

2020 年上海市静安区中考数学一模试卷

答案解析版

一、选择题：

1. 已知 $a = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, $b = \sqrt{x} - \sqrt{y}$, 那么 ab 的值为 ()

- A. $2\sqrt{x}$ B. $2\sqrt{y}$ C. $x-y$ D. $x+y$

【答案】 C

【解析】

【分析】

利用平方差公式进行计算, 即可得到答案.

【详解】 解: $\because a = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, $b = \sqrt{x} - \sqrt{y}$,

$$\therefore ab = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = x - y;$$

故选择: C.

【点睛】 本题考查了二次根式的乘法运算, 解题的关键是熟练运用平方差公式进行计算.

2. 已知点 P 在线段 AB 上, 且 $AP : PB = 2 : 3$, 那么 $AB : PB$ 为 ()

- A. $3 : 2$ B. $3 : 5$ C. $5 : 2$ D. $5 : 3$

【答案】 D

【解析】

【分析】

根据比例的合比性质直接求解即可.

【详解】 解: 由题意 $AP : PB = 2 : 3$,

$$AB : PB = (AP + PB) : PB = (2 + 3) : 3 = 5 : 3;$$

故选择: D.

【点睛】 本题主要考查比例线段问题，关键是根据比例的合比性质解答．

3. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上， $DE \parallel BC$ ， $AD : DB = 4 : 5$ ，下列结论中正确的是

A. $\frac{DE}{BC} = \frac{4}{5}$ B. $\frac{BC}{DE} = \frac{9}{4}$ C. $\frac{AE}{AC} = \frac{4}{5}$ D. $\frac{EC}{AC} = \frac{5}{4}$

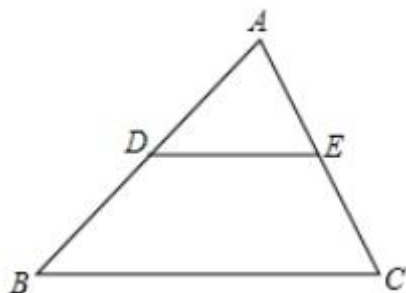
【答案】 B

【解析】

【分析】

根据平行线分线段成比例，相似三角形性质，以及合比性质，分别对每个选项进行判断，即可得到答案．

【详解】 解：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， $AD : DB = 4 : 5$ ，则



$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AD+DB} = \frac{4}{9}, \text{ 故 A 错误;}$$

$$\text{则 } \frac{BC}{DE} = \frac{9}{4}, \text{ 故 B 正确;}$$

$$\text{则 } \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{4}{9}, \text{ 故 C 错误;}$$

$$\text{则 } \frac{EC}{AC} = \frac{DB}{AB} = \frac{5}{9}, \text{ 故 D 错误.}$$

故选择：B.

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质，平行线分线段成比例，合比性质，解题的关键是熟练掌握平行线分线段成比例的性质．

4. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 如果 $a=3b$, 那么 $\angle A$ 的余切值为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

【答案】 A

【解析】

【分析】

根据锐角三角函数的定义, 直接得出 $\cot A = \frac{b}{a}$, 即可得出答案.

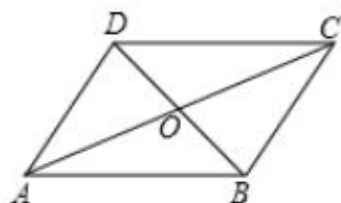
【详解】 解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $a=3b$,

$$\therefore \cot A = \frac{b}{a} = \frac{1}{3};$$

故选择: A.

【点睛】 此题主要考查了锐角三角函数的定义, 熟练地应用锐角三角函数的定义是解决问题的关键.

5. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 设 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, 下列式子中正确的是 ()



- A. $\overrightarrow{DC} = \vec{a} + \vec{b}$ B. $\overrightarrow{DC} = \vec{a} - \vec{b}$;
C. $\overrightarrow{DC} = -\vec{a} + \vec{b}$ D. $\overrightarrow{DC} = -\vec{a} - \vec{b}$.

【答案】 C

【解析】

【分析】

由平行四边形性质，得 $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ ，由三角形法则，得到 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ ，代入计算即可得到答案.

【详解】解：∵ 四边形 ABCD 是平行四边形，

$$\therefore \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB},$$

$$\because \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b},$$

在 $\triangle OAB$ 中，有 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} + \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{DC} = -\vec{a} + \vec{b};$$

故选择：C.

【点睛】此题考查了平面向量的知识以及平行四边形的性质. 注意掌握平行四边形法则与三角形法则的应用是解此题的关键.

6. 如果将抛物线 $y = x^2 - 2$ 平移，使平移后的抛物线与抛物线 $y = x^2 - 8x + 9$ 重合，那么它平移的过程可以是（ ）

- A. 向右平移 4 个单位，向上平移 11 个单位
- B. 向左平移 4 个单位，向上平移 11 个单位
- C. 向左平移 4 个单位，向上平移 5 个单位
- D. 向右平移 4 个单位，向下平移 5 个单位.

【答案】D

【解析】

【分析】

根据平移前后的抛物线的顶点坐标确定平移方法即可得解.

【详解】解：抛物线 $y = x^2 - 2$ 的顶点坐标为：(0, -2),

$\because y = x^2 - 8x + 9 = (x - 4)^2 - 7$ ，则顶点坐标为：(4, -7),

$\therefore$ 顶点由 (0, -2) 平移到 (4, -7)，需要向右平移 4 个单位，再向下平移 5 个单位，

故选择：D.

【点睛】本题考查了二次函数图象与几何变换，此类题目，利用顶点的变化确定抛物线解析式更简便.

二、填空题：

7. 因式分解： $x^2 - 5x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x(x-5)$

【解析】

【分析】

直接提公因式，即可得到答案.

【详解】解： $x^2 - 5x = x(x - 5)$ ，

故答案为： $x(x - 5)$.

【点睛】本题考查了提公因式法因式分解，解题的关键是熟练掌握因式分解的方法.

8. 已知 $f(x) = \sqrt{3x+1}$ ，那么 $f(3) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\sqrt{10}$

【解析】

【分析】

直接把 $x = 3$ 代入解析式，即可得到答案.

【详解】解： $\because f(x) = \sqrt{3x+1}$ ，

$\therefore$ 当 $x = 3$ 时，有

$$f(3) = \sqrt{3 \times 3 + 1} = \sqrt{10};$$

故答案为: $\sqrt{10}$.

【点睛】 本题考查了求函数值, 解题的关键是熟练掌握函数的解析式.

9. 方程 $\frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2}$ 的根为_____.

【答案】 $x=3$

【解析】

【分析】

方程两边同时乘以 $2(x+1)$, 变为整式方程, 然后解方程, 最后检验, 即可得到答案.

【详解】 解: $\frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 方程两边同时乘以 $2(x+1)$, 得: $2(x-1) = x+1$,

解得: $x=3$,

经检验: $x=3$ 是原分式方程的根,

$\therefore$ 方程 $\frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2}$ 的根为: $x=3$.

故答案为: $x=3$.

【点睛】 本题考查了解分式方程, 解题的关键是熟练掌握解分式方程的步骤, 注意要检验.

10. 已知: $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$, 且 $y \neq 4$, 那么 $\frac{x-3}{y-4} =$ _____.

【答案】 $\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】

由分式的性质和等比性质, 即可得到答案.

【详解】 解: $\because \frac{x}{y} = \frac{3}{4}$,

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{3}{4} = \frac{-3}{-4},$$

由等比性质，得：

$$\frac{x-3}{y-4} = \frac{3}{4};$$

故答案为： $\frac{3}{4}$.

【点睛】 本题考查了比例的性质，以及分式的性质，解题的关键是熟练掌握等比性质.

11.在 $\triangle ABC$ 中，边 BC 、 AC 上的中线 AD 、 BE 相交于点 G ， $AD=6$ ，那么 $AG=$ _____.

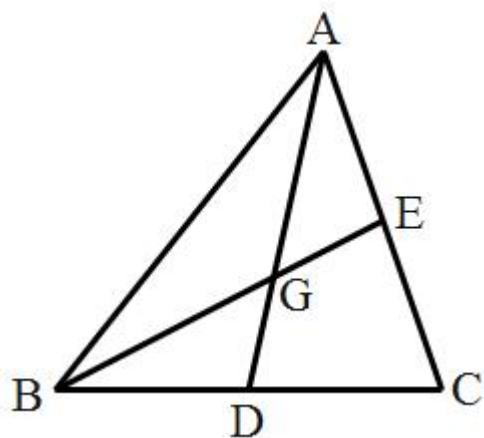
【答案】 4

【解析】

【分析】

由三角形的重心的概念和性质，即可得到答案.

【详解】 解：如图，



$\therefore AD$ 、 BE 是 $\triangle ABC$ 的中线，且交点为点 G ，

$\therefore$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，

$$\therefore AG = \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} \times 6 = 4;$$

故答案为： 4.

【点睛】此题考查了重心的概念和性质：三角形的重心是三角形三条中线的交点，且重心到顶点的距离是它到对边中点的距离的 2 倍.

12. 如果两个相似三角形的对应边的比是 4:5，那么这两个三角形的面积比是_____.

【答案】 16:25

【解析】

【分析】

根据相似三角形的面积的比等于相似比的平方，据此即可求解.

【详解】解：∵两个相似三角形的相似比为： $k = \frac{4}{5}$ ，

∴这两个三角形的面积比 $= k^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ ；

故答案为：16 : 25 .

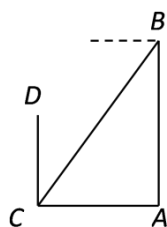
【点睛】本题考查了相似三角形性质，解题的关键是熟记相似三角形的性质.

(1) 相似三角形周长的比等于相似比；

(2) 相似三角形面积的比等于相似比的平方；

(3) 相似三角形对应高的比、对应中线的比、对应角平分线的比都等于相似比.

13. 如图，在大楼 AB 的楼顶 B 处测得另一栋楼 CD 底部 C 的俯角为 60° ，已知 A 、 C 两点间的距离为 15 米，那么大楼 AB 的高度为_____米. (结果保留根号)



【答案】 $15\sqrt{3}$

【解析】

【分析】

由解直角三角形，得 $\tan \angle ACB = \frac{AB}{AC}$ ，即可求出 AB 的值.

【详解】解：根据题意， $\triangle ABC$ 是直角三角形， $\angle A=90^\circ$ ，

$$\therefore \tan \angle ACB = \frac{AB}{AC},$$

$$\therefore AB = AC \cdot \tan \angle ACB = 15 \times \tan 60^\circ = 15\sqrt{3};$$

$\therefore$ 大楼 AB 的高度为 $15\sqrt{3}$ 米.

故答案为： $15\sqrt{3}$.

【点睛】此题考查了解直角三角形的应用——仰角俯角问题，熟练掌握锐角三角函数定义是解本题的关键.

14. 某商场四月份的营业额是 200 万元，如果该商场第二季度每个月营业额的增长率相同，都为 $x(x > 0)$ ，六月份的营业额为 y 万元，那么 y 关于 x 的函数解式是_____.

【答案】 $y = 200(1+x)^2$ 或 $y = 200x^2 + 400x + 200$

【解析】

【分析】

增长率问题，一般用增长后的量=增长前的量 $\times$ （1+增长率），本题可先用 x 表示出五月份的营业额，再根据题意表示出六月份的营业额，即可列出方程求解.

【详解】解：设增长率为 x ，则

五月份的营业额为： $y = 200(1+x)$ ，

六月份的营业额为： $y = 200(1+x)^2 = 200x^2 + 400x + 200$ ；

故答案为： $y = 200(1+x)^2$ 或 $y = 200x^2 + 400x + 200$.

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用中增长率问题，若原来的数量为 a ，平均每次增长或降低的百分率为 x ，经过第一次调整，就调整到 $a \times (1 \pm x)$ ，再经过第二次调整就是 $a \times (1 \pm x)(1 \pm x) = a(1 \pm x)^2$. 增长用“+”，下降用“-”.

15. 矩形的一条对角线长为 26, 这条对角线与矩形一边夹角的正弦值为 $\frac{5}{13}$, 那么该矩形的面积为_____.

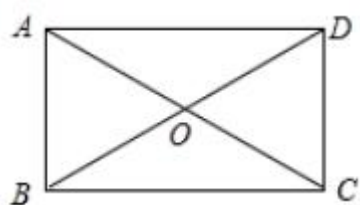
【答案】 240

【解析】

【分析】

由矩形的性质和三角函数求出 AB, 由勾股定理求出 AD, 即可得出矩形的面积.

【详解】 解: 如图所示:



$\because$ 四边形 ABCD 是矩形,

$\therefore \angle BAD = 90^\circ$, $AC = BD = 26$,

$$\because \sin \angle ADB = \frac{AB}{BD} = \frac{5}{13},$$

$$\therefore AB = 26 \times \frac{5}{13} = 10,$$

$$\therefore AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24,$$

$\therefore$ 该矩形的面积为: $24 \times 10 = 240$;

故答案为: 240.

【点睛】 本题考查了矩形的性质、勾股定理、三角函数; 熟练掌握矩形的性质, 由勾股定理求出 AB 和 AD 是解决问题的关键.

16. 已知二次函数 $y = a^2x^2 + 8a^2x + a$ (a 是常数, $a \neq 0$), 当自变量 x 分别取 -6、-4 时, 对应的函数值分别为 y_1 、 y_2 , 那么 y_1 、 y_2 的大小关系是: y_1 _____ y_2 (填“>”、“<”或“=”).

【答案】 >

【解析】

【分析】

先求出抛物线的对称轴为 $x = -4$ ，由 $a^2 > 0$ ，则当 $x < -4$ ， y 随 x 的增大而减小，即可判断两个函数值的大小.

【详解】解：∵ 二次函数 $y = a^2x^2 + 8a^2x + a$ (a 是常数， $a \neq 0$)，

$$\therefore \text{抛物线的对称轴为：} x = -\frac{8a^2}{2a^2} = -4,$$

$$\because a^2 > 0,$$

∴ 当 $x < -4$ ， y 随 x 的增大而减小，

$$\because -6 < -4,$$

$$\therefore y_1 > y_2;$$

故答案为：>.

【点睛】本题考查了二次函数的性质，解题的关键是熟练掌握二次函数的性质进行解题.

17. 平行于梯形两底的直线截梯形的两腰，当两交点之间的线段长度是两底的比例中项时，

我们称这条线段是梯形的“比例中线”. 在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD=4$ ， $BC=9$ ，点 E 、 F

分别在边 AB 、 CD 上，且 EF 是梯形 $ABCD$ 的“比例中线”，那么 $\frac{DF}{FC} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{2}{3}$

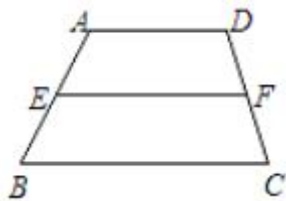
【解析】

【分析】

先利用比例中线的定义，求出 EF 的长度，然后由梯形 $ADFE$ 相似与梯形 $EFCB$ ，得到

$$\frac{DF}{FC} = \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{EF} = \frac{EF}{BC}, \text{ 即可得到答案.}$$

【详解】解：如图，



$\because EF$ 是梯形的比例中线,

$$\therefore EF^2 = AD \cdot BC,$$

$$\therefore EF = \sqrt{4 \times 9} = 6,$$

$\because AD \parallel BC$,

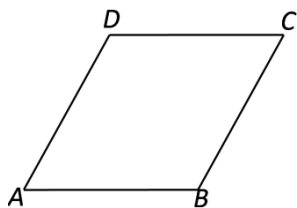
$\therefore$ 梯形 ADFE 相似与梯形 EFCB,

$$\therefore \frac{DF}{FC} = \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{EF} = \frac{EF}{BC} = \frac{2}{3};$$

故答案为: $\frac{2}{3}$.

【点睛】本题考查了相似四边形的性质, 以及比例中项的定义, 解题的关键是熟练掌握相似四边形的性质和比例中线的性质.

18. 如图, 有一菱形纸片 $ABCD$, $\angle A = 60^\circ$, 将该菱形纸片折叠, 使点 A 恰好与 CD 的中点 E 重合, 折痕为 FG , 点 F 、 G 分别在边 AB 、 AD 上, 联结 EF , 那么 $\cos \angle EFB$ 的值为_____.



【答案】 $\frac{1}{7}$

【解析】

【分析】

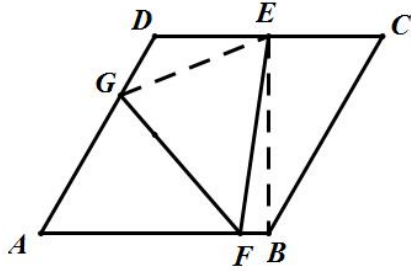
连接 BE , 由菱形和折叠的性质, 得到 $AF = EF$, $\angle C = \angle A = 60^\circ$, 由 $\cos \angle C = \frac{1}{2}$, $\frac{CE}{BC} = \frac{1}{2}$,

得到 $\triangle BCE$ 是直角三角形, 则 $BE = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$, 则 $\triangle BEF$ 也是直角三角形, 设菱形的边长为

m ，则 $EF = m - FB$ ， $BE = \frac{\sqrt{3}}{2}m$ ，由勾股定理，求出 $FB = \frac{1}{8}m$ ，则 $EF = \frac{7}{8}m$ ，即可得

到 $\cos \angle EFB$ 的值.

【详解】解：如图，连接 BE，



$\because$ 四边形 ABCD 是菱形，

$\therefore AB = BC = CD$ ， $\angle C = \angle A = 60^\circ$ ， $AB \parallel DC$ ，

由折叠的性质，得 $AF = EF$ ，

则 $EF = AB - FB$ ，

$\because \cos \angle C = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ，

$\because$ 点 E 是 CD 的中线，

$\therefore \frac{CE}{BC} = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore \cos \angle C = \frac{CE}{BC} = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore \triangle BCE$ 是直角三角形，即 $BE \perp CD$ ，

$\therefore BE \perp AB$ ，即 $\triangle BEF$ 是直角三角形.

设 $BC = m$ ，则 $BE = BC \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}m$ ，

在 $Rt\triangle BEF$ 中， $EF = m - FB$ ，

由勾股定理，得： $FB^2 + BE^2 = EF^2$ ，

$\therefore FB^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (m - FB)^2$ ，

解得： $FB = \frac{1}{8}m$ ，

则 $EF = \frac{7}{8}m$ ，

$$\therefore \cos \angle EFB = \frac{FB}{EF} = \frac{\frac{1}{8}m}{\frac{7}{8}m} = \frac{1}{7}；$$

故答案为： $\frac{1}{7}$ 。

【点睛】 本题考查了解直角三角形，特殊角的三角函数值，菱形的性质，折叠的性质，以及勾股定理的运用，解题的关键是正确作出辅助线，构造直角三角形，从而利用解直角三角形进行解题.

三、解答题：

19.先化简，再求值： $\frac{x-y}{x+2y} \div \frac{x^2-y^2}{x^2+4xy+4y^2}$ ，其中 $x=\sin 45^\circ$ ， $y=\cos 60^\circ$ 。

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】

利用分式的乘法和除法进行化简，再把 x 、 y 的值代入计算，即可得到答案.

【详解】 解： 原式 $= \frac{x-y}{x+2y} \cdot \frac{(x+2y)^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{x+2y}{x+y}$.

当 $x=\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $y=\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ 时，

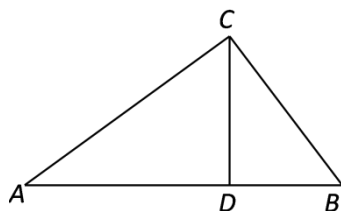
$$\text{原式} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{2} .$$

【点睛】 本题考查了特殊角的三角函数值，分式的化简求值，以及分式的混合运算，解题的关键是正确的进行化简，掌握特殊角的三角函数值.

20.如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=20$, $\sin A = \frac{3}{5}$, $CD \perp AB$, 垂足为 D .

(1) 求 BD 的长;

(2) 设 $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, 用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$.



【答案】 (1) 9; (2) $\frac{16}{25}\vec{a} - \frac{16}{25}\vec{b}$

【解析】

【分析】

(1) 根据解直角三角形, 先求出 CD 的长度, 然后求出 AD , 由等角的三角函数值相等,

有 $\tan \angle DCB = \tan \angle A$, 即可求出 BD 的长度;

(2) 由 (1) 可求 AB 的长度, 根据三角形法则, 求出 $\overrightarrow{AB}$, 然后求出 $\overrightarrow{AD}$.

【详解】 解: (1) $\because CD \perp AB$,

$$\therefore \angle ADC = \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACD \text{ 中, } \sin A = \frac{CD}{AC},$$

$$\therefore CD = AC \cdot \sin A = 20 \times \frac{3}{5} = 12.$$

$$\therefore AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16,$$

$$\therefore \tan A = \frac{CD}{AD} = \frac{3}{4}.$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCB + \angle B = \angle A + \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCB = \angle A.$$

$$\therefore BD = CD \cdot \tan \angle DCB = CD \cdot \tan A = 12 \times \frac{3}{4} = 9;$$

$$(2) \quad \because AB = AD + DB = 16 + 9 = 25,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{16}{25},$$

$$\text{又} \because \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} - \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{16}{25} \overrightarrow{AB} = \frac{16}{25} \vec{a} - \frac{16}{25} \vec{b}.$$

【点睛】本题考查了解直角三角形，向量的运算，勾股定理，解题的关键是熟练掌握解直角三角形求三角形的各边长度.

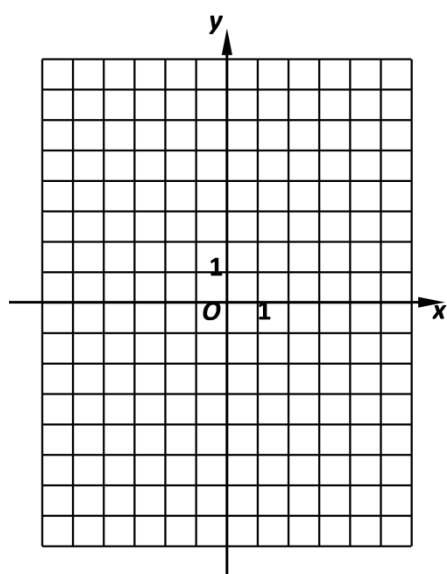
21. 已知在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = x^2 + bx + 1$ (b 为常数) 的对称轴是直线 $x=1$.

(1) 求该抛物线的表达式;

(2) 点 $A(8, m)$ 在该抛物线上，它关于该抛物线对称轴对称的点为 A' ，求点 A 的坐标;

(3) 选取适当的数据填入下表，并在如图 5 所示的平面直角坐标系内描点，画出该抛物线.

x	...						...
y	...						...



【答案】(1) $y = x^2 - 2x + 1$; (2) $(-6, 49)$; (3) 答案见解析.

【解析】

【分析】

- (1) 由对称轴为 $x=1$ ，即可求出 b 的值，然后代入即可；
- (2) 把 $x=8$ 代入解析式，求出 m ，利用抛物线的对称轴性质，即可得到点 A' 坐标；
- (3) 选取对称轴左右两边的几个整数，计算出函数值，然后画出抛物线即可.

【详解】解：(1) $\because$ 对称轴为 $x = -\frac{b}{2}$,

$$\therefore -\frac{b}{2} = 1.$$

$$\therefore b = -2;$$

$$\therefore \text{抛物线的表达式为 } y = x^2 - 2x + 1.$$

(2) $\because$ 点 $A(8, m)$ 在该抛物线的图像上,

$$\therefore \text{当 } x=8 \text{ 时, } y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = (8-1)^2 = 49.$$

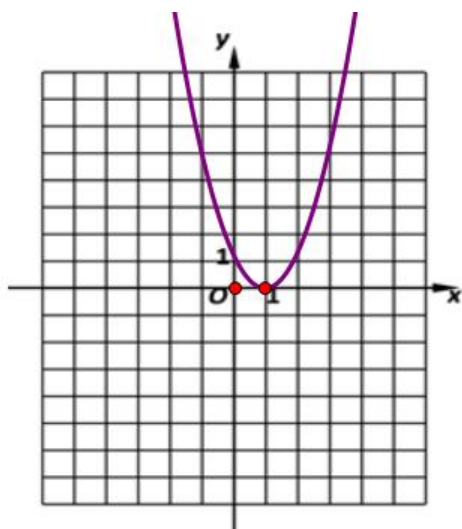
$$\therefore \text{点 } A(8, 49).$$

$$\therefore \text{点 } A(8, 49) \text{ 关于对称轴对称的点 } A' \text{ 的坐标为 } (-6, 49).$$

(3) 列表，如下：

x	...	-1	0	1	2	3	...
y	...	4	1	0	1	4	...

抛物线图像如下图：



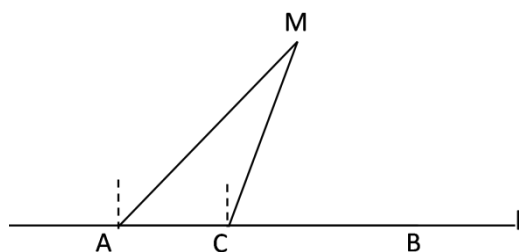
【点睛】本题考查了二次函数的性质和图像，解题的关键是熟练掌握二次函数的性质和图像的画法.

22.如图，在东西方向的海岸线 l 上有长为 300 米的码头 AB ，在码头的最西端 A 处测得轮船 M 在它的北偏东 45° 方向上；同一时刻，在 A 点正东方向距离 100 米的 C 处测得轮船 M 在北偏东 22° 方向上.

(1) 求轮船 M 到海岸线 l 的距离；(结果精确到 0.01 米)

(2) 如果轮船 M 沿着南偏东 30° 的方向航行，那么该轮船能否行至码头 AB 靠岸？请说明理由.

(参考数据： $\sin 22^\circ \approx 0.375$ ， $\cos 22^\circ \approx 0.927$ ， $\tan 22^\circ \approx 0.404$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$.)



【答案】(1) 167.79；(2) 能.理由见解析.

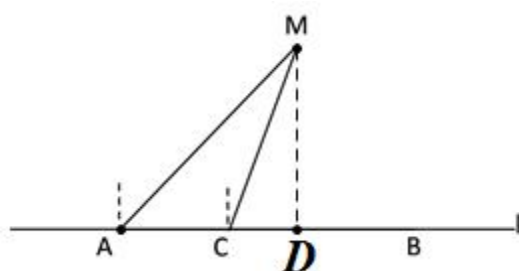
【解析】

【分析】

(1) 过点 M 作 $MD \perp AC$ 交 AC 的延长线于 D, 设 $DM=x$. 由三角函数表示出 CD 和 AD 的长, 然后列出方程, 解方程即可;

(2) 作 $\angle DMF=30^\circ$, 交 l 于点 F. 利用解直角三角形求出 DF 的长度, 然后得到 AF 的长度, 与 AB 进行比较, 即可得到答案.

【详解】解: (1) 过点 M 作 $MD \perp AC$ 交 AC 的延长线于 D, 设 $DM=x$.



$\therefore$ 在 $Rt\triangle CDM$ 中, $CD = DM \cdot \tan \angle CMD = x \cdot \tan 22^\circ$,

又 $\therefore$ 在 $Rt\triangle ADM$ 中, $\angle MAC=45^\circ$,

$\therefore AD=DM=x$,

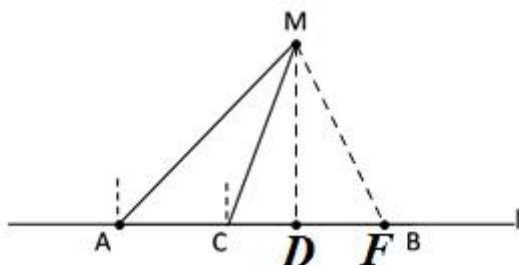
$\therefore AD=AC+CD=100+x \cdot \tan 22^\circ$,

$\therefore 100+x \cdot \tan 22^\circ=x$.

$\therefore x = \frac{100}{1 - \tan 22^\circ} \approx \frac{100}{1 - 0.404} \approx 167.785 \approx 167.79$ (米).

答: 轮船 M 到海岸线 l 的距离约为 167.79 米.

(2) 作 $\angle DMF=30^\circ$, 交 l 于点 F.



在 $Rt\triangle DMF$ 中, 有:

$$DF = DM \cdot \tan \angle FMD = DM \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} DM \approx \frac{1.732}{3} \times 167.79 \approx 96.87 \text{ 米}.$$

$$\therefore AF = AC + CD + DF = DM + DF \approx 167.79 + 96.87 = 264.66 < 300.$$

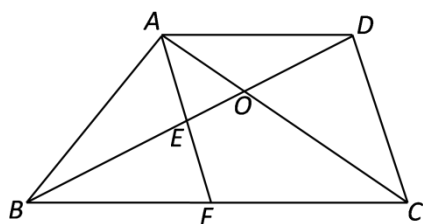
$\therefore$ 该轮船能行至码头靠岸.

【点睛】 本题考查了方向角问题. 注意准确构造直角三角形是解此题的关键.

23. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, AC 与 BD 相交于点 O , 点 E 在线段 OB 上, AE 的延长线与 BC 相交于点 F , $OD^2 = OB \cdot OE$.

(1) 求证: 四边形 $AFCD$ 是平行四边形;

(2) 如果 $BC = BD$, $AE \cdot AF = AD \cdot BF$, 求证: $\triangle ABE \sim \triangle ACD$.



【答案】 (1) 证明见解析; (2) 证明见解析

【解析】

【分析】

(1) 由题意, 得到 $\frac{OE}{OD} = \frac{OD}{OB}$, 然后由 $AD \parallel BC$, 得到 $\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$, 则 $\frac{OA}{OC} = \frac{OE}{OD}$, 即可得到 $AF \parallel CD$, 即可得到结论;

(2) 先证明 $\angle AED = \angle BCD$, 得到 $\angle AEB = \angle ADC$, 然后证明得到 $\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{DC}$, 即可得到 $\triangle ABE \sim \triangle ADC$.

【详解】 证明: (1) $\because OD^2 = OE \cdot OB$,

$$\therefore \frac{OE}{OD} = \frac{OD}{OB}.$$

$\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}.$$

$$\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{OE}{OD}.$$

$$\therefore AF \parallel CD.$$

$\therefore$ 四边形 AFCD 是平行四边形.

$$(2) \because AF \parallel CD,$$

$$\therefore \angle AED = \angle BDC, \quad \frac{BE}{BD} = \frac{BF}{BC}.$$

$$\because BC = BD,$$

$$\therefore BE = BF, \quad \angle BDC = \angle BCD$$

$$\therefore \angle AED = \angle BCD.$$

$$\because \angle AEB = 180^\circ - \angle AED, \quad \angle ADC = 180^\circ - \angle BCD,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle ADC.$$

$$\because AE \cdot AF = AD \cdot BF,$$

$$\therefore \frac{AE}{BF} = \frac{AD}{AF}.$$

$\because$ 四边形 AFCD 是平行四边形,

$$\therefore AF = CD.$$

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AD}{DC}.$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ADC.$$

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定和性质，平行线分线段成比例，平行四边形的判定和性质，以及平行线的性质，解题的关键是熟练掌握相似三角形的判定方法，正确找到证明三角形相似的条件.

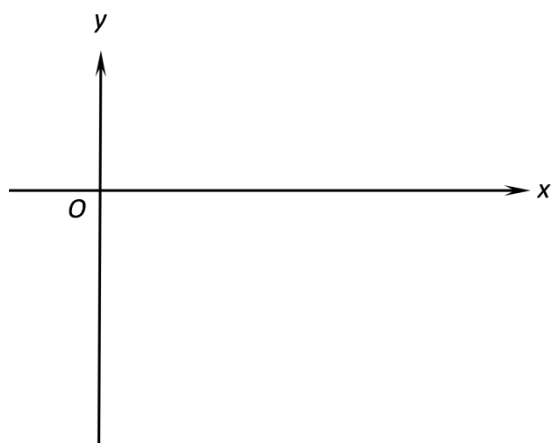
24. 在平面直角坐标系 xOy 中 (如图), 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (其中 a 、 b 、 c 是常

数, 且 $a \neq 0$) 的图像经过点 $A(0, -3)$ 、 $B(1, 0)$ 、 $C(3, 0)$, 联结 AB 、 AC .

(1) 求这个二次函数的解析式;

(2) 点 D 是线段 AC 上的一点, 联结 BD , 如果 $S_{\triangle ABD} : S_{\triangle BCD} = 3 : 2$, 求 $\tan \angle DBC$ 的值;

(3) 如果点 E 在该二次函数图像的对称轴上, 当 AC 平分 $\angle BAE$ 时, 求点 E 的坐标.



【答案】 (1) $y = -x^2 + 4x - 3$; (2) $\frac{3}{2}$; (3) $E(2, -\frac{7}{3})$

【解析】

【分析】

(1) 直接利用待定系数法, 把 A 、 B 、 C 三点代入解析式, 即可得到答案;

(2) 过点 D 作 $DH \perp BC$ 于 H , 在 $\triangle ABC$ 中, 设 AC 边上的高为 h , 利用面积的比得到 $\frac{AD}{DC} = \frac{3}{2}$,

然后求出 DH 和 BH , 即可得到答案;

(3) 延长 AE 至 x 轴, 与 x 轴交于点 F , 先证明 $\triangle OAB \sim \triangle OFA$, 求出点 F 的坐标, 然后求出直线 AF 的方程, 即可求出点 E 的坐标.

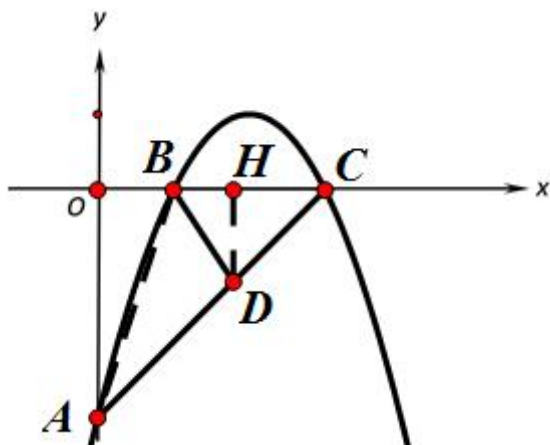
【详解】 解: (1) 将 $A(0, -3)$ 、 $B(1, 0)$ 、 $C(3, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 得,

$$\begin{cases} 0 = a + b - 3, \\ 0 = 9a + 3b - 4, \\ -3 = 0 + 0 + c \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -3 \end{cases},$$

∴ 此抛物线的表达式是： $y = -x^2 + 4x - 3$.

(2) 过点 D 作 $DH \perp BC$ 于 H,



在 $\triangle ABC$ 中, 设 AC 边上的高为 h , 则

$$S_{\triangle ABD} : S_{\triangle BCD} = \left(\frac{1}{2} AD \cdot h\right) : \left(\frac{1}{2} DC \cdot h\right) = AD : DC = 3 : 2,$$

又 $\because DH \parallel y$ 轴,

$$\therefore \frac{CH}{OC} = \frac{DC}{AC} = \frac{DH}{OA} = \frac{2}{5}.$$

$\because OA = OC = 3$, 则 $\angle ACO = 45^\circ$,

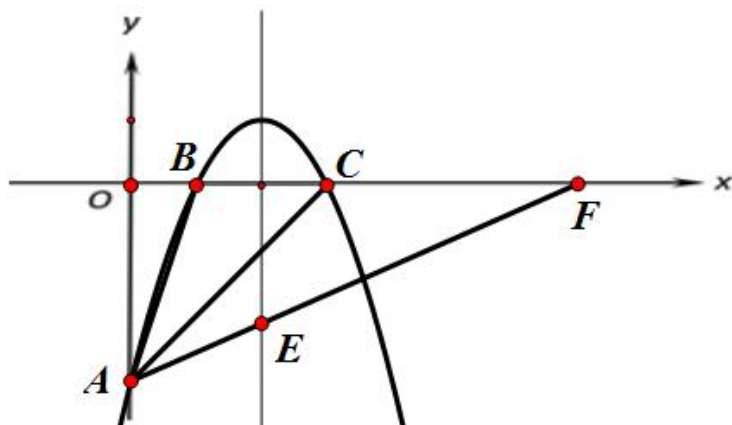
$\therefore \triangle CDH$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore CH = DH = \frac{2}{5} \times 3 = \frac{6}{5}.$$

$$\therefore BH = BC - CH = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}.$$

$$\therefore \tan \angle DBC = \frac{DH}{BH} = \frac{3}{2}.$$

(3) 延长 AE 至 x 轴, 与 x 轴交于点 F ,



$$\because OA=OC=3,$$

$$\therefore \angle OAC=\angle OCA=45^{\circ},$$

$$\because \angle OAB=\angle OAC-\angle BAC=45^{\circ}-\angle BAC, \quad \angle OFA=\angle OCA-\angle FAC=45^{\circ}-\angle FAC,$$

$$\because \angle BAC=\angle FAC,$$

$$\therefore \angle OAB=\angle OFA.$$

$$\therefore \triangle OAB \sim \triangle OFA,$$

$$\therefore \frac{OB}{OA} = \frac{OA}{OF} = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore OF=9, \text{ 即 } F(9, 0);$$

设直线 AF 的解析式为 $y=kx+b$ ($k \neq 0$),

$$\text{可得 } \begin{cases} 0 = 9k + b \\ -3 = b \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ b = -3 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 AF 的解析式为: } y = \frac{1}{3}x - 3,$$

$$\text{将 } x=2 \text{ 代入直线 AF 的解析式得: } y = -\frac{7}{3},$$

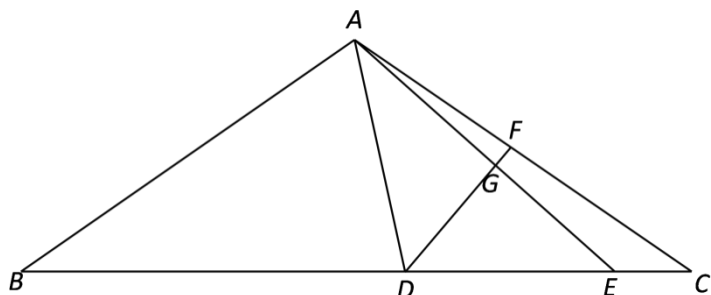
$$\therefore E\left(2, -\frac{7}{3}\right).$$

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定和性质，二次函数的性质，求二次函数的解析式，等腰直角三角形的判定和性质，求一次函数的解析式，解题的关键是掌握二次函数的图像和性

质，以及正确作出辅助线构造相似三角形.

25.已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，点 D 、 E 分别在边 BC 、 DC 上， $AB^2=BE \cdot DC$ ， $DE:EC=3:1$ ， F 是边 AC 上的一点， DF 与 AE 交于点 G .

- (1) 找出图中与 $\triangle ACD$ 相似的三角形，并说明理由；
- (2) 当 DF 平分 $\angle ADC$ 时，求 $DG:DF$ 的值；
- (3) 如图，当 $\angle BAC=90^\circ$ ，且 $DF \perp AE$ 时，求 $DG:DF$ 的值.



【答案】 (1) $\triangle ABE$ 、 $\triangle ADC$ ，理由见解析； (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ； (3) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

【解析】

【分析】

(1) 根据相似三角形的判定方法，即可找出与 $\triangle ACD$ 相似的三角形；

(2) 由相似三角形的性质，得 $\frac{DG}{DF} = \frac{DE}{AD} = \frac{AD}{CD}$ ，由 $DE=3CE$ ，先求出 AD 的长度，然后计算得到 $\frac{DF}{DG}$ ；

(3) 由等腰直角三角形的性质，得到 $\angle DAG = \angle ADF = 45^\circ$ ，然后证明 $\triangle ADE \sim \triangle DFA$ ，得到 $\frac{AD}{DF} = \frac{AE}{AD}$ ，求出 DF 的长度，即可得到 $\frac{DF}{DG}$ 。

【详解】 解：(1) 与 $\triangle ACD$ 相似的三角形有： $\triangle ABE$ 、 $\triangle ADC$ ，理由如下：

$$\because AB^2 = BE \cdot DC,$$

$$\therefore \frac{BE}{AB} = \frac{AB}{DC}.$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C, \quad \frac{BE}{AB} = \frac{AC}{DC},$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DCA.$$

$$\therefore \angle AED = \angle DAC.$$

$$\because \angle AED = \angle C + \angle EAC, \quad \angle DAC = \angle DAE + \angle EAC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle C.$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle CDA.$$

$$(2) \because \triangle ADE \sim \triangle CDA, \quad DF \text{ 平分 } \angle ADC,$$

$$\therefore \frac{DG}{DF} = \frac{DE}{AD} = \frac{AD}{CD},$$

设 $CE = a$, 则 $DE = 3CE = 3a$, $CD = 4a$,

$$\therefore \frac{3a}{AD} = \frac{AD}{4a}, \quad \text{解得 } AD = 2\sqrt{3}a \quad (\text{负值已舍})$$

$$\therefore \frac{DF}{DG} = \frac{AD}{CD} = \frac{2\sqrt{3}a}{4a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$(3) \because \angle BAC = 90^\circ, \quad AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle C = 45^\circ,$$

$$\because DG \perp AE,$$

$$\therefore \angle DAG = \angle ADF = 45^\circ,$$

$$\therefore AG = DG = \frac{\sqrt{2}}{2} AD = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{3}a = \sqrt{6}a,$$

$$\therefore EG = \sqrt{DE^2 - DG^2} = \sqrt{3}a,$$

$$\because \angle AED = \angle DAC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle DFA,$$

$$\therefore \frac{AD}{DF} = \frac{AE}{AD},$$

$$\therefore DF = \frac{AD^2}{AE} = 4(\sqrt{6} - \sqrt{3}) a,$$

$$\therefore \frac{DG}{DF} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定和性质，等腰直角三角形的判定和性质，勾股定理，

解题的关键是熟练掌握相似三角形的判定和性质，正确找出证明三角形相似的条件.