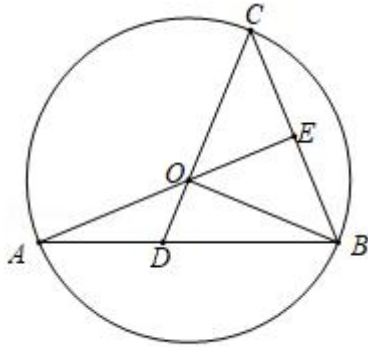


图3-1

$$\therefore EO = EB = EC = \frac{\sqrt{2}}{2}OB = \sqrt{2},$$

$$\therefore BC = 2\sqrt{2},$$

$$\because \angle OEB = \angle C + \angle COE > \angle OBE,$$

$$\therefore OE \neq OB,$$

综上所述, BC 的值为 $\sqrt{5} + 1$ 或 $2\sqrt{2}$.

【点评】 本题属于圆综合题, 考查了全等三角形的判定和性质, 等腰三角形的性质, 相似三角形的判定和性质, 解直角三角形等知识, 解题的关键是正确寻找全等三角形或相似三角形解决问题, 学会利用参数解决问题, 属于中考压轴题.