

2020-2021 学年上海市徐汇区九年级（上）期末数学试卷（一模）

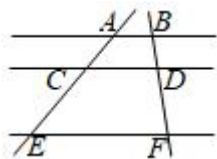
一.选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）（下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的）

1. 将抛物线 $y = 2(x+1)^2$ 先向右平移 3 个单位，再向下平移 2 个单位后，所得抛物线的表达式是（ ）
A. $y = 2(x-2)^2 - 2$ B. $y = 2(x-2)^2 + 2$
C. $y = 2(x+4)^2 - 2$ D. $y = 2(x+4)^2 + 2$
2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， $BC = 10$ ，那么下列结论正确的是（ ）
A. $\tan C = \frac{4}{3}$ B. $\cot C = \frac{4}{5}$ C. $\sin C = \frac{3}{4}$ D. $\cos C = \frac{4}{5}$
3. 已知抛物线 $y = -x^2 + 4x + c$ 经过点 $(4, 3)$ ，那么下列各点中，该抛物线必经过的点是（ ）
A. $(0, 2)$ B. $(0, 3)$ C. $(0, 4)$ D. $(0, 5)$
4. 已知海面上一艘货轮 A 在灯塔 B 的北偏东 30° 方向，海监船 C 在灯塔 B 的正东方向 5 海里处，此时海监船 C 发现货轮 A 在它的正北方向，那么海监船 C 与货轮 A 的距离是（ ）
A. 10 海里 B. $5\sqrt{3}$ 海里 C. 5 海里 D. $\frac{5}{3}\sqrt{3}$ 海里
5. 下列说法中，正确的是（ ）
A. 两个矩形必相似
B. 两个含 45° 角的等腰三角形必相似
C. 两个菱形必相似
D. 两个含 30° 角的直角三角形必相似
6. 定义： $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数．例如： $[1.7] = 1$ ， $[\frac{3}{5}] = 0$ ， $[-2\frac{1}{4}] = -3$ ．根据你学习函数的经验，下列关于函数 $y = [x]$ 的判断中，正确的是（ ）
A. 函数 $y = [x]$ 的定义域是一切整数
B. 函数 $y = [x]$ 的图象是经过原点的一条直线
C. 点 $(2\frac{2}{5}, 2)$ 在函数 $y = [x]$ 图象上
D. 函数 $y = [x]$ 的函数值 y 随 x 的增大而增大

二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. 如果 $a:b=2:3$, 那么代数式 $\frac{b-a}{a}$ 的值是_____.

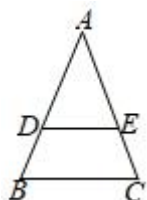
8. 如图, $AB \parallel CD \parallel EF$, 如果 $AC=2$, $CE=3$, $BD=1.5$, 那么 BF 的长是_____.



9. 已知点 P 在线段 AB 上, 如果 $AP^2 = AB \cdot BP$, $AB=4$, 那么 AP 的长是_____.

10. 已知二次函数 $y = a(x + \frac{3}{2})^2 - 1$ 的图象在直线 $x = -\frac{3}{2}$ 的左侧部分是下降的, 那么 a 的取值范围是_____.

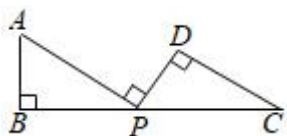
11. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, $DE \parallel BC$, 如果 $\triangle AED$ 和四边形 $DECB$ 的面积相等, $BC = 2\sqrt{2}$, 那么 DE 的长是_____.



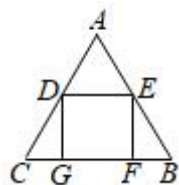
12. 在坡度为 $i=1:3$ 的山坡上种树, 要求株距 (相邻两棵树间的水平距离) 是 6 米, 那么斜坡上相邻两棵树间的坡面距离是_____米.

13. 已知甲、乙两楼相距 30 米, 如果从甲楼底看乙楼顶, 测得仰角为 45° , 从乙楼顶看甲楼顶, 测得俯角为 30° , 那么甲楼高是_____米.

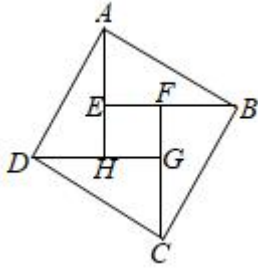
14. 如图, 点 P 在线段 BC 上, $AB \perp BC$, $DP \perp AP$, $CD \perp DP$, 如果 $BC=10$, $AB=2$, $\tan C = \frac{1}{2}$, 那么 DP 的长是_____.



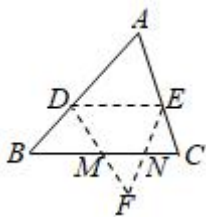
15. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, 正方形 $DEFG$ 的顶点 D 、 E 分别在边 AC 、 AB 上, 点 F 、 G 在边 BC 上, 那么 AD 的长是_____.



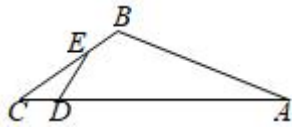
16. 《周髀算经》中的“赵爽弦图”(如图), 图中的四个直角三角形都全等, 如果正方形 $ABCD$ 的面积是正方形 $EFGH$ 面积的 13 倍, 那么 $\angle ABE$ 的余切值是_____.



17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上， $DE \parallel BC$ ，将 $\triangle ADE$ 沿直线 DE 折叠后与 $\triangle FDE$ 重合， DF 、 EF 分别与边 BC 交于点 M 、 N ，如果 $DE = 8$ ， $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$ ，那么 MN 的长是_____.



18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $AB = 12$ ，点 D 在边 AC 上，点 E 在边 BC 上， $\sin \angle ADE = \frac{4}{5}$ ， $ED = 5$ ，如果 $\triangle ECD$ 的面积是6，那么 BC 的长是_____.



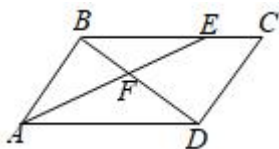
三、(本大题共7题，第19--22题每题10分；第23、24题每题12分；第25题14分：满分78分)

19. (10分) 计算： $\sin 45^\circ \cot 45^\circ - \tan 60^\circ + |2\cos 45^\circ - \cot 30^\circ|$.

20. (10分) 如图，在 $\square ABCD$ 中， AE 平分 $\angle BAD$ ， AE 与 BD 交于点 F ， $AB = 1.2$ ， $BC = 1.8$.

(1) 求 $BF:DF$ 的值；

(2) 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. 求向量 $\overrightarrow{DF}$ (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示).



21. (10分) 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 y 轴交于点 $C(0, 2)$ ，它的顶点为 M ，对称轴是直线 $x = -1$.

(1) 求此抛物线的表达式及点 M 的坐标；

(2) 将上述抛物线向下平移 m ($m > 0$) 个单位，所得新抛物线经过原点 O ，设新抛物线

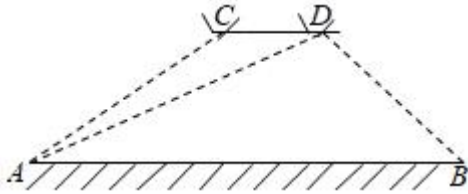
的顶点为 N ，请判断 $\triangle MON$ 的形状，并说明理由。

22. (10 分) 为加强对市内道路交通安全的监督，王警官利用无人机进行检测。某高架路有一段限速每小时 60 千米的道路 AB (如图所示)，当无人机在限速道路的正上方 C 处时，测得限速道路的起点 A 的俯角是 37° ，无人机继续向右水平飞行 220 米到达 D 处，此时又测得起点 A 的俯角是 30° ，同时测得限速道路终点 B 的俯角是 45° (注：即四边形 $ABDC$ 是梯形)。

(1) 求限速道路 AB 的长 (精确到 1 米)；

(2) 如果李师傅在道路 AB 上行驶的时间是 1 分 20 秒，请判断他是否超速？并说明理由。

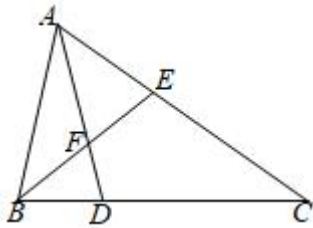
(参考数据： $\sin 37^\circ \approx 0.60$ ， $\cos 37^\circ \approx 0.80$ ， $\tan 37^\circ \approx 0.75$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$)



23. (12 分) 如图，在 $\triangle ACB$ 中，点 D 、 E 分别在边 BC 、 AC 上， $AD = AB$ ， $BE = CE$ ， AD 与 BE 交于点 F ，且 $AF \cdot DF = BF \cdot EF$ 。

求证：(1) $\angle ADC = \angle BEC$ ；

(2) $AF \cdot CD = EF \cdot AC$ 。

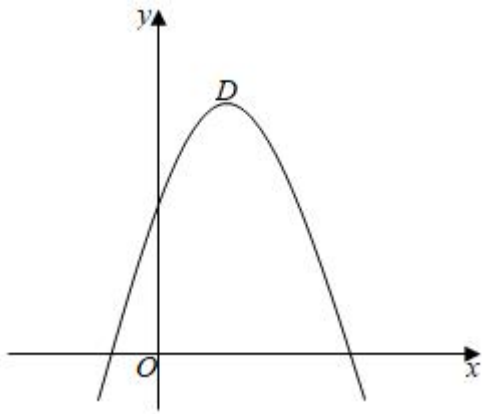


24. (12 分) 已知二次函数 $y = ax^2 - 2ax + a + 4$ ($a < 0$) 的大致图象如图所示，这个函数图象的顶点为点 D 。

(1) 求该函数图象的开口方向、对称轴及点 D 的坐标；

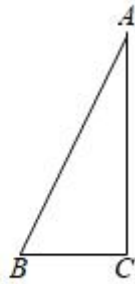
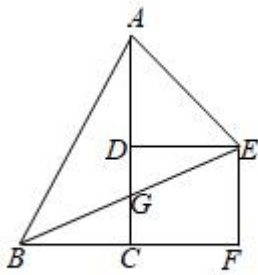
(2) 设该函数图象与 y 轴正半轴交于点 C ，与 x 轴正半轴交于点 B ，图象的对称轴与 x 轴交于点 A ，如果 $DC \perp BC$ ， $\tan \angle DBC = \frac{1}{3}$ ，求该二次函数的解析式；

(3) 在 (2) 的条件下，设点 M 在第一象限该函数的图象上，且点 M 的横坐标为 t ($t > 1$)，如果 $\triangle ACM$ 的面积是 $\frac{25}{8}$ ，求点 M 的坐标。



25. (14 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 12$, $BC = 5$, 点 D 是边 AC 上的动点, 以 CD 为边在 $\triangle ABC$ 外作正方形 $CDEF$, 分别联结 AE 、 BE , BE 与 AC 交于点 G

- (1) 当 $AE \perp BE$ 时, 求正方形 $CDEF$ 的面积;
- (2) 延长 ED 交 AB 于点 H , 如果 $\triangle BEH$ 和 $\triangle ABG$ 相似, 求 $\sin \angle ABE$ 的值;
- (3) 当 $AG = AE$ 时, 求 CD 的长.



备用图

2020-2021 学年上海市徐汇区九年级（上）期末数学试卷（一模）

参考答案与试题解析

一.选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）（下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的）

1. 将抛物线 $y = 2(x+1)^2$ 先向右平移 3 个单位，再向下平移 2 个单位后，所得抛物线的表达式是（ ）

A. $y = 2(x-2)^2 - 2$

B. $y = 2(x-2)^2 + 2$

C. $y = 2(x+4)^2 - 2$

D. $y = 2(x+4)^2 + 2$

【分析】先确定抛物线 $y = 2(x+1)^2$ 的顶点坐标为 $(-1, 0)$ ，再根据点平移的规律得到把点 $(-1, 0)$ 平移后得到对应点的坐标为 $(2, -2)$ ，然后根据顶点式写出平移后的抛物线解析式.

【解答】解：抛物线 $y = 2(x+1)^2$ 的顶点坐标为 $(-1, 0)$ ，把点 $(-1, 0)$ 先向右平移 3 个单位，再向下平移 2 个单位后得到的点的坐标为 $(2, -2)$ ，所以平移后的抛物线的解析式为 $y = 2(x-2)^2 - 2$.

故选：A.

2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， $BC = 10$ ，那么下列结论正确的是（ ）

A. $\tan C = \frac{4}{3}$

B. $\cot C = \frac{4}{5}$

C. $\sin C = \frac{3}{4}$

D. $\cos C = \frac{4}{5}$

【分析】画出相应的图形，根据勾股定理和锐角三角函数的意义求解后，再做出判断即可.

【解答】解：如图，由勾股定理得， $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$,

$$\therefore \tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},$$

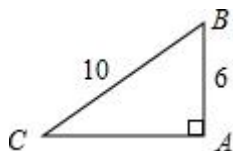
$$\cot C = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3},$$

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

$$\cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5},$$

因此选项 D 符合题意，

故选：D.



3. 已知抛物线 $y = -x^2 + 4x + c$ 经过点 $(4, 3)$ ，那么下列各点中，该抛物线必经过的点是
()

A. $(0, 2)$ B. $(0, 3)$ C. $(0, 4)$ D. $(0, 5)$

【分析】 先根据待定系数法求得抛物线的解析式，然后计算出自变量为 0 所对应的函数值，再根据二次函数图象上点的坐标特征进行判断.

【解答】 解：∵ 抛物线 $y = -x^2 + 4x + c$ 经过点 $(4, 3)$,

$$\therefore -16 + 16 + c = 3,$$

$$\therefore c = 3,$$

$$\therefore \text{抛物线为 } y = -x^2 + 4x + 3,$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = -x^2 + 4x + 3 = 3;$$

所以点 $(0, 3)$ 在抛物线 $y = -x^2 + 4x + 3$ 上.

故选: B.

4. 已知海面上—艘货轮 A 在灯塔 B 的北偏东 30° 方向，海监船 C 在灯塔 B 的正东方向 5 海里处，此时海监船 C 发现货轮 A 在它的正北方向，那么海监船 C 与货轮 A 的距离是
()

A. 10 海里 B. $5\sqrt{3}$ 海里 C. 5 海里 D. $\frac{5}{3}\sqrt{3}$ 海里

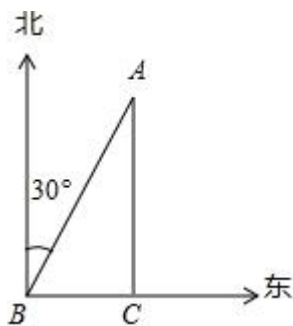
【分析】 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ， $BC = 5$ 海里，根据三角函数的定义即可得到结论.

【解答】 解：如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ， $BC = 5$ 海里，

$$\therefore AC = BC \cdot \tan 60^\circ = 5\sqrt{3} \text{ (海里)},$$

即海监船 C 与货轮 A 的距离是 $5\sqrt{3}$ 海里，

故选: B.



5. 下列说法中，正确的是（ ）

- A. 两个矩形必相似
- B. 两个含 45° 角的等腰三角形必相似
- C. 两个菱形必相似
- D. 两个含 30° 角的直角三角形必相似

【分析】直接利用相似图形的判定方法得出答案.

【解答】解：A、两个矩形对应边不一定成比例，故此选项错误；

B、两个含 45° 角的等腰三角形， 45° 不一定是对应角，故不一定相似，故此选项错误；

C、两个菱形的对应角不一定相等，不一定相似，故此选项错误；

D、两个含 30° 角的直角三角形必相似，故此选项正确.

故选：D.

6. 定义： $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数. 例如： $[1.7] = 1$ ， $[\frac{3}{5}] = 0$ ， $[-2\frac{1}{4}] = -3$. 根据

你学习函数的经验，下列关于函数 $y = [x]$ 的判断中，正确的是（ ）

- A. 函数 $y = [x]$ 的定义域是一切整数
- B. 函数 $y = [x]$ 的图象是经过原点的一条直线
- C. 点 $(2\frac{2}{5}, 2)$ 在函数 $y = [x]$ 图象上
- D. 函数 $y = [x]$ 的函数值 y 随 x 的增大而增大

【分析】根据题意，可以判断各个选项中的说法是否正确，从而可以解答本题.

【解答】解：由题意可得，

函数 $y = [x]$ 的定义域是一切实数，故选项A错误；

函数 $y = [x]$ 的图象是分段函数，故选项B错误；

点 $(2\frac{2}{5}, 2)$ 在函数 $y = [x]$ 图象上，故选项C正确；

函数 $y = [x]$ 的函数值 y 随 x 的增大不一定增大，如 $x = 1.2$ 时， $y = [1.2] = 1$ ， $x = 1.5$ 时， y

$= [1.5] = 1$, 即 $x = 1.2$ 和 $x = 1.5$ 时的函数值相等, 故选项 D 错误;

故选: C .

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 如果 $a:b=2:3$, 那么代数式 $\frac{b-a}{a}$ 的值是 $-\frac{1}{2}$.

【分析】 根据已知条件得出 $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$, 再把要求的式子化成 $\frac{b-a}{a} = \frac{b}{a} - 1$, 然后代值计算即可.

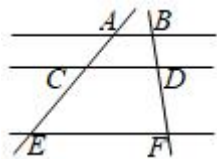
【解答】 解: $\because a:b=2:3$,

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{b-a}{a} = \frac{b}{a} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

故答案为: $\frac{1}{2}$.

8. 如图, $AB \parallel CD \parallel EF$, 如果 $AC=2$, $CE=3$, $BD=1.5$, 那么 BF 的长是 $\frac{15}{4}$.



【分析】 根据平行线分线段成比例定理解答即可.

【解答】 解: $\because AB \parallel CD \parallel EF$, $AC=2$, $CE=3$, $BD=1.5$,

$$\therefore \frac{AC}{AE} = \frac{BD}{BF},$$

$$\text{即 } \frac{2}{2+3} = \frac{1.5}{BF},$$

$$\text{解得: } BF = \frac{15}{4},$$

故答案为: $\frac{15}{4}$.

9. 已知点 P 在线段 AB 上, 如果 $AP^2 = AB \cdot BP$, $AB=4$, 那么 AP 的长是 $2\sqrt{5}-2$.

【分析】 先证出点 P 是线段 AB 的黄金分割点, 再由黄金分割点的定义得到 $AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$, 把 $AB=4$ 代入计算即可.

【解答】 解: $\because$ 点 P 在线段 AB 上, $AP^2 = AB \cdot BP$,

$\therefore$ 点 P 是线段 AB 的黄金分割点, $AP > BP$,

$$\therefore AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 4 = 2\sqrt{5}-2,$$

故答案为: $2\sqrt{5}-2$.

10. 已知二次函数 $y = a(x + \frac{3}{2})^2 - 1$ 的图象在直线 $x = -\frac{3}{2}$ 的左侧部分是下降的, 那么 a 的取值范围是 $a > 0$.

【分析】根据题目中的函数解析式和二次函数的性质, 可以得到 a 的取值范围, 本题得以解决.

【解答】解: $\because$ 二次函数 $y = a(x + \frac{3}{2})^2 - 1$,

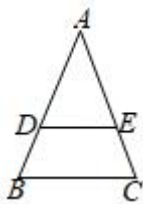
$\therefore$ 该函数的对称轴为直线 $x = -\frac{3}{2}$,

$\because$ 二次函数 $y = a(x + \frac{3}{2})^2 - 1$ 的图象在直线 $x = -\frac{3}{2}$ 的左侧部分是下降的,

$\therefore a > 0$,

故答案为: $a > 0$

11. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, $DE \parallel BC$, 如果 $\triangle AED$ 和四边形 $DECB$ 的面积相等, $BC = 2\sqrt{2}$, 那么 DE 的长是 2.



【分析】先根据题意得到 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2}$, 再证明 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 利用相似三角形的性质

得 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = (\frac{DE}{BC})^2 = \frac{1}{2}$, 然后利用比例的性质可求出 DE 的长.

【解答】解: $\because \triangle AED$ 和四边形 $DECB$ 的面积相等,

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2},$$

$\because DE \parallel BC$,

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = (\frac{DE}{BC})^2 = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } \frac{DE^2}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DE = 2.$$

故答案为 2.

12. 在坡度为 $i = 1:3$ 的山坡上种树, 要求株距 (相邻两棵树间的水平距离) 是 6 米, 那么斜坡上相邻两棵树间的坡面距离是 $2\sqrt{10}$ 米.

【分析】根据坡度的定义, 利用勾股定理即可解决问题.

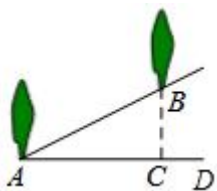
【解答】解: 如图, 过 B 作 $BC \perp AD$ 于 C ,

$\because$ 山坡 AB 的坡度为 $i = 1:3$, 株距 (相邻两棵树间的水平距离) 是 6 米,

$\therefore$ 水平距离 $AC = 6$ 米, 铅垂高度 $BC = 2$ 米,

$\therefore$ 斜坡上相邻两树间的坡面距离 $AB = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$ (米),

故答案为: $2\sqrt{10}$.



13. 已知甲、乙两楼相距 30 米, 如果从甲楼底看乙楼顶, 测得仰角为 45° , 从乙楼顶看甲楼顶, 测得俯角为 30° , 那么甲楼高是 $(30 - 10\sqrt{3})$ 米.

【分析】过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E , 先由矩形和含 30° 角的直角三角形的性质求出 AE 的长, 再由等腰直角三角形的性质求出 AB 的长, 即可得出结果.

【解答】解: 如图, 甲楼为 CD 、乙楼为 AB , $BD = 30$ 米, $\angle ADB = 45^\circ$, $\angle CAF = 30^\circ$,

过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E , 则四边形 $BDCE$ 为矩形, $CE \parallel AF$,

$\therefore CE = BD = 30$ 米, $CD = BE$, $\angle ACE = \angle CAF = 30^\circ$,

$\therefore AE = \frac{\sqrt{3}}{3}CE = 10\sqrt{3}$ (米),

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\angle ADB = 45^\circ$,

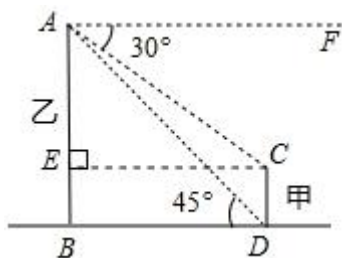
$\therefore \triangle ABD$ 为等腰直角三角形,

$\therefore BD = AB = 30$ 米,

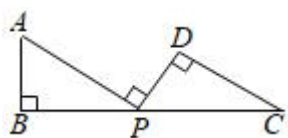
$\therefore CD = BE = AB - AE = (30 - 10\sqrt{3})$ 米,

即甲楼的高为 $(30 - 10\sqrt{3})$ 米,

故答案为: $(30 - 10\sqrt{3})$.



14. 如图, 点 P 在线段 BC 上, $AB \perp BC$, $DP \perp AP$, $CD \perp DP$, 如果 $BC = 10$, $AB = 2$, $\tan C = \frac{1}{2}$, 那么 DP 的长是 $-\frac{6}{5}\sqrt{5}$.



【分析】 由 $DP \perp AP$, $CD \perp DP$, 得 $AP \parallel CD$, 则 $\angle C = \angle APB$, 由 $\tan \angle APB = \frac{AB}{BP}$, 求得

$$BP = 4, PC = 6, \text{ 在 Rt}\triangle CDP \text{ 中, } \tan C = \frac{DP}{CD}, CD = \sqrt{6^2 - DP^2}, \text{ 得出 } \frac{DP}{\sqrt{6^2 - DP^2}} = \frac{1}{2},$$

即可得出结果.

【解答】 解: $\because DP \perp AP$, $CD \perp DP$,

$$\therefore AP \parallel CD,$$

$$\therefore \angle C = \angle APB,$$

$$\because AB \perp BC,$$

$$\therefore \tan \angle APB = \frac{AB}{BP},$$

$$\because \tan C = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{2}{BP} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BP = 4,$$

$$\therefore PC = BC - BP = 10 - 4 = 6,$$

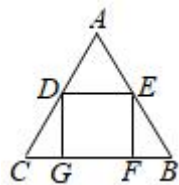
$$\text{在 Rt}\triangle CDP \text{ 中, } \tan C = \frac{DP}{CD}, CD = \sqrt{PC^2 - DP^2} = \sqrt{6^2 - DP^2},$$

$$\therefore \frac{DP}{\sqrt{6^2 - DP^2}} = \frac{1}{2},$$

$$\text{解得: } DP = \frac{6}{5}\sqrt{5} \text{ 或 } DP = -\frac{6}{5}\sqrt{5} \text{ (不合题意舍去),}$$

故答案为: $\frac{6}{5}\sqrt{5}$.

15. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, 正方形 $DEFG$ 的顶点 D 、 E 分别在边 AC 、 AB 上, 点 F 、 G 在边 BC 上, 那么 AD 的长是 $4\sqrt{3}-6$.



【分析】 过 A 点作 $AM \perp BC$ 于 M , 交 DE 于 N , 如图, 根据等边三角形的性质得到 $\angle C = \angle CAB = 60^\circ$, $CM = BM = \frac{1}{2}BC = 1$, 利用含 30° 度的直角三角形三边的关系得到 $AM = \sqrt{3}$, 设正方形 $DEFG$ 的边长为 x , 则 $DG = DE = x$, $MN = DG = x$, $AN = \sqrt{3} - x$, 接着证明 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$, 利用相似三角形的性质得 $\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}}$, 解得 $x = 4\sqrt{3} - 6$, 然后证明 $\triangle ADE$ 为等边三角形, 从而得到 $AD = DE$.

【解答】 解: 过 A 点作 $AM \perp BC$ 于 M , 交 DE 于 N , 如图,

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle C = \angle CAB = 60^\circ, \quad CM = BM = \frac{1}{2}BC = 1,$$

$$\therefore AM = \sqrt{3}CM = \sqrt{3},$$

设正方形 $DEFG$ 的边长为 x , 则 $DG = DE = x$,

易得四边形 $DGMN$ 为矩形,

$$\therefore MN = DG = x,$$

$$\therefore AN = AM - MN = \sqrt{3} - x,$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{DE}{CB} = \frac{AN}{AM}, \quad \text{即 } \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}}, \quad \text{解得 } x = 4\sqrt{3} - 6,$$

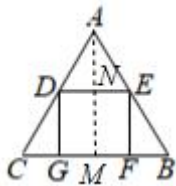
$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle C = 60^\circ,$$

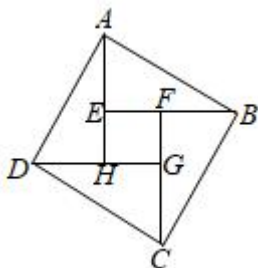
$\therefore \triangle ADE$ 为等边三角形,

$$\therefore AD = DE = 4\sqrt{3} - 6.$$

故答案为 $4\sqrt{3} - 6$.



16. 《周髀算经》中的“赵爽弦图”(如图), 图中的四个直角三角形都全等, 如果正方形 $ABCD$ 的面积是正方形 $EFGH$ 面积的 13 倍, 那么 $\angle ABE$ 的余切值是 $\frac{3}{2}$.



【分析】小正方形 $EFGH$ 面积是 a^2 , 则大正方形 $ABCD$ 的面积是 $13a^2$, 则小正方形 $EFGH$ 边长是 a , 则大正方形 $ABCD$ 的边长是 $\sqrt{13}a$, 设 $AE = BF = x$, 利用勾股定理求出 x , 最后利用熟记函数即可解答.

【解答】解: 设小正方形 $EFGH$ 面积是 a^2 , 则大正方形 $ABCD$ 的面积是 $13a^2$,

$\therefore$ 小正方形 $EFGH$ 边长是 a , 则大正方形 $ABCD$ 的边长是 $\sqrt{13}a$,

$\therefore$ 图中的四个直角三角形是全等的,

$\therefore AE = BF$,

设 $AE = BF = x$,

在 $\text{Rt}\triangle AEB$ 中, $AB^2 = AE^2 + BE^2$,

即 $13a^2 = x^2 + (x+a)^2$

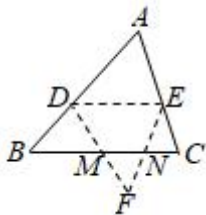
解得: $x_1 = 2a$, $x_2 = -3a$ (舍去),

$\therefore AE = 2a$, $BE = 3a$,

$\therefore \angle ABE$ 的余切值 $= \frac{BE}{AE} = \frac{3}{2}$,

故答案为: $\frac{3}{2}$.

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上, $DE \parallel BC$, 将 $\triangle ADE$ 沿直线 DE 翻折后与 $\triangle FDE$ 重合, DF 、 EF 分别与边 BC 交于点 M 、 N , 如果 $DE = 8$, $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$, 那么 MN 的长是 4 .



【分析】先根据折叠的性质得 $DA = DF$ ， $\angle ADE = \angle FDE$ ，再根据平行线的性质和等量代换得到 $\angle B = \angle BMD$ ，则 $DB = DM$ ，接着利用比例的性质得到 $FM = DM$ ，然后证明 $\triangle FMN \sim \triangle FDE$ ，从而利用相似比可计算出 MN 的长。

【解答】解： $\because \triangle ADE$ 沿直线 DE 翻折后与 $\triangle FDE$ 重合，

$$\therefore DA = DF, \angle ADE = \angle FDE,$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle B, \angle FDE = \angle BMD,$$

$$\therefore \angle B = \angle BMD,$$

$$\therefore DB = DM,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = 2,$$

$$\therefore \frac{DF}{DM} = 2,$$

$$\therefore FM = DM,$$

$$\because MN \parallel DE,$$

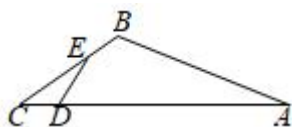
$$\therefore \triangle FMN \sim \triangle FDE,$$

$$\therefore \frac{MN}{DE} = \frac{FM}{FD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore MN = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2} \times 8 = 4.$$

故答案为 4.

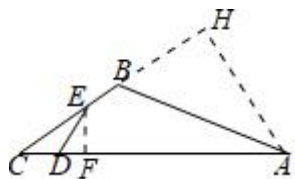
18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $AB = 12$ ，点 D 在边 AC 上，点 E 在边 BC 上， $\sin \angle ADE = \frac{4}{5}$ ， $ED = 5$ ，如果 $\triangle ECD$ 的面积是 6，那么 BC 的长是 $9\sqrt{3} - 6$ 。



【分析】如图，过点 E 作 $EF \perp BC$ 于 F ，过点 A 作 $AH \perp CB$ 交 CB 的延长线于 H 。解直

角三角形求出 BH , CH 即可解决问题.

【解答】解: 如图, 过点 E 作 $EF \perp BC$ 于 F , 过点 A 作 $AH \perp CB$ 交 CB 的延长线于 H .



$$\because \angle ABC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ABH = 180^\circ - \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\because AB = 12, \angle H = 90^\circ,$$

$$\therefore BH = AB \cdot \cos 60^\circ = 6, AH = AB \cdot \sin 60^\circ = 6\sqrt{3},$$

$$\because EF \perp DF, DE = 5,$$

$$\therefore \sin \angle ADE = \frac{EF}{DE} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore EF = 4,$$

$$\therefore DF = \sqrt{DE^2 - EF^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\because S_{\triangle CDE} = 6,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot CD \cdot EF = 6,$$

$$\therefore CD = 3,$$

$$\therefore CF = CD + DF = 6,$$

$$\because \tan C = \frac{EF}{CF} = \frac{AH}{CH},$$

$$\therefore \frac{4}{6} = \frac{6\sqrt{3}}{CH},$$

$$\therefore CH = 9\sqrt{3},$$

$$\therefore BC = CH - BH = 9\sqrt{3} - 6.$$

故答案为: $9\sqrt{3} - 6$.

三、(本大题共 7 题, 第 19--22 题每题 10 分; 第 23、24 题每题 12 分; 第 25 题 14 分: 满分 78 分)

19. (10 分) 计算: $\sin 45^\circ \cot 45^\circ - \tan 60^\circ + |2\cos 45^\circ - \cot 30^\circ|$.

【分析】直接利用特殊角的三角函数值分别化简得出答案.

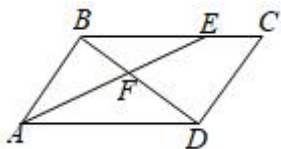
$$\text{【解答】解: 原式} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 - \sqrt{3} + |2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}|$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

20. (10分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, AE 平分 $\angle BAD$, AE 与 BD 交于点 F , $AB = 1.2$, $BC = 1.8$.

(1) 求 $BF:DF$ 的值;

(2) 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. 求向量 $\overrightarrow{DF}$ (用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示).



【分析】(1) 由平行四边形的性质得 $DC \parallel AB$, 从而 $\triangle ABF \sim \triangle EDF$, 利用相似三角形的性质得比例式, 从而解得 $BF:DF$;

(2) 先求出 $BF = \frac{2}{5}BD$, 再利用向量的加法可得答案.

【解答】解: (1) $\because AE$ 平分 $\angle BAD$,

$$\therefore \angle BAE = \angle DAE,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BEA = \angle DAE,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle BEA,$$

$$\therefore AB = BE = 1.2,$$

$$\because BC \parallel AD,$$

$$\therefore \triangle BEF \sim \triangle DAF,$$

$$\therefore \frac{BE}{AD} = \frac{BF}{DF},$$

$$\therefore \frac{BF}{DF} = \frac{1.2}{1.8} = \frac{2}{3},$$

$$(2) \because BF:DF = 2:3,$$

$$\therefore DF = \frac{3}{5}BD,$$

$$\because \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \vec{a} - \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{DF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{a} - \frac{3}{5}\overrightarrow{b}.$$

21. (10分) 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 y 轴交于点 $C(0, 2)$, 它的顶点为 M , 对称轴是直线 $x = -1$.

(1) 求此抛物线的表达式及点 M 的坐标;

(2) 将上述抛物线向下平移 m ($m > 0$) 个单位, 所得新抛物线经过原点 O , 设新抛物线的顶点为 N , 请判断 $\triangle MON$ 的形状, 并说明理由.

【分析】 (1) 根据待定系数法即可求得抛物线的解析式, 然后化成顶点式求得顶点 M 的坐标;

(2) 设新抛物线的解析式为 $y = (x+1)^2 + 1 - m$, 把 $(0, 0)$ 代入求得 m 的值, 即可根据平移的原则得到顶点 N 的坐标, 根据勾股定理求得 $OM^2 = ON^2 = 2$, $MN^2 = 4$, 即可得到结论.

【解答】 解: (1) $\because$ 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 y 轴交于点 $C(0, 2)$, 对称轴是直线 $x = -1$.

$$\therefore \begin{cases} c=2 \\ -\frac{b}{2}=-1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b=2 \\ c=2 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = x^2 + 2x + 2$,

$$\therefore y = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1,$$

$\therefore$ 顶点 $M(-1, 1)$;

(2) $\because$ 抛物线向下平移 m ($m > 0$) 个单位, 所得新抛物线经过原点 O ,

$\therefore$ 设新抛物线的解析式为 $y = (x+1)^2 + 1 - m$,

把 $(0, 0)$ 代入得, $0 = 1 + 1 - m$,

$$\therefore m = 2,$$

$\therefore$ 顶点 N 为 $(-1, -1)$,

$\therefore M(-1, 1)$,

$$\therefore OM^2 = (-1)^2 + 1^2 = 2, ON^2 = (-1)^2 + (-1)^2 = 2, MN^2 = 2^2 = 4,$$

$$\therefore OM = ON, OM^2 + ON^2 = MN^2,$$

$\therefore \triangle MON$ 是等腰直角三角形.

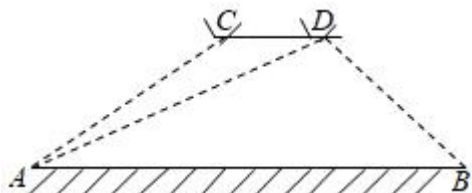
22. (10分) 为加强对市内道路交通安全的监督, 王警官利用无人机进行检测. 某高架路有一段限速每小时 60 千米的道路 AB (如图所示), 当无人机在限速道路的正上方 C 处时, 测得限速道路的起点 A 的俯角是 37° , 无人机继续向右水平飞行 220 米到达 D 处, 此时

又测得起点 A 的俯角是 30° ，同时测得限速道路终点 B 的俯角是 45° （注：即四边形 $ABDC$ 是梯形）。

（1）求限速道路 AB 的长（精确到 1 米）；

（2）如果李师傅在道路 AB 上行驶的时间是 1 分 20 秒，请判断他是否超速？并说明理由。

（参考数据： $\sin 37^\circ \approx 0.60$ ， $\cos 37^\circ \approx 0.80$ ， $\tan 37^\circ \approx 0.75$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$ ）



【分析】（1）由三角函数定义求出 AE 、 AB ，即可得出答案；

（2）求出该汽车的速度，即可得出结论。

【解答】解：（1）根据题意，得 $\angle CAB = 37^\circ$ ， $CD = 220$ 米， $\angle DAB = 30^\circ$ ， $\angle DBA = 45^\circ$ ，

如图，过点 C 和点 D 作 CE 和 DF 垂直于 AB 于点 E 和 F ，

$\because CD \parallel AB$ ，

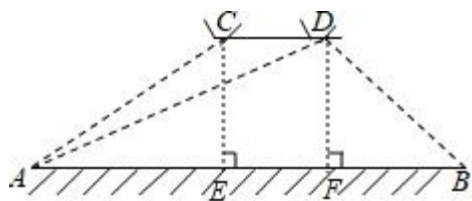
$\therefore$ 四边形 $CDFE$ 是矩形，

$\therefore CE = DF$ ， $CD = EF$ ，

$\because \angle DBA = 45^\circ$ ，

$\therefore DF = BF$ ，

设 $DF = BF = CE = x$ 米，



在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中， $\angle DAF = 30^\circ$ ， $DF = x$ 米，

$\therefore AF = \sqrt{3}DF = \sqrt{3}x$ （米），

$\therefore AE = AF - EF = (\sqrt{3}x - 220)$ 米，

在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中， $\angle CAE = 37^\circ$ ，

$\therefore CE = AE \cdot \tan 37^\circ$ ，

$\therefore x = (\sqrt{3}x - 220) \times 0.75$ ，

解得 $x = 60(3\sqrt{3} + 4) = (180\sqrt{3} + 240)$ 米，

$$\therefore AE = \sqrt{3}x - 220 = (320 + 240\sqrt{3}) \text{ 米},$$

$$FB = x = (180\sqrt{3} + 240) \text{ (米)},$$

$$\therefore AB = AE + EF + FB$$

$$= 320 + 240\sqrt{3} + 220 + 180\sqrt{3} + 240$$

$$= 780 + 420\sqrt{3}$$

$$\approx 1507 \text{ (米)},$$

答：限速道路 AB 的长约为 1507 米；

$$(2) \because 1 \text{ 分 } 20 \text{ 秒} = \frac{1}{45} \text{ 小时},$$

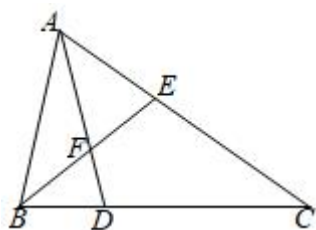
$$\therefore \text{该汽车的速度约为: } 1507 \div \frac{1}{45} \approx 67.8 \text{ km/h} > 60 \text{ km/h},$$

$\therefore$ 该车超速.

23. (12 分) 如图, 在 $\triangle ACB$ 中, 点 D 、 E 分别在边 BC 、 AC 上, $AD = AB$, $BE = CE$, AD 与 BE 交于点 F , 且 $AF \cdot DF = BF \cdot EF$.

求证: (1) $\angle ADC = \angle BEC$;

(2) $AF \cdot CD = EF \cdot AC$.



【分析】(1) 利用 $AF \cdot DF = BF \cdot EF$ 和 $\angle AFE = \angle BFD$ 可判断 $\triangle AFE \sim \triangle BFD$, 所以 $\angle AEF = \angle BDF$, 然后根据等角的补角相等得到结论;

(2) 由 $\triangle AFE \sim \triangle BFD$ 得到 $\angle EAF = \angle FBD$, $\angle AEF = \angle BDF$, 再证明 $\angle EAF = \angle C$, $\angle ABC = \angle AEF$, 于是可证明 $\triangle AEF \sim \triangle CBA$, 利用相似比得到 $\frac{AF}{AC} = \frac{EF}{AB}$, 然后证明 $AD = AB = CD$, 从而得到结论.

【解答】 证明: (1) $\because AF \cdot DF = BF \cdot EF$,

$$\therefore \frac{AF}{BF} = \frac{EF}{DF},$$

而 $\angle AFE = \angle BFD$,

$$\therefore \triangle AFE \sim \triangle BFD,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle BDF,$$

$$\because \angle AEF + \angle BEC = 180^\circ, \quad \angle BDF + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle BEC;$$

$$(2) \because \triangle AFE \sim \triangle BFD,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle FBD, \quad \angle AEF = \angle BDF,$$

$$\because EB = EC, \quad AB = AD,$$

$$\therefore \angle EBC = \angle C, \quad \angle ADB = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle C, \quad \angle ABC = \angle AEF,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{AB},$$

$$\therefore EF \cdot AC = AB \cdot AF$$

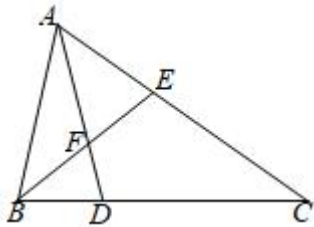
$$\because \angle DAC = \angle C,$$

$$\therefore AD = CD,$$

$$\therefore AB = AD = CD,$$

$$\therefore EF \cdot AC = CD \cdot AF,$$

$$\text{即 } AF \cdot CD = EF \cdot AC.$$

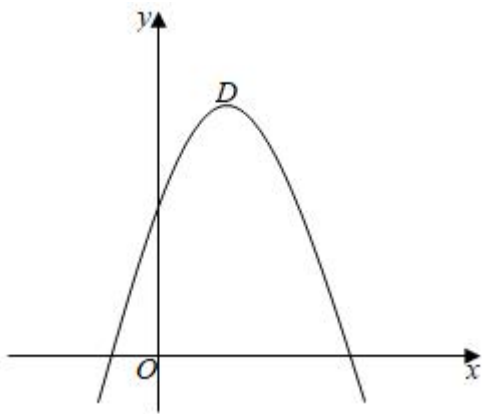


24. (12分) 已知二次函数 $y = ax^2 - 2ax + a + 4$ ($a < 0$) 的大致图象如图所示, 这个函数图象的顶点为点 D .

(1) 求该函数图象的开口方向、对称轴及点 D 的坐标;

(2) 设该函数图象与 y 轴正半轴交于点 C , 与 x 轴正半轴交于点 B , 图象的对称轴与 x 轴交于点 A , 如果 $DC \perp BC$, $\tan \angle DBC = \frac{1}{3}$, 求该二次函数的解析式;

(3) 在(2)的条件下, 设点 M 在第一象限该函数的图象上, 且点 M 的横坐标为 t ($t > 1$), 如果 $\triangle ACM$ 的面积是 $\frac{25}{8}$, 求点 M 的坐标.



【分析】（1）用配方法配成顶点式，即可得出结论；

（2）先判断出 $\triangle CDH \sim \triangle BCO$ ，得出 $\frac{CD}{BC} = \frac{DH}{CO}$ ，求出 $OC = 3$ ，即可得出结论；

（3）连接 OM ，利用三角形的面积的和差，建立方程求解，即可得出结论．

【解答】解：（1） $\because y = ax^2 - 2ax + a + 4 = a(x^2 - 2x + 1) + 4 = a(x - 1)^2 + 4$ ，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = 1$ ，顶点 $D(1, 4)$ ，

$\because a < 0$ ，

$\therefore$ 抛物线的开口向下；

（2）由（1）知，抛物线的对称轴为 $x = 1$ ，

$\therefore A(1, 0)$ ，

对于 $y = ax^2 - 2ax + a + 4$ ，

令 $x = 0$ ，则 $y = a + 4$ ，

$\therefore C(0, a + 4)$ ，

如图 1，

过点 D 作 $DH \perp y$ 轴于 H ，

$\therefore \angle CDH + \angle DCH = 90^\circ$ ，

$\because DC \perp BC$ ，

$\therefore \angle BCD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle DCH + \angle OCB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle CDH = \angle BCO$ ，

$\because \angle BOC = \angle CHD = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle CDH \sim \triangle BCO$ ，

$$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{DH}{CO},$$

$$\text{在 Rt}\triangle BDC \text{ 中, } \tan \angle DBC = \frac{CD}{BC} = \frac{1}{3},$$

$$\because D(1, 4),$$

$$\therefore DH = 1,$$

$$\therefore \frac{1}{CO} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore CO = 3,$$

$$\therefore a + 4 = 3,$$

$$\therefore a = -1,$$

$$\therefore \text{二次函数的解析式为 } y = -x^2 + 2x + 3;$$

(3) 如图 2,

由 (2) 知, $a = -1$,

$$\therefore C(0, 3),$$

$$\therefore OC = 3,$$

连接 OM , 设点 M 的横坐标为 t ($t > 1$),

$$\therefore \text{点 } M \text{ 的纵坐标为 } -t^2 + 2t + 3,$$

$$\because \triangle ACM \text{ 的面积是 } \frac{25}{8},$$

$$\therefore S_{\triangle ACM} = S_{\triangle OCM} + S_{\triangle OAM} - S_{\triangle AOC}$$

$$= \frac{1}{2} \times 3t + \frac{1}{2} \times 1 \times (-t^2 + 2t + 3) - \frac{1}{2} \times 1 \times 3$$

$$= \frac{25}{8},$$

$$\therefore t = \frac{5}{2},$$

$$\therefore M\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{4}\right).$$

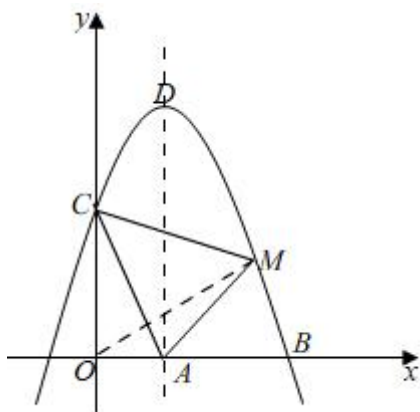


图2

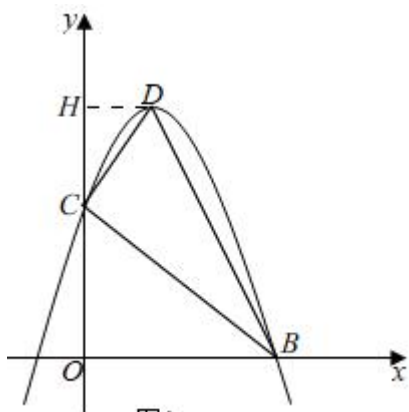
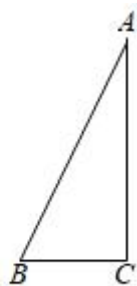
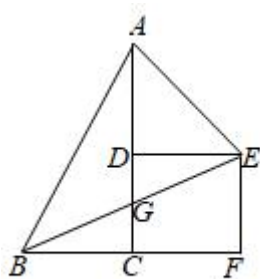


图1

25. (14分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 12$, $BC = 5$, 点 D 是边 AC 上的动点, 以 CD 为边在 $\triangle ABC$ 外作正方形 $CDEF$, 分别联结 AE 、 BE , BE 与 AC 交于点 G
- (1) 当 $AE \perp BE$ 时, 求正方形 $CDEF$ 的面积;
 - (2) 延长 ED 交 AB 于点 H , 如果 $\triangle BEH$ 和 $\triangle ABG$ 相似, 求 $\sin \angle ABE$ 的值;
 - (3) 当 $AG = AE$ 时, 求 CD 的长.



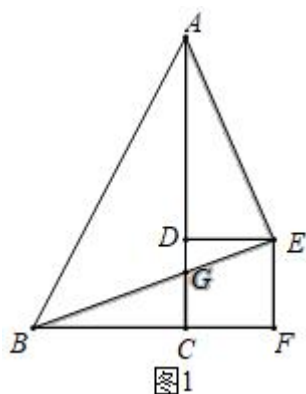
备用图

【分析】 (1) 证明 $\triangle ADE \cong \triangle BFE$ (ASA), 推出 $AD = BF$, 构建方程求出 CD 即可.

(2) 过点 A 作 $AM \perp BE$ 于 M , 想办法求出 AB , AM 即可解决问题.

(3) 如图 3 中, 延长 CA 到 N , 使得 $AN = AG$. 设 $CD = DE = EF = CF = x$, 则 $AD = 12 - x$, $DN = BF = 5 + x$, 在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, 利用勾股定理求出 x 即可解决问题.

【解答】解：（1）如图 1 中，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore CD = DE = EF = CF$ ， $\angle CDE = \angle DEF = \angle F = 90^\circ$ ，

$\because AE \perp BE$ ，

$\therefore \angle AEB = \angle DEF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AED = \angle BEF$ ，

$\because \angle ADE = \angle F = 90^\circ$ ， $DE = FE$ ，

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BFE$ (ASA)，

$\therefore AD = BF$ ，

$\therefore AD = 5 + CF = 5 + CD$ ，

$\because AC = CD + AD = 12$ ，

$\therefore CD + 5 + CD = 12$ ，

$\therefore CD = \frac{7}{2}$ ，

$\therefore$ 正方形 $CDEF$ 的面积为 $\frac{49}{4}$ 。

（2）如图 2 中，

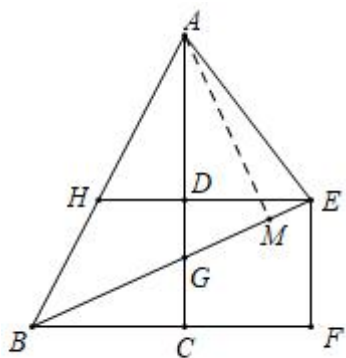


图2

$$\because \angle ABG = \angle EBH,$$

$$\therefore \text{当} \angle BAG = \angle BEH = \angle CBG \text{ 时, } \triangle ABG \sim \triangle EBH,$$

$$\because \angle BCG = \angle ACB, \angle CBG = \angle BAG,$$

$$\therefore \triangle CBG \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore CB^2 = CG \cdot CA,$$

$$\therefore CG = \frac{25}{12},$$

$$\therefore BG = \sqrt{BC^2 + CG^2} = \sqrt{5^2 + \left(\frac{25}{12}\right)^2} = \frac{65}{12},$$

$$\therefore AG = AC - CG = \frac{119}{12},$$

过点 A 作 $AM \perp BE$ 于 M ,

$$\because \angle BCG = \angle AMG = 90^\circ, \angle CGB = \angle AGM,$$

$$\therefore \angle GAM = \angle CBG,$$

$$\therefore \cos \angle GAM = \cos \angle CBG = \frac{BC}{BG} = \frac{12}{13} = \frac{AM}{AG},$$

$$\therefore AM = \frac{119}{13},$$

$$\because AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13,$$

$$\therefore \sin \angle ABM = \frac{AM}{AB} = \frac{119}{169}.$$

(3) 如图 3 中, 延长 CA 到 N , 使得 $AN = AG$.


$$\therefore \angle GEN = 90^\circ \quad ,$$
$$\therefore ND = BF,$$
$$\therefore AN = AE = 5 + x - (12 - x) = 2x - 7,$$
$$\therefore x^2 + (12 - x)^2 = (2x - 7)^2,$$
$$\therefore x = 1 + \frac{\sqrt{194}}{2} \text{ 或 } 1 - \frac{\sqrt{194}}{2} \text{ (舍弃),}$$
$$\therefore CD = 1 + \frac{\sqrt{194}}{2}.$$