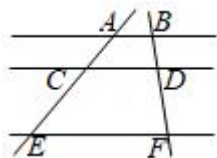




7. (4分) 如果  $a:b=2:3$ , 那么代数式  $\frac{b-a}{a}$  的值是\_\_\_\_\_.

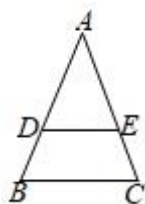
8. (4分) 如图,  $AB \parallel CD \parallel EF$ , 如果  $AC=2$ ,  $CE=3$ ,  $BD=1.5$ , 那么  $BF$  的长是\_\_\_\_\_.



9. (4分) 已知点  $P$  在线段  $AB$  上, 如果  $AP^2 = AB \cdot BP$ ,  $AB=4$ , 那么  $AP$  的长是\_\_\_\_\_.

10. (4分) 已知二次函数  $y = a(x + \frac{3}{2})^2 - 1$  的图象在直线  $x = -\frac{3}{2}$  的左侧部分是下降的, 那么  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

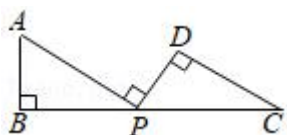
11. (4分) 如图, 在  $\triangle ABC$  中, 点  $D$ 、 $E$  分别在边  $AB$ 、 $AC$  上,  $DE \parallel BC$ , 如果  $\triangle AED$  和四边形  $DECB$  的面积相等,  $BC = 2\sqrt{2}$ , 那么  $DE$  的长是\_\_\_\_\_.



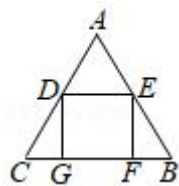
12. (4分) 在坡度为  $i=1:3$  的山坡上种树, 要求株距 (相邻两棵树间的水平距离) 是 6 米, 那么斜坡上相邻两棵树间的坡面距离是\_\_\_\_\_米.

13. (4分) 已知甲、乙两楼相距 30 米, 如果从甲楼底看乙楼顶, 测得仰角为  $45^\circ$ , 从乙楼顶看甲楼顶, 测得俯角为  $30^\circ$ , 那么甲楼高是\_\_\_\_\_米.

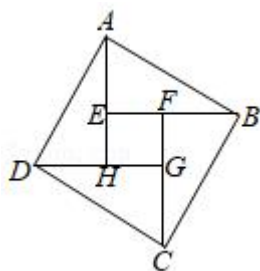
14. (4分) 如图, 点  $P$  在线段  $BC$  上,  $AB \perp BC$ ,  $DP \perp AP$ ,  $CD \perp DP$ , 如果  $BC=10$ ,  $AB=2$ ,  $\tan C = \frac{1}{2}$ , 那么  $DP$  的长是\_\_\_\_\_.



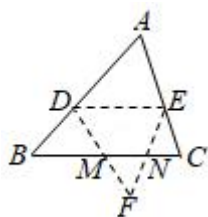
15. (4分) 如图, 已知  $\triangle ABC$  是边长为 2 的等边三角形, 正方形  $DEFG$  的顶点  $D$ 、 $E$  分别在边  $AC$ 、 $AB$  上, 点  $F$ 、 $G$  在边  $BC$  上, 那么  $AD$  的长是\_\_\_\_\_.



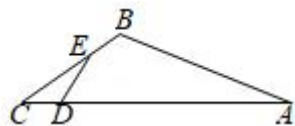
16. (4分)《周髀算经》中的“赵爽弦图”(如图),图中的四个直角三角形都全等,如果正方形  $ABCD$  的面积是正方形  $EFGH$  面积的 13 倍,那么  $\angle ABE$  的余切值是\_\_\_\_\_.



17. (4分)如图,在  $\triangle ABC$  中,点  $D$ 、 $E$  分别在边  $AB$ 、 $AC$  上,  $DE \parallel BC$ , 将  $\triangle ADE$  沿直线  $DE$  翻折后与  $\triangle FDE$  重合,  $DF$ 、 $EF$  分别与边  $BC$  交于点  $M$ 、 $N$ , 如果  $DE = 8$ ,  $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$ , 那么  $MN$  的长是\_\_\_\_\_.



18. (4分)如图,在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ABC = 120^\circ$ ,  $AB = 12$ , 点  $D$  在边  $AC$  上, 点  $E$  在边  $BC$  上,  $\sin \angle ADE = \frac{4}{5}$ ,  $ED = 5$ , 如果  $\triangle ECD$  的面积是 6, 那么  $BC$  的长是\_\_\_\_\_.



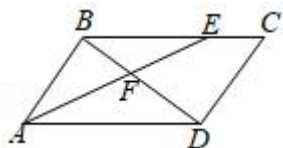
三、(本大题共 7 题, 第 19--22 题每题 10 分; 第 23、24 题每题 12 分; 第 25 题 14 分: 满分 78 分)

19. (10分) 计算:  $\sin 45^\circ \cot 45^\circ - \tan 60^\circ + |2\cos 45^\circ - \cot 30^\circ|$ .

20. (10分) 如图, 在  $\square ABCD$  中,  $AE$  平分  $\angle BAD$ ,  $AE$  与  $BD$  交于点  $F$ ,  $AB = 1.2$ ,  $BC = 1.8$ .

(1) 求  $BF:DF$  的值;

(2) 设  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ . 求向量  $\overrightarrow{DF}$  (用向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  表示).



21. (10分) 已知抛物线  $y = x^2 + bx + c$  与  $y$  轴交于点  $C(0, 2)$ , 它的顶点为  $M$ , 对称轴是直线  $x = -1$ .

(1) 求此抛物线的表达式及点  $M$  的坐标;

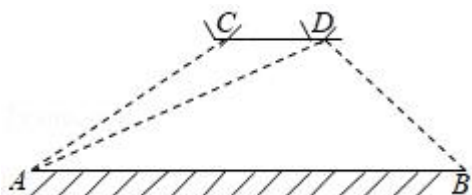
(2) 将上述抛物线向下平移  $m$  ( $m > 0$ ) 个单位, 所得新抛物线经过原点  $O$ , 设新抛物线的顶点为  $N$ , 请判断  $\triangle MON$  的形状, 并说明理由.

22. (10分) 为加强对市内道路交通安全的监督, 王警官利用无人机进行检测. 某高架路有一段限速每小时 60 千米的道路  $AB$  (如图所示), 当无人机在限速道路的正上方  $C$  处时, 测得限速道路的起点  $A$  的俯角是  $37^\circ$ , 无人机继续向右水平飞行 220 米到达  $D$  处, 此时又测得起点  $A$  的俯角是  $30^\circ$ , 同时测得限速道路终点  $B$  的俯角是  $45^\circ$  (注: 即四边形  $ABDC$  是梯形).

(1) 求限速道路  $AB$  的长 (精确到 1 米);

(2) 如果李师傅在道路  $AB$  上行驶的时间是 1 分 20 秒, 请判断他是否超速? 并说明理由.

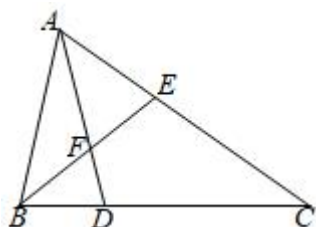
(参考数据:  $\sin 37^\circ \approx 0.60$ ,  $\cos 37^\circ \approx 0.80$ ,  $\tan 37^\circ \approx 0.75$ ,  $\sqrt{3} \approx 1.73$ )



23. (12分) 如图, 在  $\triangle ACB$  中, 点  $D$ 、 $E$  分别在边  $BC$ 、 $AC$  上,  $AD = AB$ ,  $BE = CE$ ,  $AD$  与  $BE$  交于点  $F$ , 且  $AF \cdot DF = BF \cdot EF$ .

求证: (1)  $\angle ADC = \angle BEC$ ;

(2)  $AF \cdot CD = EF \cdot AC$ .

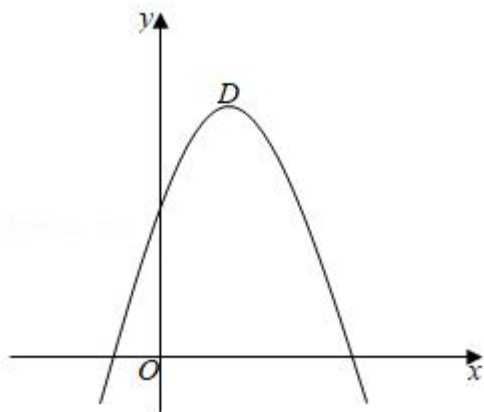


24. (12分) 已知二次函数  $y = ax^2 - 2ax + a + 4$  ( $a < 0$ ) 的大致图象如图所示, 这个函数图象的顶点为点  $D$ .

(1) 求该函数图象的开口方向、对称轴及点  $D$  的坐标;

(2) 设该函数图象与  $y$  轴正半轴交于点  $C$ ，与  $x$  轴正半轴交于点  $B$ ，图象的对称轴与  $x$  轴交于点  $A$ ，如果  $DC \perp BC$ ， $\tan \angle DBC = \frac{1}{3}$ ，求该二次函数的解析式；

(3) 在 (2) 的条件下，设点  $M$  在第一象限该函数的图象上，且点  $M$  的横坐标为  $t$  ( $t > 1$ )，如果  $\triangle ACM$  的面积是  $\frac{25}{8}$ ，求点  $M$  的坐标。

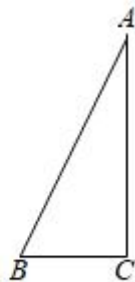
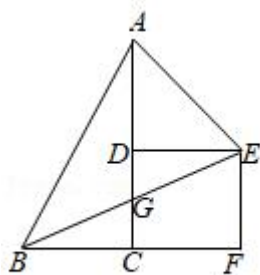


25. (14 分) 如图，在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 12$ ， $BC = 5$ ，点  $D$  是边  $AC$  上的动点，以  $CD$  为边在  $\triangle ABC$  外作正方形  $CDEF$ ，分别联结  $AE$ 、 $BE$ ， $BE$  与  $AC$  交于点  $G$

(1) 当  $AE \perp BE$  时，求正方形  $CDEF$  的面积；

(2) 延长  $ED$  交  $AB$  于点  $H$ ，如果  $\triangle BEH$  和  $\triangle ABG$  相似，求  $\sin \angle ABE$  的值；

(3) 当  $AG = AE$  时，求  $CD$  的长。



备用图

## 2020-2021 学年上海市徐汇区九年级（上）期末数学试卷（一模）

### 参考答案与试题解析

一.选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）（下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的）

1.（4 分）将抛物线  $y = 2(x+1)^2$  先向右平移 3 个单位，再向下平移 2 个单位后，所得抛物线的表达式是（ ）

A.  $y = 2(x-2)^2 - 2$

B.  $y = 2(x-2)^2 + 2$

C.  $y = 2(x+4)^2 - 2$

D.  $y = 2(x+4)^2 + 2$

【分析】先确定抛物线  $y = 2(x+1)^2$  的顶点坐标为  $(-1, 0)$ ，再根据点平移的规律得到把点  $(-1, 0)$  平移后得到对应点的坐标为  $(2, -2)$ ，然后根据顶点式写出平移后的抛物线解析式.

【解答】解：抛物线  $y = 2(x+1)^2$  的顶点坐标为  $(-1, 0)$ ，把点  $(-1, 0)$  先向右平移 3 个单位，再向下平移 2 个单位后得到的点的坐标为  $(2, -2)$ ，所以平移后的抛物线的解析式为  $y = 2(x-2)^2 - 2$ .

故选：A.

【点评】本题考查了二次函数图象与几何变换：由于抛物线平移后的形状不变，故  $a$  不变，所以求平移后的抛物线解析式通常可利用两种方法：一是求出原抛物线上任意两点平移后的坐标，利用待定系数法求出解析式；二是只考虑平移后的顶点坐标，即可求出解析式.

2.（4 分）在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， $BC = 10$ ，那么下列结论正确的是（ ）

A.  $\tan C = \frac{4}{3}$

B.  $\cot C = \frac{4}{5}$

C.  $\sin C = \frac{3}{4}$

D.  $\cos C = \frac{4}{5}$

【分析】画出相应的图形，根据勾股定理和锐角三角函数的意义求解后，再做出判断即可.

【解答】解：如图，由勾股定理得， $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ ,

$$\therefore \tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},$$

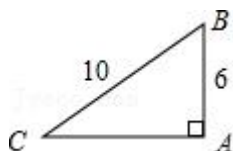
$$\cot C = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3},$$

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

$$\cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5},$$

因此选项  $D$  符合题意,

故选:  $D$ .



**【点评】** 本题考查锐角三角函数、勾股定理, 掌握锐角三角函数的意义是解决问题的关键.

3. (4 分) 已知抛物线  $y = -x^2 + 4x + c$  经过点  $(4, 3)$ , 那么下列各点中, 该抛物线必经过的点是 ( )

A.  $(0, 2)$                       B.  $(0, 3)$                       C.  $(0, 4)$                       D.  $(0, 5)$

**【分析】** 先根据待定系数法求得抛物线的解析式, 然后计算出自变量为 0 所对应的函数值, 再根据二次函数图象上点的坐标特征进行判断.

**【解答】** 解:  $\because$  抛物线  $y = -x^2 + 4x + c$  经过点  $(4, 3)$ ,

$$\therefore -16 + 16 + c = 3,$$

$$\therefore c = 3,$$

$$\therefore \text{抛物线为 } y = -x^2 + 4x + 3,$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = -x^2 + 4x + 3 = 3;$$

所以点  $(0, 3)$  在抛物线  $y = -x^2 + 4x + 3$  上.

故选:  $B$ .

**【点评】** 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征: 二次函数图象上点的坐标满足其解析式.

4. (4 分) 已知海面上一艘货轮  $A$  在灯塔  $B$  的北偏东  $30^\circ$  方向, 海监船  $C$  在灯塔  $B$  的正东方向 5 海里处, 此时海监船  $C$  发现货轮  $A$  在它的正北方向, 那么海监船  $C$  与货轮  $A$  的距离是 ( )

A. 10 海里                      B.  $5\sqrt{3}$  海里                      C. 5 海里                      D.  $\frac{5}{3}\sqrt{3}$  海里

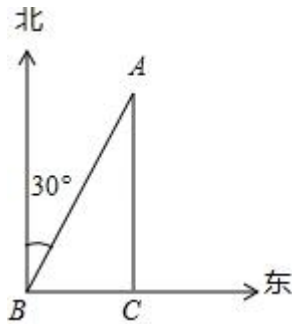
**【分析】** 如图, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ABC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ,  $BC = 5$  海里, 根据三角函数的定义即可得到结论.

【解答】解：如图，在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle ABC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ， $BC = 5$  海里，

$$\therefore AC = BC \cdot \tan 60^\circ = 5\sqrt{3} \text{ (海里)},$$

即海监船  $C$  与货轮  $A$  的距离是  $5\sqrt{3}$  海里，

故选：B.



【点评】本题考查了解直角三角形的应用，解题的关键是从实际问题中抽象出直角三角形并求解.

5. (4 分) 下列说法中，正确的是 ( )

- A. 两个矩形必相似
- B. 两个含  $45^\circ$  角的等腰三角形必相似
- C. 两个菱形必相似
- D. 两个含  $30^\circ$  角的直角三角形必相似

【分析】直接利用相似图形的判定方法得出答案.

【解答】解：A、两个矩形对应边不一定成比例，故此选项错误；

B、两个含  $45^\circ$  角的等腰三角形， $45^\circ$  不一定是对应角，故不一定相似，故此选项错误；

C、两个菱形的对应角不一定相等，不一定相似，故此选项错误；

D、两个含  $30^\circ$  角的直角三角形必相似，故此选项正确.

故选：D.

【点评】此题主要考查了相似图形，正确掌握相似图形的判定方法是解题关键.

6. (4 分) 定义： $[x]$  表示不超过实数  $x$  的最大整数. 例如： $[1.7] = 1$ ， $[\frac{3}{5}] = 0$ ， $[-2\frac{1}{4}] = -3$ . 根

据你学习函数的经验，下列关于函数  $y = [x]$  的判断中，正确的是 ( )

- A. 函数  $y = [x]$  的定义域是一切整数
- B. 函数  $y = [x]$  的图象是经过原点的一条直线
- C. 点  $(2\frac{2}{5}, 2)$  在函数  $y = [x]$  图象上
- D. 函数  $y = [x]$  的函数值  $y$  随  $x$  的增大而增大

【分析】根据题意，可以判断各个选项中的说法是否正确，从而可以解答本题．

【解答】解：由题意可得，

函数  $y = [x]$  的定义域是一切实数，故选项  $A$  错误；

函数  $y = [x]$  的图象是分段函数，故选项  $B$  错误；

点  $(2\frac{2}{5}, 2)$  在函数  $y = [x]$  图象上，故选项  $C$  正确；

函数  $y = [x]$  的函数值  $y$  随  $x$  的增大不一定增大，如  $x = 1.2$  时， $y = [1.2] = 1$ ， $x = 1.5$  时， $y = [1.5] = 1$ ，即  $x = 1.2$  和  $x = 1.5$  时的函数值相等，故选项  $D$  错误；

故选： $C$ ．

【点评】本题考查函数及其图象、新定义，解答本题的关键是明确题意，利用新定义解答．

## 二、填空题（本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7.（4 分）如果  $a : b = 2 : 3$ ，那么代数式  $\frac{b-a}{a}$  的值是  $-\frac{1}{2}$ ．

【分析】根据已知条件得出  $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$ ，再把要求的式子化成  $\frac{b-a}{a} = \frac{b}{a} - 1$ ，然后代值计算即可．

【解答】解： $\because a : b = 2 : 3$ ，

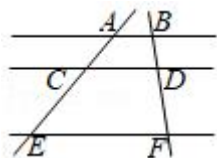
$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{b-a}{a} = \frac{b}{a} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

故答案为： $\frac{1}{2}$ ．

【点评】此题考查了比例的性质，熟练掌握比例的性质是解题的关键．

8.（4 分）如图， $AB \parallel CD \parallel EF$ ，如果  $AC = 2$ ， $CE = 3$ ， $BD = 1.5$ ，那么  $BF$  的长是  $\frac{15}{4}$ ．



【分析】根据平行线分线段成比例定理解答即可．

【解答】解： $\because AB \parallel CD \parallel EF$ ， $AC = 2$ ， $CE = 3$ ， $BD = 1.5$ ，

$$\therefore \frac{AC}{AE} = \frac{BD}{BF},$$

$$\text{即 } \frac{2}{2+3} = \frac{1.5}{BF},$$

解得：  $BF = \frac{15}{4}$ ,

故答案为：  $\frac{15}{4}$ .

**【点评】** 本题考查的是平行线分线段成比例定理，灵活运用定理、找准对应关系是解题的关键.

9. (4分) 已知点  $P$  在线段  $AB$  上，如果  $AP^2 = AB \cdot BP$ ， $AB = 4$ ，那么  $AP$  的长是  $2\sqrt{5} - 2$ .

**【分析】** 先证出点  $P$  是线段  $AB$  的黄金分割点，再由黄金分割点的定义得到  $AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$ ，把  $AB = 4$  代入计算即可.

**【解答】** 解：  $\because$  点  $P$  在线段  $AB$  上， $AP^2 = AB \cdot BP$ ,

$\therefore$  点  $P$  是线段  $AB$  的黄金分割点， $AP > BP$ ,

$$\therefore AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \times 4 = 2\sqrt{5} - 2,$$

故答案为：  $2\sqrt{5} - 2$ .

**【点评】** 本题考查了黄金分割的概念：如果一个点把一条线段分成两条线段，并且较长线段是较短线段和整个线段的比例中项，那么就说这个点把这条线段黄金分割，这个点叫这条线段的黄金分割点；较长线段是整个线段的  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  倍.

10. (4分) 已知二次函数  $y = a(x + \frac{3}{2})^2 - 1$  的图象在直线  $x = -\frac{3}{2}$  的左侧部分是下降的，那么  $a$  的取值范围是  $a > 0$ .

**【分析】** 根据题目中的函数解析式和二次函数的性质，可以得到  $a$  的取值范围，本题得以解决.

**【解答】** 解：  $\because$  二次函数  $y = a(x + \frac{3}{2})^2 - 1$ ,

$\therefore$  该函数的对称轴为直线  $x = -\frac{3}{2}$ ,

$\because$  二次函数  $y = a(x + \frac{3}{2})^2 - 1$  的图象在直线  $x = -\frac{3}{2}$  的左侧部分是下降的，

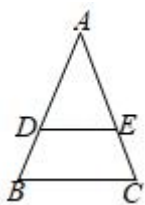
$\therefore a > 0$ ,

故答案为：  $a > 0$

**【点评】** 本题考查二次函数图象与系数的关系，解答本题的关键是明确题意，利用二次函数的性质解答.

11. (4分) 如图，在  $\triangle ABC$  中，点  $D$ 、 $E$  分别在边  $AB$ 、 $AC$  上， $DE \parallel BC$ ，如果  $\triangle AED$  和四

边形  $DECB$  的面积相等,  $BC = 2\sqrt{2}$ , 那么  $DE$  的长是 2.



**【分析】** 先根据题意得到  $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2}$ , 再证明  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ , 利用相似三角形的性质

得  $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = \frac{1}{2}$ , 然后利用比例的性质可求出  $DE$  的长.

**【解答】** 解:  $\because \triangle AED$  和四边形  $DECB$  的面积相等,

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2},$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } \frac{DE^2}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DE = 2.$$

故答案为 2.

**【点评】** 本题考查了相似三角形的判定与性质: 在判定两个三角形相似时, 应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件, 以充分发挥基本图形的作用, 寻找相似三角形的一般方法是通过作平行线构造相似三角形; 可利用相似三角形的性质得到对应角相等, 通过相似比进行几何计算.

12. (4 分) 在坡度为  $i = 1:3$  的山坡上种树, 要求株距 (相邻两棵树间的水平距离) 是 6 米, 那么斜坡上相邻两棵树间的坡面距离是  $2\sqrt{10}$  米.

**【分析】** 根据坡度的定义, 利用勾股定理即可解决问题.

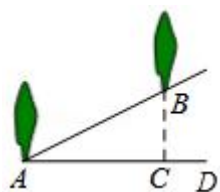
**【解答】** 解: 如图, 过  $B$  作  $BC \perp AD$  于  $C$ ,

$\because$  山坡  $AB$  的坡度为  $i = 1:3$ , 株距 (相邻两棵树间的水平距离) 是 6 米,

$\therefore$  水平距离  $AC = 6$  米, 铅垂高度  $BC = 2$  米,

∴斜坡上相邻两树间的坡面距离  $AB = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$  (米),

故答案为:  $2\sqrt{10}$ .



**【点评】** 本题考查解直角三角形的应用，解题的关键是理解坡度的定义，学会利用勾股定理解决问题.

13. (4分) 已知甲、乙两楼相距 30 米，如果从甲楼底看乙楼顶，测得仰角为  $45^\circ$ ，从乙楼顶看甲楼顶，测得俯角为  $30^\circ$ ，那么甲楼高是  $(30 - 10\sqrt{3})$  米.

**【分析】** 过 C 作  $CE \perp AB$  于 E，先由矩形和含  $30^\circ$  角的直角三角形的性质求出 AE 的长，再由等腰直角三角形的性质求出 AB 的长，即可得出结果.

**【解答】** 解：如图，甲楼为 CD、乙楼为 AB， $BD = 30$  米， $\angle ADB = 45^\circ$ ， $\angle CAF = 30^\circ$ ，过 C 作  $CE \perp AB$  于 E，则四边形 BDCE 为矩形， $CE \parallel AF$ ，

∴  $CE = BD = 30$  米， $CD = BE$ ， $\angle ACE = \angle CAF = 30^\circ$ ，

∴  $AE = \frac{\sqrt{3}}{3} CE = 10\sqrt{3}$  (米)，

在  $\text{Rt}\triangle ABD$  中， $\angle ADB = 45^\circ$ ，

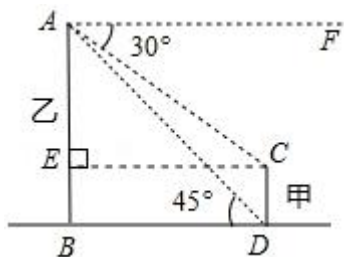
∴  $\triangle ABD$  为等腰直角三角形，

∴  $BD = AB = 30$  米，

∴  $CD = BE = AB - AE = (30 - 10\sqrt{3})$  米，

即甲楼的高为  $(30 - 10\sqrt{3})$  米，

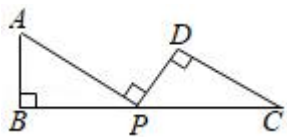
故答案为:  $(30 - 10\sqrt{3})$ .



**【点评】** 本题考查了解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题，通过题意画出图形和作辅助线构造出直角三角形是解题的关键.

14. (4分) 如图，点 P 在线段 BC 上， $AB \perp BC$ ， $DP \perp AP$ ， $CD \perp DP$ ，如果  $BC = 10$ ， $AB =$

2,  $\tan C = \frac{1}{2}$ , 那么  $DP$  的长是  $\frac{6}{5}\sqrt{5}$ .



【分析】由  $DP \perp AP$ ,  $CD \perp DP$ , 得  $AP \parallel CD$ , 则  $\angle C = \angle APB$ , 由  $\tan \angle APB = \frac{AB}{BP}$ , 求得

$$BP = 4, PC = 6, \text{ 在 Rt}\triangle CDP \text{ 中, } \tan C = \frac{DP}{CD}, CD = \sqrt{6^2 - DP^2}, \text{ 得出 } \frac{DP}{\sqrt{6^2 - DP^2}} = \frac{1}{2},$$

即可得出结果.

【解答】解:  $\because DP \perp AP, CD \perp DP$ ,

$$\therefore AP \parallel CD,$$

$$\therefore \angle C = \angle APB,$$

$$\because AB \perp BC,$$

$$\therefore \tan \angle APB = \frac{AB}{BP},$$

$$\because \tan C = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{2}{BP} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BP = 4,$$

$$\therefore PC = BC - BP = 10 - 4 = 6,$$

$$\text{在 Rt}\triangle CDP \text{ 中, } \tan C = \frac{DP}{CD}, CD = \sqrt{PC^2 - DP^2} = \sqrt{6^2 - DP^2},$$

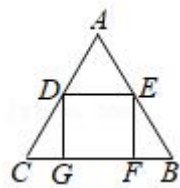
$$\therefore \frac{DP}{\sqrt{6^2 - DP^2}} = \frac{1}{2},$$

$$\text{解得: } DP = \frac{6}{5}\sqrt{5} \text{ 或 } DP = -\frac{6}{5}\sqrt{5} \text{ (不合题意舍去),}$$

$$\text{故答案为: } \frac{6}{5}\sqrt{5}.$$

【点评】本题考查了三角函数定义、勾股定理、平行线的判定与性质等知识; 熟练掌握三角函数定义是解题的关键.

15. (4分) 如图, 已知  $\triangle ABC$  是边长为 2 的等边三角形, 正方形  $DEFG$  的顶点  $D$ 、 $E$  分别在边  $AC$ 、 $AB$  上, 点  $F$ 、 $G$  在边  $BC$  上, 那么  $AD$  的长是  $4\sqrt{3} - 6$ .



【分析】过  $A$  点作  $AM \perp BC$  于  $M$ ，交  $DE$  于  $N$ ，如图，根据等边三角形的性质得到  $\angle C = \angle CAB = 60^\circ$ ， $CM = BM = \frac{1}{2}BC = 1$ ，利用含  $30^\circ$  度的直角三角形三边的关系得到  $AM = \sqrt{3}$ ，设正方形  $DEFG$  的边长为  $x$ ，则  $DG = DE = x$ ， $MN = DG = x$ ， $AN = \sqrt{3} - x$ ，接着证明  $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ ，利用相似三角形的性质得  $\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}}$ ，解得  $x = 4\sqrt{3} - 6$ ，然后证明  $\triangle ADE$  为等边三角形，从而得到  $AD = DE$ 。

【解答】解：过  $A$  点作  $AM \perp BC$  于  $M$ ，交  $DE$  于  $N$ ，如图，

$\because \triangle ABC$  为等边三角形，

$$\therefore \angle C = \angle CAB = 60^\circ, \quad CM = BM = \frac{1}{2}BC = 1,$$

$$\therefore AM = \sqrt{3}CM = \sqrt{3},$$

设正方形  $DEFG$  的边长为  $x$ ，则  $DG = DE = x$ ，

易得四边形  $DGMN$  为矩形，

$$\therefore MN = DG = x,$$

$$\therefore AN = AM - MN = \sqrt{3} - x,$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{DE}{CB} = \frac{AN}{AM}, \quad \text{即 } \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}}, \quad \text{解得 } x = 4\sqrt{3} - 6,$$

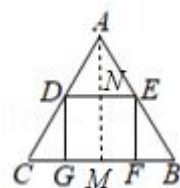
$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle C = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ADE$  为等边三角形，

$$\therefore AD = DE = 4\sqrt{3} - 6.$$

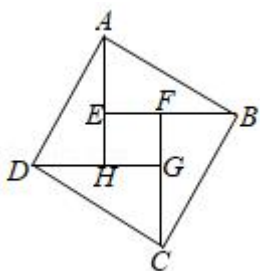
故答案为  $4\sqrt{3} - 6$ 。



【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质：在判定两个三角形相似时，应注意利用

图形中已有的公共角、公共边等隐含条件，以充分发挥基本图形的作用，寻找相似三角形的一般方法是通过作平行线构造相似三角形，灵活运用相似三角形的性质表示线段之间的关系；也考查了等边三角形和正方形的性质。

16. (4分)《周髀算经》中的“赵爽弦图”(如图),图中的四个直角三角形都全等,如果正方形  $ABCD$  的面积是正方形  $EFGH$  面积的 13 倍,那么  $\angle ABE$  的余切值是  $\frac{3}{2}$ .



**【分析】**小正方形  $EFGH$  面积是  $a^2$ , 则大正方形  $ABCD$  的面积是  $13a^2$ , 则小正方形  $EFGH$  边长是  $a$ , 则大正方形  $ABCD$  的边长是  $\sqrt{13}a$ , 设  $AE = BF = x$ , 利用勾股定理求出  $x$ , 最后利用熟记函数即可解答.

**【解答】**解: 设小正方形  $EFGH$  面积是  $a^2$ , 则大正方形  $ABCD$  的面积是  $13a^2$ ,

$\therefore$  小正方形  $EFGH$  边长是  $a$ , 则大正方形  $ABCD$  的边长是  $\sqrt{13}a$ ,

$\because$  图中的四个直角三角形是全等的,

$\therefore AE = BF$ ,

设  $AE = BF = x$ ,

在  $\text{Rt}\triangle AEB$  中,  $AB^2 = AE^2 + BE^2$ ,

即  $13a^2 = x^2 + (x+a)^2$

解得:  $x_1 = 2a$ ,  $x_2 = -3a$  (舍去),

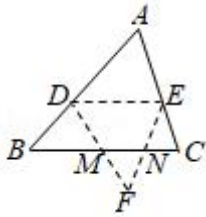
$\therefore AE = 2a$ ,  $BE = 3a$ ,

$\therefore \angle ABE$  的余切值  $= \frac{BE}{AE} = \frac{3}{2}$ ,

故答案为:  $\frac{3}{2}$ .

**【点评】**此题中根据正方形以及直角三角形的面积公式求得直角三角形的三边, 进一步运用锐角三角函数的定义求解.

17. (4分)如图, 在  $\triangle ABC$  中, 点  $D$ 、 $E$  分别在边  $AB$ 、 $AC$  上,  $DE \parallel BC$ , 将  $\triangle ADE$  沿直线  $DE$  翻折后与  $\triangle FDE$  重合,  $DF$ 、 $EF$  分别与边  $BC$  交于点  $M$ 、 $N$ , 如果  $DE = 8$ ,  $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$ , 那么  $MN$  的长是 4.



【分析】先根据折叠的性质得  $DA = DF$ ， $\angle ADE = \angle FDE$ ，再根据平行线的性质和等量代换得到  $\angle B = \angle BMD$ ，则  $DB = DM$ ，接着利用比例的性质得到  $FM = DM$ ，然后证明  $\triangle FMN \sim \triangle FDE$ ，从而利用相似比可计算出  $MN$  的长．

【解答】解： $\because \triangle ADE$  沿直线  $DE$  翻折后与  $\triangle FDE$  重合，

$$\therefore DA = DF, \angle ADE = \angle FDE,$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle B, \angle FDE = \angle BMD,$$

$$\therefore \angle B = \angle BMD,$$

$$\therefore DB = DM,$$

$$\because \frac{AD}{AB} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = 2,$$

$$\therefore \frac{DF}{DM} = 2,$$

$$\therefore FM = DM,$$

$$\because MN \parallel DE,$$

$$\therefore \triangle FMN \sim \triangle FDE,$$

$$\therefore \frac{MN}{DE} = \frac{FM}{FD} = \frac{1}{2},$$

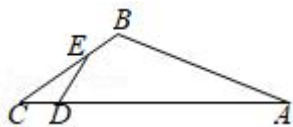
$$\therefore MN = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2} \times 8 = 4.$$

故答案为 4．

【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质：在判定两个三角形相似时，应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件，以充分发挥基本图形的作用，寻找相似三角形的一般方法是通过作平行线构造相似三角形，灵活运用相似三角形的性质表示线段之间的关系；也考查了折叠的性质．

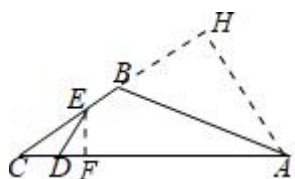
18. (4 分) 如图，在  $\triangle ABC$  中， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $AB = 12$ ，点  $D$  在边  $AC$  上，点  $E$  在边  $BC$

上,  $\sin \angle ADE = \frac{4}{5}$ ,  $ED = 5$ , 如果  $\triangle ECD$  的面积是 6, 那么  $BC$  的长是  $9\sqrt{3} - 6$ .



【分析】如图, 过点  $E$  作  $EF \perp BC$  于  $F$ , 过点  $A$  作  $AH \perp CB$  交  $CB$  的延长线于  $H$ . 解直角三角形求出  $BH$ ,  $CH$  即可解决问题.

【解答】解: 如图, 过点  $E$  作  $EF \perp BC$  于  $F$ , 过点  $A$  作  $AH \perp CB$  交  $CB$  的延长线于  $H$ .



$$\because \angle ABC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ABH = 180^\circ - \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\because AB = 12, \angle H = 90^\circ,$$

$$\therefore BH = AB \cdot \cos 60^\circ = 6, AH = AB \cdot \sin 60^\circ = 6\sqrt{3},$$

$$\because EF \perp DF, DE = 5,$$

$$\therefore \sin \angle ADE = \frac{EF}{DE} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore EF = 4,$$

$$\therefore DF = \sqrt{DE^2 - EF^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\because S_{\triangle CDE} = 6,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot CD \cdot EF = 6,$$

$$\therefore CD = 3,$$

$$\therefore CF = CD + DF = 6,$$

$$\because \tan C = \frac{EF}{CF} = \frac{AH}{CH},$$

$$\therefore \frac{4}{6} = \frac{6\sqrt{3}}{CH},$$

$$\therefore CH = 9\sqrt{3},$$

$$\therefore BC = CH - BH = 9\sqrt{3} - 6.$$

故答案为:  $9\sqrt{3} - 6$ .

【点评】本题考查解直角三角形, 三角形的面积等知识, 解题的关键是学会添加常用辅

助线，构造直角三角形解决问题.

三、(本大题共 7 题，第 19--22 题每题 10 分；第 23、24 题每题 12 分；第 25 题 14 分：满分 78 分)

19. (10 分) 计算： $\sin 45^\circ \cot 45^\circ - \tan 60^\circ + |2\cos 45^\circ - \cot 30^\circ|$ .

【分析】直接利用特殊角的三角函数值分别化简得出答案.

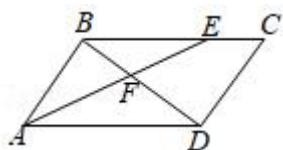
【解答】解：原式  $= \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 - \sqrt{3} + |2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}|$   
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$   
 $= -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

【点评】此题主要考查了实数运算以及特殊角的三角函数值，正确化简各数是解题关键.

20. (10 分) 如图，在  $\square ABCD$  中， $AE$  平分  $\angle BAD$ ， $AE$  与  $BD$  交于点  $F$ ， $AB = 1.2$ ， $BC = 1.8$ .

(1) 求  $BF:DF$  的值；

(2) 设  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ . 求向量  $\overrightarrow{DF}$  (用向量  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  表示).



【分析】(1) 由平行四边形的性质得  $DC \parallel AB$ ，从而  $\triangle ABF \sim \triangle EDF$ ，利用相似三角形的性质得比例式，从而解得  $BF:DF$ ；

(2) 先求出  $BF = \frac{2}{5}BD$ ，再利用向量的加法可得答案.

【解答】解：(1)  $\because AE$  平分  $\angle BAD$ ,

$$\therefore \angle BAE = \angle DAE,$$

$\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BEA = \angle DAE,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle BEA,$$

$$\therefore AB = BE = 1.2,$$

$$\because BC \parallel AD,$$

$$\therefore \triangle BEF \sim \triangle DAF,$$

$$\therefore \frac{BE}{AD} = \frac{BF}{DF},$$

$$\therefore \frac{BF}{DF} = \frac{1.2}{1.8} = \frac{2}{3};$$

$$(2) \because BF: DF = 2: 3,$$

$$\therefore DF = \frac{3}{5}BD,$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \vec{a} - \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{DF} = \frac{3}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}.$$

**【点评】** 本题考查了相似三角形的判定与性质及平行四边形的性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键.

21. (10分) 已知抛物线  $y = x^2 + bx + c$  与  $y$  轴交于点  $C(0, 2)$ ，它的顶点为  $M$ ，对称轴是直线  $x = -1$ .

(1) 求此抛物线的表达式及点  $M$  的坐标;

(2) 将上述抛物线向下平移  $m$  ( $m > 0$ ) 个单位，所得新抛物线经过原点  $O$ ，设新抛物线的顶点为  $N$ ，请判断  $\triangle MON$  的形状，并说明理由.

**【分析】** (1) 根据待定系数法即可求得抛物线的解析式，然后化成顶点式求得顶点  $M$  的坐标;

(2) 设新抛物线的解析式为  $y = (x+1)^2 + 1 - m$ ，把  $(0, 0)$  代入求得  $m$  的值，即可根据平移的原则得到顶点  $N$  的坐标，根据勾股定理求得  $OM^2 = ON^2 = 2$ ， $MN^2 = 4$ ，即可得到结论.

**【解答】** 解: (1)  $\because$  抛物线  $y = x^2 + bx + c$  与  $y$  轴交于点  $C(0, 2)$ ，对称轴是直线  $x = -1$ .

$$\therefore \begin{cases} c=2 \\ -\frac{b}{2}=-1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b=2 \\ c=2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{ 抛物线的表达式为 } y = x^2 + 2x + 2,$$

$$\because y = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1,$$

$$\therefore \text{ 顶点 } M(-1, 1);$$

(2)  $\because$  抛物线向下平移  $m$  ( $m > 0$ ) 个单位，所得新抛物线经过原点  $O$ ,

$$\therefore \text{ 设新抛物线的解析式为 } y = (x+1)^2 + 1 - m,$$

$$\text{把 } (0, 0) \text{ 代入得, } 0 = 1 + 1 - m,$$

$$\therefore m = 2,$$

$\therefore$  顶点  $N$  为  $(-1, -1)$ ,

$\therefore M(-1, 1)$ ,

$\therefore OM^2 = (-1)^2 + 1^2 = 2$ ,  $ON^2 = (-1)^2 + (-1)^2 = 2$ ,  $MN^2 = 2^2 = 4$ ,

$\therefore OM = ON$ ,  $OM^2 + ON^2 = MN^2$ ,

$\therefore \triangle MON$  是等腰直角三角形.

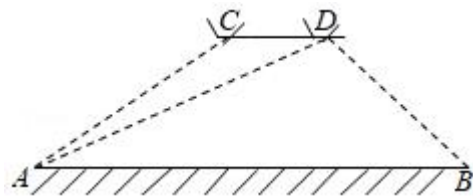
**【点评】** 本题考查了待定系数法求二次函数的解析式, 二次函数的图象与几何变换, 二次函数图象上点的坐标特征, 求得顶点  $M$ 、和顶点  $N$  的坐标是解题的关键.

22. (10 分) 为加强对市内道路交通安全的监督, 王警官利用无人机进行检测. 某高架路有一段限速每小时 60 千米的道路  $AB$  (如图所示), 当无人机在限速道路的正上方  $C$  处时, 测得限速道路的起点  $A$  的俯角是  $37^\circ$ , 无人机继续向右水平飞行 220 米到达  $D$  处, 此时又测得起点  $A$  的俯角是  $30^\circ$ , 同时测得限速道路终点  $B$  的俯角是  $45^\circ$  (注: 即四边形  $ABDC$  是梯形).

(1) 求限速道路  $AB$  的长 (精确到 1 米);

(2) 如果李师傅在道路  $AB$  上行驶的时间是 1 分 20 秒, 请判断他是否超速? 并说明理由.

(参考数据:  $\sin 37^\circ \approx 0.60$ ,  $\cos 37^\circ \approx 0.80$ ,  $\tan 37^\circ \approx 0.75$ ,  $\sqrt{3} \approx 1.73$ )



**【分析】** (1) 由三角函数定义求出  $AE$ 、 $AB$ , 即可得出答案;

(2) 求出该汽车的速度, 即可得出结论.

**【解答】** 解: (1) 根据题意, 得  $\angle CAB = 37^\circ$ ,  $CD = 220$  米,  $\angle DAB = 30^\circ$ ,  $\angle DBA = 45^\circ$ ,

如图, 过点  $C$  和点  $D$  作  $CE$  和  $DF$  垂直于  $AB$  于点  $E$  和  $F$ ,

$\therefore CD \parallel AB$ ,

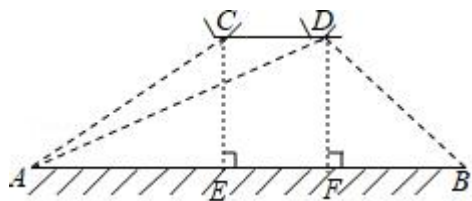
$\therefore$  四边形  $CDFE$  是矩形,

$\therefore CE = DF$ ,  $CD = EF$ ,

$\therefore \angle DBA = 45^\circ$ ,

$\therefore DF = BF$ ,

设  $DF = BF = CE = x$  米,



在  $\text{Rt}\triangle ADF$  中,  $\angle DAF = 30^\circ$ ,  $DF = x$  米,

$$\therefore AF = \sqrt{3}DF = \sqrt{3}x \text{ (米)},$$

$$\therefore AE = AF - EF = (\sqrt{3}x - 220) \text{ 米},$$

在  $\text{Rt}\triangle AEC$  中,  $\angle CAE = 37^\circ$ ,

$$\therefore CE = AE \cdot \tan 37^\circ,$$

$$\therefore x = (\sqrt{3}x - 220) \times 0.75,$$

解得  $x = 60(3\sqrt{3} + 4) = (180\sqrt{3} + 240)$  米,

$$\therefore AE = \sqrt{3}x - 220 = (320 + 240\sqrt{3}) \text{ 米},$$

$$FB = x = (180\sqrt{3} + 240) \text{ (米)},$$

$$\therefore AB = AE + EF + FB$$

$$= 320 + 240\sqrt{3} + 220 + 180\sqrt{3} + 240$$

$$= 780 + 420\sqrt{3}$$

$$\approx 1507 \text{ (米)},$$

答: 限速道路  $AB$  的长约为 1507 米;

$$(2) \because 1 \text{ 分 } 20 \text{ 秒} = \frac{1}{45} \text{ 小时},$$

$$\therefore \text{该汽车的速度约为: } 1507 \div \frac{1}{45} \approx 67.8 \text{ km/h} > 60 \text{ km/h},$$

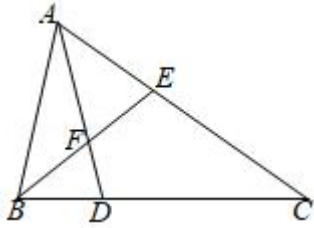
$\therefore$  该车超速.

**【点评】** 本题考查了解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题, 熟练掌握三角函数定义是解题的关键.

23. (12 分) 如图, 在  $\triangle ACB$  中, 点  $D$ 、 $E$  分别在边  $BC$ 、 $AC$  上,  $AD = AB$ ,  $BE = CE$ ,  $AD$  与  $BE$  交于点  $F$ , 且  $AF \cdot DF = BF \cdot EF$ .

求证: (1)  $\angle ADC = \angle BEC$ ;

$$(2) AF \cdot CD = EF \cdot AC.$$



【分析】(1) 利用  $AF \cdot DF = BF \cdot EF$  和  $\angle AFE = \angle BFD$  可判断  $\triangle AFE \sim \triangle BFD$ , 所以  $\angle AEF = \angle BDF$ , 然后根据等角的补角相等得到结论;

(2) 由  $\triangle AFE \sim \triangle BFD$  得到  $\angle EAF = \angle FBD$ ,  $\angle AEF = \angle BDF$ , 再证明  $\angle EAF = \angle C$ ,  $\angle ABC = \angle AEF$ , 于是可证明  $\triangle AEF \sim \triangle CBA$ , 利用相似比得到  $\frac{AF}{AC} = \frac{EF}{AB}$ , 然后证明  $AD = AB = CD$ , 从而得到结论.

【解答】证明: (1)  $\because AF \cdot DF = BF \cdot EF$ ,

$$\therefore \frac{AF}{BF} = \frac{EF}{DF},$$

而  $\angle AFE = \angle BFD$ ,

$$\therefore \triangle AFE \sim \triangle BFD,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle BDF,$$

$$\because \angle AEF + \angle BEC = 180^\circ, \angle BDF + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle BEC;$$

$$(2) \because \triangle AFE \sim \triangle BFD,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle FBD, \angle AEF = \angle BDF,$$

$$\because EB = EC, AB = AD,$$

$$\therefore \angle EBC = \angle C, \angle ADB = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle C, \angle ABC = \angle AEF,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{AB},$$

$$\therefore EF \cdot AC = AB \cdot AF$$

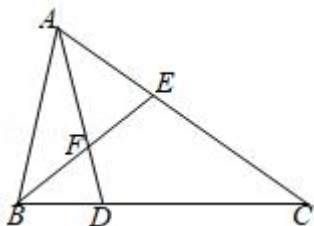
$$\because \angle DAC = \angle C,$$

$$\therefore AD = CD,$$

$$\therefore AB = AD = CD,$$

$$\therefore EF \cdot AC = CD \cdot AF,$$

$$\text{即 } AF \cdot CD = EF \cdot AC.$$



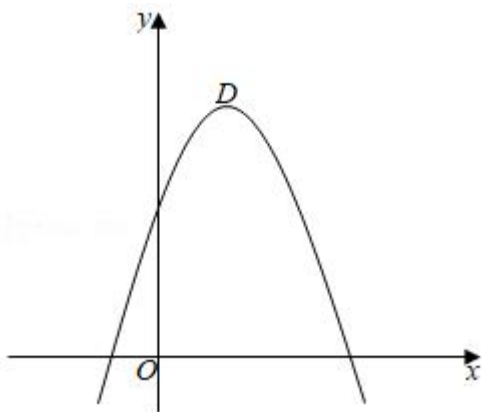
【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质：在判定两个三角形相似时，应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件，以充分发挥基本图形的作用，寻找相似三角形的一般方法是通过作平行线构造相似三角形；可利用相似三角形的性质得到对应角相等，通过相似比进行几何计算．

24. (12 分) 已知二次函数  $y = ax^2 - 2ax + a + 4$  ( $a < 0$ ) 的大致图象如图所示，这个函数图象的顶点为点  $D$ ．

(1) 求该函数图象的开口方向、对称轴及点  $D$  的坐标；

(2) 设该函数图象与  $y$  轴正半轴交于点  $C$ ，与  $x$  轴正半轴交于点  $B$ ，图象的对称轴与  $x$  轴交于点  $A$ ，如果  $DC \perp BC$ ， $\tan \angle DBC = \frac{1}{3}$ ，求该二次函数的解析式；

(3) 在 (2) 的条件下，设点  $M$  在第一象限该函数的图象上，且点  $M$  的横坐标为  $t$  ( $t > 1$ )，如果  $\triangle ACM$  的面积是  $\frac{25}{8}$ ，求点  $M$  的坐标．



【分析】 (1) 用配方法配成顶点式，即可得出结论；

(2) 先判断出  $\triangle CDH \sim \triangle BCO$ ，得出  $\frac{CD}{BC} = \frac{DH}{CO}$ ，求出  $OC = 3$ ，即可得出结论；

(3) 连接  $OM$ ，利用三角形的面积的和差，建立方程求解，即可得出结论．

【解答】 解：(1)  $\because y = ax^2 - 2ax + a + 4 = a(x^2 - 2x + 1) + 4 = a(x - 1)^2 + 4$ ，

$\therefore$  抛物线的对称轴为直线  $x = 1$ ，顶点  $D(1, 4)$ ，

$\because a < 0$ ，

$\therefore$  抛物线的开口向下；

(2) 由 (1) 知, 抛物线的对称轴为  $x = 1$ ,

$$\therefore A(1, 0),$$

$$\text{对于 } y = ax^2 - 2ax + a + 4,$$

$$\text{令 } x = 0, \text{ 则 } y = a + 4,$$

$$\therefore C(0, a + 4),$$

如图 1,

过点  $D$  作  $DH \perp y$  轴于  $H$ ,

$$\therefore \angle CDH + \angle DCH = 90^\circ,$$

$$\because DC \perp BC,$$

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCH + \angle OCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDH = \angle BCO,$$

$$\because \angle BOC = \angle CHD = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CDH \sim \triangle BCO,$$

$$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{DH}{CO},$$

$$\text{在 Rt}\triangle BDC \text{ 中, } \tan \angle DBC = \frac{CD}{BC} = \frac{1}{3},$$

$$\because D(1, 4),$$

$$\therefore DH = 1,$$

$$\therefore \frac{1}{CO} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore CO = 3,$$

$$\therefore a + 4 = 3,$$

$$\therefore a = -1,$$

$$\therefore \text{二次函数的解析式为 } y = -x^2 + 2x + 3;$$

(3) 如图 2,

由 (2) 知,  $a = -1$ ,

$$\therefore C(0, 3),$$

$$\therefore OC = 3,$$

连接  $OM$ ，设点  $M$  的横坐标为  $t$  ( $t > 1$ )，

$\therefore$  点  $M$  的纵坐标为  $-t^2 + 2t + 3$ ，

$\because \triangle ACM$  的面积是  $\frac{25}{8}$ ，

$$\therefore S_{\triangle ACM} = S_{\triangle OCM} + S_{\triangle OAM} - S_{\triangle AOC}$$

$$= \frac{1}{2} \times 3t + \frac{1}{2} \times 1 \times (-t^2 + 2t + 3) - \frac{1}{2} \times 1 \times 3$$

$$= \frac{25}{8},$$

$$\therefore t = \frac{5}{2},$$

$$\therefore M\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{4}\right).$$

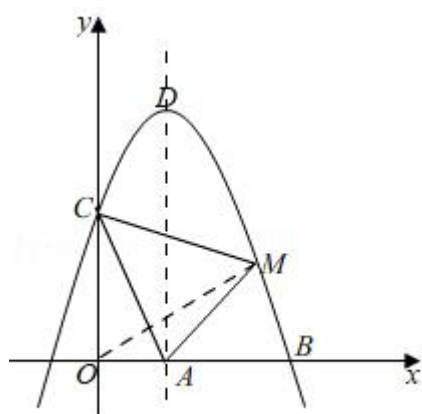


图2

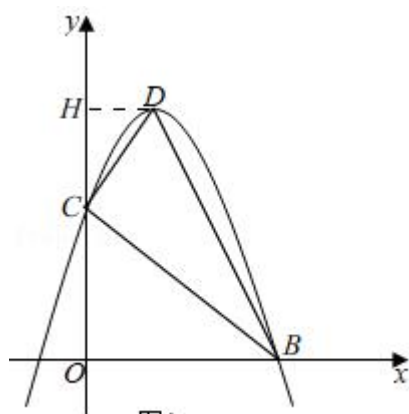


图1

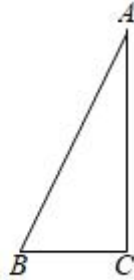
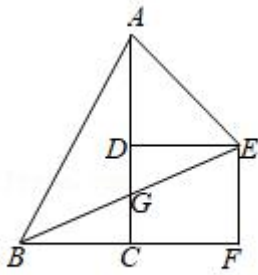
**【点评】** 此题是二次函数综合题，主要考查了配方法，相似三角形的判定和性质，锐角三角函数，几何图形的面积的计算，用方程的思想解决问题是解本题的关键．

25. (14分) 如图，在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 12$ ， $BC = 5$ ，点  $D$  是边  $AC$  上的动点，以  $CD$  为边在  $\triangle ABC$  外作正方形  $CDEF$ ，分别联结  $AE$ 、 $BE$ ， $BE$  与  $AC$  交于点  $G$

(1) 当  $AE \perp BE$  时，求正方形  $CDEF$  的面积；

(2) 延长  $ED$  交  $AB$  于点  $H$ ，如果  $\triangle BEH$  和  $\triangle ABG$  相似，求  $\sin \angle ABE$  的值；

(3) 当  $AG = AE$  时，求  $CD$  的长．



备用图

【分析】(1) 证明  $\triangle ADE \cong \triangle BFE$  (ASA)，推出  $AD = BF$ ，构建方程求出  $CD$  即可．

(2) 过点  $A$  作  $AM \perp BE$  于  $M$ ，想办法求出  $AB$ ， $AM$  即可解决问题．

(3) 如图 3 中，延长  $CA$  到  $N$ ，使得  $AN = AG$ ．设  $CD = DE = EF = CF = x$ ，则  $AD = 12 - x$ ， $DN = BF = 5 + x$ ，在  $\text{Rt} \triangle ADE$  中，利用勾股定理求出  $x$  即可解决问题．

【解答】解：(1) 如图 1 中，

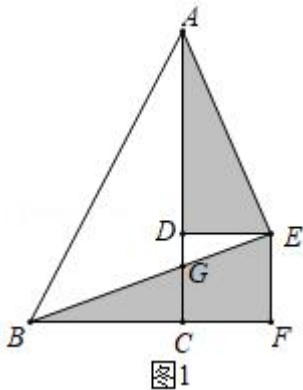


图1

$\because$  四边形  $ABCD$  是正方形，

$\therefore CD = DE = EF = CF$ ， $\angle CDE = \angle DEF = \angle F = 90^\circ$ ，

$\because AE \perp BE$ ，

$\therefore \angle AEB = \angle DEF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AED = \angle BEF$ ，

$\because \angle ADE = \angle F = 90^\circ$ ， $DE = FE$ ，

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BFE$  (ASA)，

$\therefore AD = BF$ ，

$\therefore AD = 5 + CF = 5 + CD$ ，

$\because AC = CD + AD = 12$ ，



(3) 如图 3 中, 延长  $CA$  到  $N$ , 使得  $AN = AG$ .

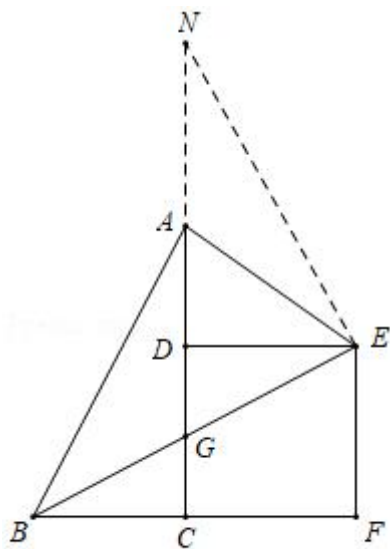


图3

$$\because AE = AG = AN,$$

$$\therefore \angle GEN = 90^\circ,$$

由 (1) 可知,  $\triangle NDE \cong \triangle BFR$ ,

$$\therefore ND = BF,$$

设  $CD = DE = EF = CF = x$ , 则  $AD = 12 - x$ ,  $DN = BF = 5 + x$ ,

$$\therefore AN = AE = 5 + x - (12 - x) = 2x - 7,$$

在  $\text{Rt}\triangle ADE$  中,  $\because AE^2 = AD^2 + DE^2$ ,

$$\therefore x^2 + (12 - x)^2 = (2x - 7)^2,$$

$$\therefore x = 1 + \frac{\sqrt{194}}{2} \text{ 或 } 1 - \frac{\sqrt{194}}{2} \text{ (舍去)},$$

$$\therefore CD = 1 + \frac{\sqrt{194}}{2}.$$

**【点评】** 本题属于相似三角形综合题, 考查了相似三角形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质, 正方形的性质等知识, 解题的关键是正确寻找相似三角形或全等三角形解决问题, 属于中考压轴题.