

2017 年上海市徐汇区中考数学二模试卷

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的】

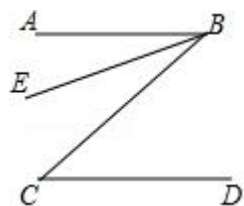
1. (4 分) 如果数轴上表示 2 和 -4 的两点分别是点 A 和点 B，那么点 A 和点 B 之间的距离是 ()

- A. -2 B. 2 C. -6 D. 6 .

2. (4 分) 已知点 M ($1-2m$, $m-1$) 在第四象限内，那么 m 的取值范围是 ()

- A. $m > 1$ B. $m < \frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2} < m < 1$ D. $m < \frac{1}{2}$ 或 $m > 1$

3. (4 分) 如图， $AB \parallel CD$ ，BE 平分 $\angle ABC$ ， $\angle C = 36^\circ$ ，那么 $\angle ABE$ 的大小是 ()

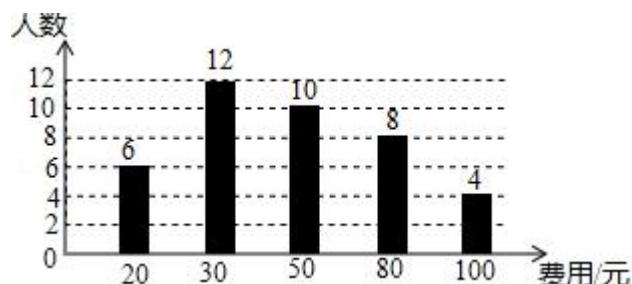


- A. 18° B. 24° C. 36° D. 54° .

4. (4 分) 已知直线 $y = ax + b$ ($a \neq 0$) 经过点 A (-3 , 0) 和点 B (0 , 2)，那么关于 x 的方程 $ax + b = 0$ 的解是 ()

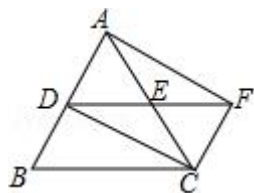
- A. $x = -3$ B. $x = -1$ C. $x = 0$ D. $x = 2$

5. (4 分) 某校开展“阅读季”活动，小明调查了班级里 40 名同学计划购书的花费情况，并将结果绘制成如图所示的条形统计图，根据图中相关信息，这次调查获取的样本数据的众数和中位数分别是 ()



- A. 12 和 10 B. 30 和 50 C. 10 和 12 D. 50 和 30.

6. (4 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=BC$, 点 D 、 E 分别是边 AB 、 AC 的中点, 延长 DE 到 F , 使得 $EF=DE$, 那么四边形 $ADCF$ 是 ()



- A. 等腰梯形 B. 直角梯形 C. 矩形 D. 菱形

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

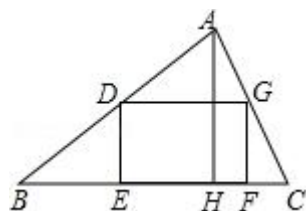
7. (4 分) 人体中成熟的红细胞的平均直径为 0.0000077m , 0.0000077 用科学记数法表示为_____.
8. (4 分) 方程 $\sqrt{x^2 - x} = \sqrt{2}$ 的解是_____.
9. (4 分) 如果反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象经过点 $P(-1, 4)$, 那么 k 的范围是_____.
10. (4 分) 如果关于 x 的方程 $x^2 + 3x - k = 0$ 有两个不相等的实数根, 那么 k 的取值范围是_____.
11. (4 分) 将抛物线 $y = x^2 - 2x + 1$ 向上平移 2 个单位后, 所得抛物线的顶点坐标是_____.
12. (4 分) 在实数 $\sqrt{5}$, π , 3° , $\tan 60^\circ$, 2 中, 随机抽取一个数, 抽得的数大于 2 的概率是_____.
13. (4 分) 甲, 乙, 丙, 丁四名跳高运动员赛前几次选拔赛成绩如表所示, 根据表中的信息, 如果要从中, 选择一名成绩好又发挥稳定的运动员参加比赛, 那么应选_____.

	甲	乙	丙	丁
平均数 (cm)	185	180	185	180

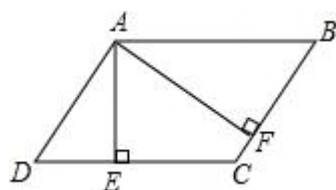
方差	3.6	3.6	7.9	8.2
----	-----	-----	-----	-----

14. (4 分) 如果 t 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的根, 那么代数式 $2t^2 - 4t$ 的值是_____.

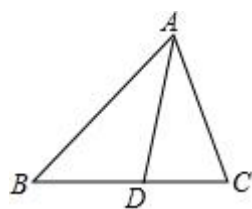
15. (4 分) 如图, 四边形 $DEFG$ 是 $\triangle ABC$ 的内接矩形, 其中 D 、 G 分别在边 AB 、 AC 上, 点 E 、 F 在边 BC 上, $DG = 2DE$, AH 是 $\triangle ABC$ 的高, $BC = 20$, $AH = 15$, 那么矩形 $DEFG$ 的周长是_____.



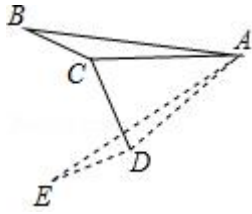
16. (4 分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AE \perp CD$, 垂足为 E , $AF \perp BC$, 垂足为 F , $AD = 4$, $BF = 3$, $\angle EAF = 60^\circ$, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, 如果向量 $\overrightarrow{CE} = k\vec{a}$ ($k \neq 0$), 那么 k 的值是_____.



17. (4 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 平分 $\angle BAC$ 交边 BC 于点 D , $BD = AD$, $AB = 3$, $AC = 2$, 那么 AD 的长是_____.



18. (4 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = \alpha$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$), 将 $\triangle ABC$ 绕着点 A 逆时针旋转 2β ($0^\circ < \beta < 90^\circ$) 后得 $\triangle AED$, 其中点 E 、 D 分别和点 B 、 C 对应, 联结 CD , 如果 $CD \perp ED$, 请写出一个关于 α 与 β 的等量关系的式子_____.



三、(本大题共 7 题, 第 19-22 题每题 10 分; 第 23、24 每题 12 分; 第 25 题 14 分; 满分 78 分)

19. (10 分) 先化简, 再求值: $\frac{a^2-3a}{a^2+a} \div \frac{a-3}{a^2-1} - \frac{3a+3}{a+1}$ (其中 $a = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$)

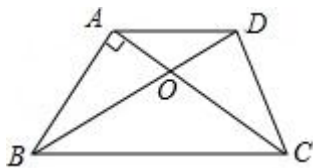
20. (10 分) 解方程组:
$$\begin{cases} x-2y=3 \\ 4x^2-12xy+9y^2=16 \end{cases}$$

21. (10 分) 某足球特色学校在商场购买甲、乙两种品牌的足球. 已知乙种足球比甲种足球每只贵 20 元, 该校分别花费 2000 元、1400 元购买甲、乙两种足球, 这样购得甲种足球的数量是购得乙种足球数量的 2 倍, 求甲、乙两种足球的单价各是多少元?

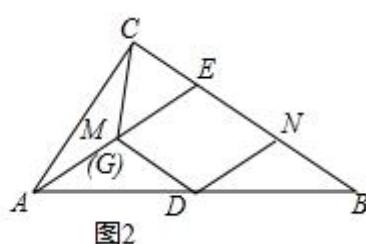
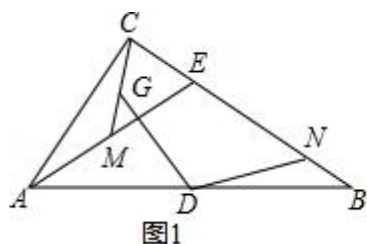
22. (10 分) 如图, 已知梯形 ABCD 中, $AD \parallel BC$, AC、BD 相交于点 O, $AB \perp AC$, $AD=CD$, $AB=3$, $BC=5$. 求:

(1) $\tan \angle ACD$ 的值;

(2) 梯形 ABCD 的面积.



23. (12 分) 如图 1, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, 点 D 是边 AB 的中点, 点 E 在边 BC 上, $AE=BE$, 点 M 是 AE 的中点, 联结 CM, 点 G 在线段 CM 上, 作 $\angle GDN = \angle AEB$ 交边 BC 于 N.



(1) 如图 2, 当点 G 和点 M 重合时, 求证: 四边形 DMEN 是菱形;

(2) 如图 1, 当点 G 和点 M、C 不重合时, 求证: $DG=DN$.

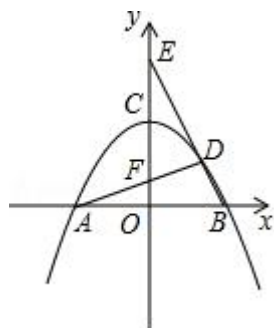
24. (12 分) 如图, 已知抛物线 $y=ax^2+4$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 A 和点 B (2, 0), 与 y 轴交于点 C, 点 D 是抛物线在第一象限的点.

(1) 当 $\triangle ABD$ 的面积为 4 时,

①求点 D 的坐标;

②联结 OD, 点 M 是抛物线上的点, 且 $\angle MDO = \angle BOD$, 求点 M 的坐标;

(2) 直线 BD、AD 分别与 y 轴交于点 E、F, 那么 $OE+OF$ 的值是否变化, 请说明理由.



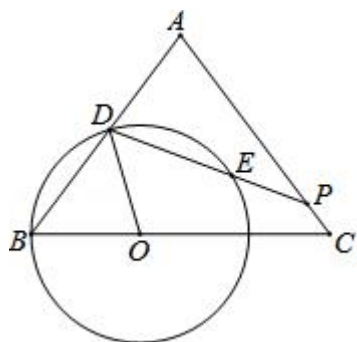
25. (14 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=5$, $BC=6$, 点 O 是边 BC 上的动点, 以点 O 为圆心, OB 为半径作圆 O, 交 AB 边于点 D, 过点 D 作 $\angle ODP = \angle B$, 交边 AC 于点 P, 交圆 O 与点 E. 设 $OB=x$.

(1) 当点 P 与点 C 重合时, 求 PD 的长;

(2) 设 $AP - EP = y$, 求 y 关于 x 的解析式及定义域;

(3) 联结 OP, 当 $OP \perp OD$ 时, 试判断以点 P 为圆心, PC 为半径的圆 P 与圆

O 的位置关系.



2017 年上海市徐汇区中考数学二模试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）【下列各题的四个选项中，有且只有一个选项是正确的】

1. (4 分) 如果数轴上表示 2 和 -4 的两点分别是点 A 和点 B，那么点 A 和点 B 之间的距离是 ()
- A. -2 B. 2 C. -6 D. 6 .

【考点】13: 数轴.

【分析】本题可以采用两种方法：(1) 在数轴上直接数出表示 -4 和表示 2 的两点之间的距离.

(2) 用较大的数减去较小的数.

【解答】解：根据较大的数减去较小的数得： $2 - (-4) = 6$,

故选：D.

【点评】本题考查了数轴，掌握数轴上两点间的距离的计算方法是解题的关键.

2. (4 分) 已知点 M ($1 - 2m$, $m - 1$) 在第四象限内，那么 m 的取值范围是 ()
- A. $m > 1$ B. $m < \frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2} < m < 1$ D. $m < \frac{1}{2}$ 或 $m > 1$

【考点】CB: 解一元一次不等式组；D1: 点的坐标.

【分析】根据坐标系内点的横纵坐标符号特点列出关于 m 的不等式组求解可得.

【解答】解：根据题意，可得：
$$\begin{cases} 1-2m > 0 & \text{①} \\ m-1 < 0 & \text{②} \end{cases}$$

解不等式①，得： $m < \frac{1}{2}$,

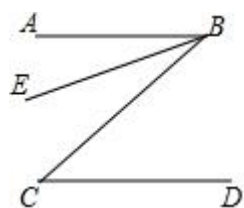
解不等式②，得： $m < 1$,

$\therefore m < \frac{1}{2}$,

故选：B.

【点评】本题考查的是解一元一次不等式组，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

3. (4 分) 如图， $AB \parallel CD$ ， BE 平分 $\angle ABC$ ， $\angle C=36^\circ$ ，那么 $\angle ABE$ 的大小是 ()



- A. 18° B. 24° C. 36° D. 54° .

【考点】IJ：角平分线的定义；JA：平行线的性质.

【分析】先根据平行线的性质，得出 $\angle ABC=36^\circ$ ，再根据 BE 平分 $\angle ABC$ ，即可得出 $\angle ABE=\frac{1}{2}\angle ABC$.

【解答】解： $\because AB \parallel CD$ ， $\angle C=36^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABC=36^\circ,$$

又 $\because BE$ 平分 $\angle ABC$ ，

$$\therefore \angle ABE=\frac{1}{2}\angle ABC=18^\circ,$$

故选：A.

【点评】本题主要考查了平行线的性质，解题时注意：两直线平行，内错角相等.

4. (4 分) 已知直线 $y=ax+b$ ($a \neq 0$) 经过点 A (-3, 0) 和点 B (0, 2)，那么关于 x 的方程 $ax+b=0$ 的解是 ()

- A. $x=-3$ B. $x=-1$ C. $x=0$ D. $x=2$

【考点】FC：一次函数与一元一次方程.

【分析】直线 $y=ax+b$ 与 x 轴交点的横坐标的值即为关于 x 的方程 $ax+b=0$ 的解.

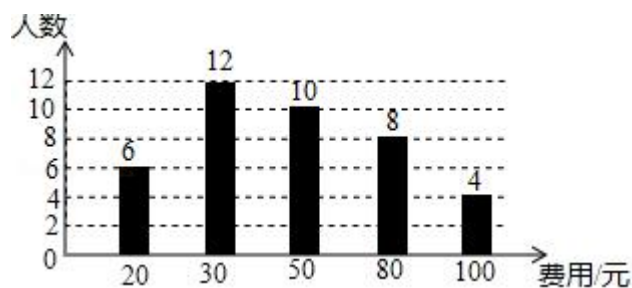
【解答】解：∵直线 $y=ax+b$ ($a \neq 0$) 经过点 A (-3, 0),

∴关于 x 的方程 $ax+b=0$ 的解是 $x=-3$.

故选：A.

【点评】本题主要考查了一次函数与一元一次方程的关系. 任何一元一次方程都可以转化为 $ax+b=0$ (a, b 为常数, $a \neq 0$) 的形式, 所以解一元一次方程可以转化为: 当某个一次函数的值为 0 时, 求相应的自变量的值. 从图象上看, 相当于已知直线 $y=ax+b$ 确定它与 x 轴的交点的横坐标的值.

5. (4 分) 某校开展“阅读季”活动, 小明调查了班级里 40 名同学计划购书的花费情况, 并将结果绘制成如图所示的条形统计图, 根据图中相关信息, 这次调查获取的样本数据的众数和中位数分别是 ()



- A. 12 和 10 B. 30 和 50 C. 10 和 12 D. 50 和 30.

【考点】VC: 条形统计图; W4: 中位数; W5: 众数.

【分析】众数就是出现次数最多的数, 据此即可判断, 中位数就是大小处于中间位置的数, 根据定义判断.

【解答】解: 这组数据中 30 元出现次数最多, 故众数是: 30 元;

40 个数据中位数是第 20 个数据 50 元与第 21 个数据 50 元的平均数, 故中位数是: 50 元.

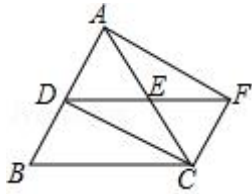
故选: B.

【点评】本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用, 读懂统计图, 从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示

出每个项目的数据.

6. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=BC$, 点D、E分别是边AB、AC的中点,

延长DE到F, 使得 $EF=DE$, 那么四边形ADCF是 ()



- A. 等腰梯形 B. 直角梯形 C. 矩形 D. 菱形

【考点】 L9: 菱形的判定; LC: 矩形的判定; LI: 直角梯形.

【分析】 先证明四边形ADCF是平行四边形, 再证明 $AC=DF$ 即可.

【解答】 解: $\because E$ 是 AC 中点,

$$\therefore AE=EC,$$

$$\therefore DE=EF,$$

$\therefore$ 四边形ADCF是平行四边形,

$$\therefore AD=DB, AE=EC,$$

$$\therefore DE=\frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore DF=BC,$$

$$\therefore CA=CB,$$

$$\therefore AC=DF,$$

$\therefore$ 四边形ADCF是矩形;

故选: C.

【点评】 本题考查了矩形的判定、等腰三角形的性质、平行四边形的判定、三角形中位线定理; 熟记对角线相等的平行四边形是矩形是解决问题的关键.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. (4分) 人体中成熟的红细胞的平均直径为 0.0000077m , 0.0000077 用科学记数法表示为 7.7×10^{-6} .

【考点】1J: 科学记数法—表示较小的数.

【分析】绝对值小于 1 的正数也可以利用科学记数法表示, 一般形式为 $a \times 10^{-n}$, 与较大数的科学记数法不同的是其所使用的是负指数幂, 指数由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

【解答】解: $0.0000077 = 7.7 \times 10^{-6}$,

故答案为: 7.7×10^{-6} .

【点评】本题考查用科学记数法表示较小的数, 一般形式为 $a \times 10^{-n}$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

8. (4分) 方程 $\sqrt{x^2 - x} = \sqrt{2}$ 的解是 $x_1 = 2, x_2 = -1$.

【考点】AG: 无理方程.

【分析】将方程两边平方整理得到关于 x 的一元二次方程, 然后求解即可.

【解答】解: 方程两边平方得, $x^2 - x = 2$,

整理得, $x^2 - x - 2 = 0$,

解得 $x_1 = 2, x_2 = -1$,

经检验, $x_1 = 2, x_2 = -1$ 都是原方程的根,

所以, 方程的解是 $x_1 = 2, x_2 = -1$.

故答案为: $x_1 = 2, x_2 = -1$.

【点评】本题主要考查解无理方程的知识点, 去掉根号把无理式化成有理方程是解题的关键, 注意观察方程的结构特点, 把无理方程转化成一元二次方程的形式进行解答, 需要同学们仔细掌握.

9. (4分) 如果反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象经过点 $P(-1, 4)$, 那么 k 的

范围是 -4.

【考点】G6: 反比例函数图象上点的坐标特征.

【分析】直接把点 $P(-1, 4)$ 代入反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$), 求出 k 的值即可.

【解答】解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象经过点 $P(-1, 4)$,

$\therefore 4 = \frac{k}{-1}$, 解得 $k = -4$.

故答案为: -4 .

【点评】本题考查的是反比例函数图象上点的坐标特点, 熟知反比例函数图象上各点的坐标一定适合此函数的解析式是解答此题的关键.

10. (4分) 如果关于 x 的方程 $x^2 + 3x - k = 0$ 有两个不相等的实数根, 那么 k 的取值范围是 $k > -\frac{9}{4}$.

【考点】AA: 根的判别式.

【专题】11: 计算题.

【分析】利用判别式的意义得到 $\Delta = 3^2 - 4(-k) > 0$, 然后解不等式即可.

【解答】解: 根据题意得 $\Delta = 3^2 - 4(-k) > 0$,

解得 $k > -\frac{9}{4}$.

故答案为 $k > -\frac{9}{4}$.

【点评】本题考查了根的判别式: 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系: 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的两个实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的两个实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数根.

11. (4分) 将抛物线 $y = x^2 - 2x + 1$ 向上平移 2 个单位后, 所得抛物线的顶点坐标是 $(1, 2)$.

【考点】H6: 二次函数图象与几何变换.

【分析】根据配方法先化为顶点式, 再根据上加下减左加右减的原则得出解析式,

最后确定顶点坐标即可.

【解答】解: $y=x^2-2x+1=(x-1)^2$,

平移后的解析式为 $y=(x-1)^2+2$,

$\therefore$ 顶点的坐标为 $(1, 2)$,

故答案为 $(1, 2)$.

【点评】本题考查了二次函数的图象与几何变换, 掌握用配方法把一般式化为顶点式以及顶点坐标的求法是解题的关键.

12. (4 分) 在实数 $\sqrt{5}$, π , 3° , $\tan 60^\circ$, 2 中, 随机抽取一个数, 抽得的数大于 2 的概率是 $\frac{2}{5}$.

【考点】X4: 概率公式.

【分析】先找出大于 2 的数, 再根据概率公式即可得出答案.

【解答】解: 在实数 $\sqrt{5}$, π , 3° , $\tan 60^\circ$, 2 中, 大于 2 的数有 $\sqrt{5}$, π ,
则抽得的数大于 2 的概率是 $\frac{2}{5}$;
故答案为: $\frac{2}{5}$.

【点评】本题考查了概率的知识. 用到的知识点为: 概率=所求情况数与总情况数之比.

13. (4 分) 甲, 乙, 丙, 丁四名跳高运动员赛前几次选拔赛成绩如表所示, 根据表中的信息, 如果要从中, 选择一名成绩好又发挥稳定的运动员参加比赛, 那么应选 甲.

	甲	乙	丙	丁
平均数 (cm)	185	180	185	180
方差	3.6	3.6	7.9	8.2

【考点】W2: 加权平均数; W7: 方差.

【分析】先确定平均数较大的运动员, 再选出方差较小的运动员.

【解答】解：因为甲的平均数较大，且甲的方差较小，比较稳定，
所以选择甲参加比赛.

故答案为：甲.

【点评】本题考查了方差：方差是反映一组数据的波动大小的一个量. 方差越大，
则平均值的离散程度越大，稳定性也越小；反之，则它与其平均值的离散程
度越小，稳定性越好

14. (4 分) 如果 t 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的根，那么代数式 $2t^2 - 4t$ 的值是 2.

【考点】A3：一元二次方程的解.

【专题】11：计算题.

【分析】根据一元二次方程的解的定义得到 $t^2 - 2t - 1 = 0$ ，则 $t^2 - 2t = 1$ ，然后利
用整体代入的方法计算代数式 $2t^2 - 4t$ 的值.

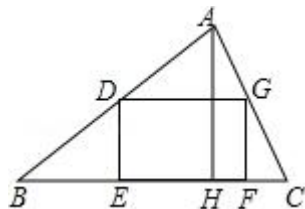
【解答】解：当 $x=t$ 时， $t^2 - 2t - 1 = 0$ ，则 $t^2 - 2t = 1$ ，

所以 $2t^2 - 4t = 2(t^2 - 2t) = 2$.

故答案为 2.

【点评】本题考查了一元二次方程的解：能使一元二次方程左右两边相等的未知
数的值是一元二次方程的解.

15. (4 分) 如图，四边形 DEFG 是 $\triangle ABC$ 的内接矩形，其中 D、G 分别在边
AB，AC 上，点 E、F 在边 BC 上， $DG = 2DE$ ，AH 是 $\triangle ABC$ 的高， $BC = 20$ ，
 $AH = 15$ ，那么矩形 DEFG 的周长是 36.



【考点】LB：矩形的性质；S9：相似三角形的判定与性质.

【分析】根据相似三角形的判定和性质结论得到结论.

【解答】解： $\because DG \parallel BC$ ， $AH \perp BC$ ，

$$\therefore AH \perp DG, \triangle ADG \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DG}{BC} = \frac{AH-DE}{AH}, \text{ 即 } \frac{2DE}{20} = \frac{15-DE}{15},$$

$$\therefore DE=6,$$

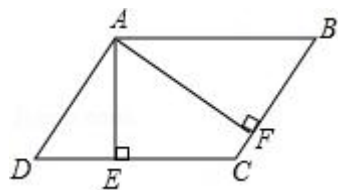
$$\therefore DG=2DE=12,$$

$$\therefore \text{矩形 DEFG 的周长} = 2 \times (6+12) = 36.$$

故答案为：36.

【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质，矩形的性质，熟练掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键.

16. (4 分) 如图，在平行四边形 ABCD 中， $AE \perp CD$ ，垂足为 E， $AF \perp BC$ ，垂足为 F， $AD=4$ ， $BF=3$ ， $\angle EAF=60^\circ$ ，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ，如果向量 $\overrightarrow{CE} = k\vec{a}$ ($k \neq 0$)，那么 k 的值是 $-\frac{2}{3}$.



【考点】 L5：平行四边形的性质；LM：*平面向量.

【分析】 根据 $AE \perp CD$ 、 $AF \perp BC$ 及 $\angle EAF=60^\circ$ 可得 $\angle C=120^\circ$ ，由平行四边形得出 $\angle B=\angle D=60^\circ$ 、 $AB \parallel CD$ 且 $AB=CD$ ，利用三角函数求得 $DE=2$ 、 $AB=6$ ， $CE=4$ ，最后可得 $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{DC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

【解答】 解： $\because AE \perp CD$ 、 $AF \perp BC$,

$$\therefore \angle AEC = \angle AFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 360^\circ - \angle AEC - \angle AFC = 120^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 ABCD 是平行四边形,

$$\therefore \angle B = \angle D = 60^\circ,$$

$$\therefore DE = AD \cos D = 4 \times \frac{1}{2} = 2, \quad AB = \frac{BF}{\cos B} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6,$$

$$\text{则 } CE = CD - DE = AB - DE = 6 - 2 = 4,$$

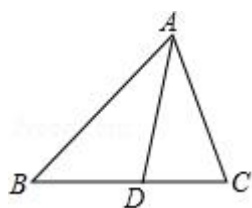
$$\therefore AB \parallel CD, \text{ 且 } AB = CD,$$

$$\therefore \vec{CE} = \frac{2}{3} \vec{CD} = -\frac{2}{3} \vec{DC} = -\frac{2}{3} \vec{AB} = -\frac{2}{3} \vec{a},$$

$$\text{故答案为: } -\frac{2}{3}.$$

【点评】 本题主要考查四边形内角和、平行四边形的性质、三角函数的应用及平面向量的计算，熟练掌握平行四边形的性质是解题的关键.

17. (4分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 平分 $\angle BAC$ 交边 BC 于点 D , $BD=AD$, $AB=3$, $AC=2$, 那么 AD 的长是 $\frac{3}{5}\sqrt{10}$.



【考点】 S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】 根据题意得到 $\triangle ACD \sim \triangle BCA$, 然后根据题目中的数据即可求得 AD 的长.

【解答】 解: $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, AD 平分 $\angle BAC$ 交边 BC 于点 D , $BD=AD$,

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD, \quad \angle BAD = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle CAD,$$

$$\text{又 } \because \angle ACD = \angle BCA,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{AD}{BA} = \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC},$$

$$\therefore BD = AD, \quad AB = 3, \quad AC = 2,$$

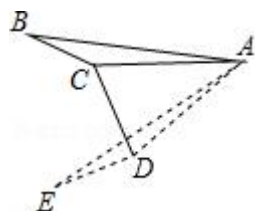
$$\therefore \frac{AD}{3} = \frac{2}{BD+CD} = \frac{CD}{2},$$

$$\text{解得, } AD = \frac{3\sqrt{10}}{5}, \quad CD = \frac{2\sqrt{10}}{5},$$

$$\text{故答案为: } \frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

【点评】本题考查相似三角形的判定与性质，解答本题的关键是明确题意，找出三角形相似的条件。

18. (4分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = \alpha$ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$)，将 $\triangle ABC$ 绕着点A逆时针旋转 2β ($0^\circ < \beta < 90^\circ$)后得 $\triangle AED$ ，其中点E、D分别和点B、C对应，联结CD，如果 $CD \perp ED$ ，请写出一个关于 α 与 β 的等量关系的式子
- $$\alpha + \beta = 180^\circ.$$



【考点】K7：三角形内角和定理；KH：等腰三角形的性质；R2：旋转的性质。

【分析】先过A作 $AF \perp CD$ ，根据旋转的性质，得出 $\angle ADE = \angle ACB = \alpha$ ， $AC = AD$ ， $\angle CAD = 2\beta$ ，再根据等腰三角形的性质，即可得到 $Rt\triangle ADF$ 中， $\angle DAF + \angle ADF = \beta + \alpha - 90^\circ = 90^\circ$ ，据此可得 α 与 β 的等量关系。

【解答】解：如图，过A作 $AF \perp CD$ ，

由旋转可得， $\angle ADE = \angle ACB = \alpha$ ，

$$\because CD \perp DE,$$

$$\therefore \angle ADC = \alpha - 90^\circ,$$

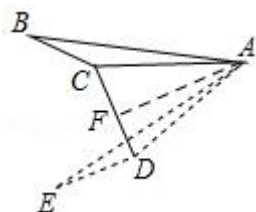
由旋转可得， $AC = AD$ ， $\angle CAD = 2\beta$ ，

$$\therefore \angle DAF = \beta,$$

∴ Rt△ADF 中, $\angle DAF + \angle ADF = 90^\circ$, 即 $\beta + \alpha - 90^\circ = 90^\circ$,

∴ $\alpha + \beta = 180^\circ$.

故答案为: $\alpha + \beta = 180^\circ$.



【点评】 本题主要考查了旋转的性质, 三角形内角和定理以及等腰三角形的性质的综合应用, 解决问题的关键是作辅助线构造直角三角形, 依据等腰三角形三线合一的性质进行计算.

三、(本大题共 7 题, 第 19-22 题每题 10 分; 第 23、24 每题 12 分; 第 25 题 14 分; 满分 78 分)

19. (10 分) 先化简, 再求值: $\frac{a^2-3a}{a^2+a} \div \frac{a-3}{a^2-1} - \frac{3a+3}{a+1}$ (其中 $a = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$)

【考点】 6D: 分式的化简求值.

【分析】 先算除法, 再算减法, 最后把 a 的值代入进行计算即可.

【解答】 解: 原式 $= \frac{a-3}{a+1} \cdot \frac{(a+1)(a-1)}{a-3} - \frac{3(a+1)}{a+1}$

$$= (a-1) - 3$$

$$= a - 1 - 3$$

$$= a - 4.$$

$$\text{当 } a = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \text{ 时, 原式} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - 4 = \sqrt{2} - 3.$$

【点评】 本题考查的是分式的化简求值, 此类题型的特点是: 利用方程解的定义找到相等关系, 再把所求的代数式化简后整理出所找到的相等关系的形式, 再把此相等关系整体代入所求代数式, 即可求出代数式的值.

20. (10 分) 解方程组:
$$\begin{cases} x-2y=3 \\ 4x^2-12xy+9y^2=16 \end{cases}$$

【考点】AF: 高次方程.

【分析】由②得出 $(2x - 3y)^2 = 16$, 求出 $2x - 3y = \pm 4$, 把原方程组转化成两个二元一次方程组, 求出方程组的解即可.

【解答】解:
$$\begin{cases} x - 2y = 3 & \text{①} \\ 4x^2 - 12xy + 9y^2 = 16 & \text{②} \end{cases}$$

由②得: $(2x - 3y)^2 = 16$,

$2x - 3y = \pm 4$,

即原方程组化为 $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = -2 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = -17 \\ y_2 = -10 \end{cases}$,

即原方程组的解为: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = -2 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = -17 \\ y_2 = -10 \end{cases}$.

【点评】本题考查了解高次方程组, 能把高次方程组转化成二元一次方程组是解此题的关键.

21. (10 分) 某足球特色学校在商场购买甲、乙两种品牌的足球. 已知乙种足球比甲种足球每只贵 20 元, 该校分别花费 2000 元、1400 元购买甲、乙两种足球, 这样购得甲种足球的数量是购得乙种足球数量的 2 倍, 求甲、乙两种足球的单价各是多少元?

【考点】B7: 分式方程的应用.

【分析】设购买一个甲品牌的足球需 x 元, 则购买一个乙品牌的足球需 $(x+20)$ 元, 根据购买甲种足球数量是购买乙种足球数量的 2 倍列出方程解答即可.

【解答】解: (1) 设购买一个甲种足球需要 x 元,

$$\frac{2000}{x} = \frac{1400}{x+20} \times 2,$$

解得, $x=50$,

经检验, $x=50$ 是原分式方程的解,

所以 $x+20=70$ (元),

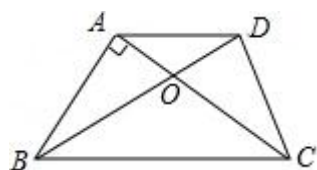
答: 购买一个甲种足球需 50 元, 一个乙种足球需 70 元.

【点评】 本题考查分式方程的应用, 关键是根据数量作为等量关系列出方程.

22. (10 分) 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, AC 、 BD 相交于点 O , $AB \perp AC$, $AD=CD$, $AB=3$, $BC=5$. 求:

(1) $\tan \angle ACD$ 的值;

(2) 梯形 $ABCD$ 的面积.



【考点】 LH: 梯形; T7: 解直角三角形.

【分析】 (1) 作 $DE \parallel AB$ 交 BC 于 E , 交 AC 于 M , 证出 $DE \perp AC$, 由等腰三角形的性质得出 $AM=CM$, 证明四边形 $ABED$ 是平行四边形, 得出 $DE=AB=3$, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, 由勾股定理求出 $AC=4$, 得出 $AM=CM=2$, 由平行线分线段成比例定理得出 $DM=EM=\frac{1}{2}DE=\frac{3}{2}$, 即可求出 $\tan \angle ACD=\frac{DM}{CM}=\frac{3}{4}$;

(2) 梯形 $ABCD$ 的面积 $= \triangle ABC$ 的面积 $+ \triangle ACD$ 的面积, 即可得出答案.

【解答】 解: (1) 作 $DE \parallel AB$ 交 BC 于 E , 交 AC 于 M , 如图所示:

$\because AB \perp AC$, $DE \parallel AB$,

$\therefore DE \perp AC$,

$\because AD=CD$,

$\therefore AM=CM$,

$\because AD \parallel BC$, $DE \parallel AB$,

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是平行四边形,

$$\therefore DE=AB=3,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, } AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4,$$

$$\therefore AM=CM=2,$$

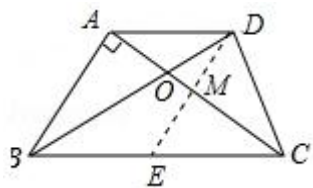
$$\therefore AD\parallel BC,$$

$$\therefore DM:EM=AM:CM=1:1,$$

$$\therefore DM=EM=\frac{1}{2}DE=\frac{3}{2},$$

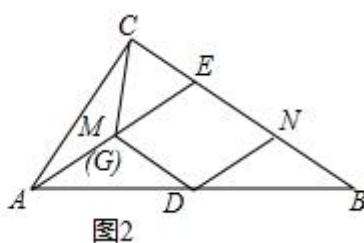
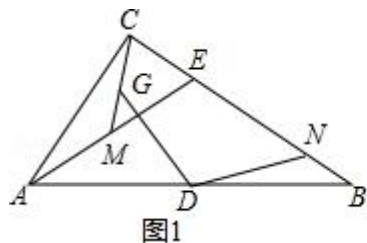
$$\therefore \tan \angle ACD=\frac{DM}{CM}=\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4};$$

$$(2) \text{ 梯形 } ABCD \text{ 的面积} = \triangle ABC \text{ 的面积} + \triangle ACD \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 + \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{2} = 9.$$



【点评】 本题考查了梯形的性质、等腰三角形的性质、勾股定理、平行线的性质、平行线分线段成比例定理、梯形和三角形面积的计算等知识；本题综合性强，有一定难度.

23. (12 分) 如图 1, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, 点 D 是边 AB 的中点, 点 E 在边 BC 上, $AE=BE$, 点 M 是 AE 的中点, 联结 CM , 点 G 在线段 CM 上, 作 $\angle GDN=\angle AEB$ 交边 BC 于 N .



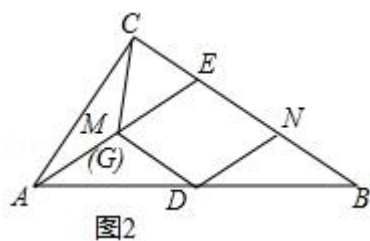
- (1) 如图 2, 当点 G 和点 M 重合时, 求证: 四边形 $DMEN$ 是菱形;
- (2) 如图 1, 当点 G 和点 M 、 C 不重合时, 求证: $DG=DN$.

【考点】LA: 菱形的判定与性质.

【分析】(1) 如图 2 中, 首先证明四边形 DMEN 是平行四边形, 再证明 $ME=MD$ 即可证明.

(2) 如图 1 中, 取 BE 的中点 F, 连接 DM、DF. 只要证明 $\triangle DMG \cong \triangle DFN$ 即可.

【解答】证明: (1) 如图 2 中,



$\therefore AM=ME$. $AD=DB$,

$\therefore DM \parallel BE$,

$\therefore \angle GDN + \angle DNE = 180^\circ$,

$\therefore \angle GDN = \angle AEB$,

$\therefore \angle AEB + \angle DNE = 180^\circ$,

$\therefore AE \parallel DN$,

$\therefore$ 四边形 DMEN 是平行四边形,

$\therefore DM = \frac{1}{2}BE$, $EM = \frac{1}{2}AE$, $AE=BE$,

$\therefore DM=EM$,

$\therefore$ 四边形 DMEN 是菱形.

(2) 如图 1 中, 取 BE 的中点 F, 连接 DM、DF.

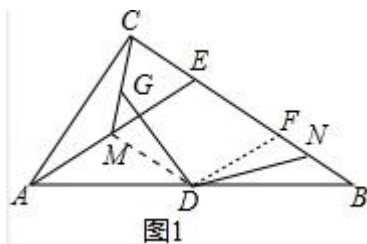


图1

由 (1) 可知四边形 EMDF 是菱形,

$$\therefore \angle AEB = \angle MDF, DM = DF,$$

$$\therefore \angle GDN = \angle AEB,$$

$$\therefore \angle MDF = \angle GDN,$$

$$\therefore \angle MDG = \angle FDN,$$

$$\therefore \angle DFN = \angle AEB = \angle MCE + \angle CME, \angle GMD = \angle EMD + \angle CME, \therefore$$

在 $Rt\triangle ACE$ 中, $\therefore AM = ME$,

$$\therefore CM = ME,$$

$$\therefore \angle MCE = \angle CEM = \angle EMD,$$

$$\therefore \angle DMG = \angle DFN,$$

$$\therefore \triangle DMG \cong \triangle DFN,$$

$$\therefore DG = DN.$$

【点评】 本题考查菱形的判定和性质、全等三角形的判定和性质、直角三角形斜边中线定理等知识, 解题的关键是学会添加常用辅助线, 构造全等三角形解决问题, 属于中考常考题型.

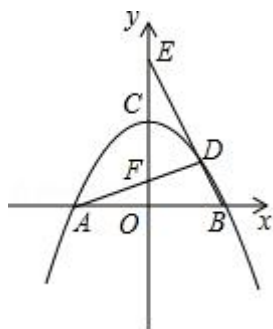
24. (12 分) 如图, 已知抛物线 $y = ax^2 + 4$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 A 和点 B (2, 0), 与 y 轴交于点 C , 点 D 是抛物线在第一象限的点.

(1) 当 $\triangle ABD$ 的面积为 4 时,

①求点 D 的坐标;

②联结 OD , 点 M 是抛物线上的点, 且 $\angle MDO = \angle BOD$, 求点 M 的坐标;

(2) 直线 BD、AD 分别与 y 轴交于点 E、F，那么 OE+OF 的值是否变化，请说明理由.



【考点】 HF: 二次函数综合题.

【分析】 (1) 先确定出抛物线解析式，①设出点 D 坐标，用三角形 ABD 的面积建立方程即可得出点 D 坐标；

②分点 M 在 OD 上方，利用内错角相等，两直线平行，即可得出点 M 的纵坐标，即可得出 M 的坐标，带你 M 在 OD 下方时，求出直线 DG 的解析式，和抛物线解析式联立求出直线和抛物线的交点即可判断不存在；

(2) 设出点 D 的坐标，利用平行线分线段成比例定理表示出 OE，OF 求和即可得出结论.

【解答】 解：(1) $\because$ 抛物线 $y=ax^2+4$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 A 和点 B (2, 0),

$$\therefore A(-2, 0), 4a+4=0,$$

$$\therefore a=-1, AB=4,$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y=-x^2+4,$$

$$\textcircled{1} \text{ 设 } D(m, -m^2+4),$$

$$\because \triangle ABD \text{ 的面积为 } 4,$$

$$\therefore 4 = \frac{1}{2} \times 4 \times (-m^2+4)$$

$$\therefore m = \pm \sqrt{2},$$

$$\because \text{点 } D \text{ 在第一象限},$$

$$\therefore m=\sqrt{2},$$

$$\therefore D(\sqrt{2}, 2),$$

②如图 1, 点 M 在 OD 上方时,

$$\because \angle MDO = \angle BOD, \therefore DM \parallel AB,$$

$$\therefore M(-\sqrt{2}, 2), \text{ 当 M 在 OD 下方时,}$$

设 DM 交 x 轴于 G, 设 G(n, 0),

$$\therefore OG=n,$$

$$\because D(\sqrt{2}, 2),$$

$$\therefore DG = \sqrt{(n-\sqrt{2})^2 + 4},$$

$$\because \angle MDO = \angle BOD,$$

$$\therefore OG=DG,$$

$$\therefore \sqrt{(n-\sqrt{2})^2 + 4} = n,$$

$$\therefore n = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore G\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right),$$

$$\therefore D(\sqrt{2}, 2),$$

$$\therefore \text{直线 DG 的解析式为 } y = -2\sqrt{2}x + 6 \text{ ①,}$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -x^2 + 4 \text{ ②,}$$

联立①②得, $x=\sqrt{2}$, $y=2$, 此时交点刚好是 D 点,

所以在 OD 下方不存在点 M.

(2) OE+OF 的值不发生变化,

理由: 如图 2, 过点 D 作 $DH \perp AB$ 于 H,

$$\therefore OF \parallel DH,$$

$$\therefore \frac{OF}{DH} = \frac{OA}{AH},$$

$$\text{设 } D(b, -b^2+4),$$

$$\therefore AH=b+2, DH=-b^2+4,$$

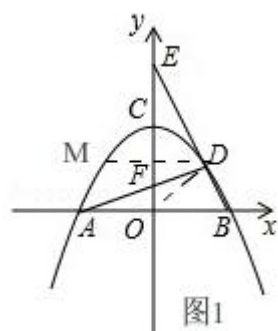
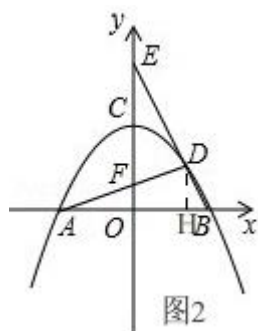
$$\therefore OA=2,$$

$$\therefore \frac{OF}{-b^2+4} = \frac{2}{b+2},$$

$$\therefore OF = \frac{2(-b^2+4)}{b+2} = 2(2-b),$$

$$\text{同理: } OE=2(2+b),$$

$$\therefore OE+OF=2(2-b)+2(2+b)=8.$$

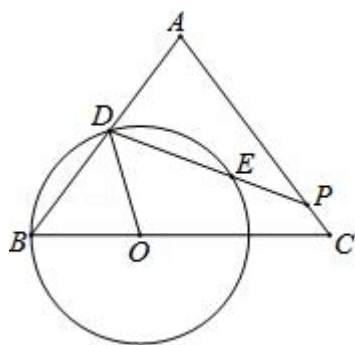


【点评】此题是二次函数综合题，主要考查了待定系数法，平行线的判定，平行线分线段成比例定理，解（1）的关键是求出抛物线解析式，难点是分情况求出点 M 的坐标，解（2）的关键是作出辅助线.

25. (14 分) 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=5$ ， $BC=6$ ，点 O 是边 BC 上的动点，以点 O 为圆心，OB 为半径作圆 O，交 AB 边于点 D，过点 D 作 $\angle ODP=$

$\angle B$, 交边 AC 于点 P , 交圆 O 与点 E . 设 $OB=x$.

- (1) 当点 P 与点 C 重合时, 求 PD 的长;
- (2) 设 $AP - EP = y$, 求 y 关于 x 的解析式及定义域;
- (3) 联结 OP , 当 $OP \perp OD$ 时, 试判断以点 P 为圆心, PC 为半径的圆 P 与圆 O 的位置关系.



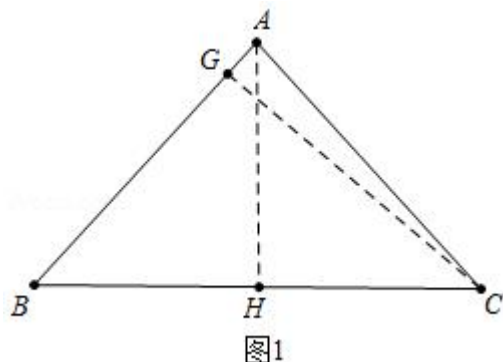
【考点】 MR: 圆的综合题.

【分析】 (1) 如图 1 中, 首先求出 $\cos \angle B$, $\cos \angle A$, 如图 2 中, 当点 P 与 C 重合时, 只要证明 $PA=PD$ 即可;

(2) 如图 2 中, 作 $CG \perp AB$ 于 G , $OH \perp BD$ 于 H . 分两种情形①当 $\frac{11}{6} \leq x \leq \frac{625}{234}$ 时, 如图 4 中. ②当 $\frac{625}{234} < x < \frac{25}{6}$ 时, 如图 5 中, 作 $PG \perp AB$ 于 G .

(3) 如图 6 中, 连接 OP . 根据 $\cos \angle C = \cos \angle B = \frac{PC}{OC} = \frac{3}{5}$, 列出方程, 求出两圆的半径, 圆心距即可判断.

【解答】 解: (1) 如图 1 中, 作 $AH \perp BC$ 于 H , $CG \perp AB$ 于 G ,

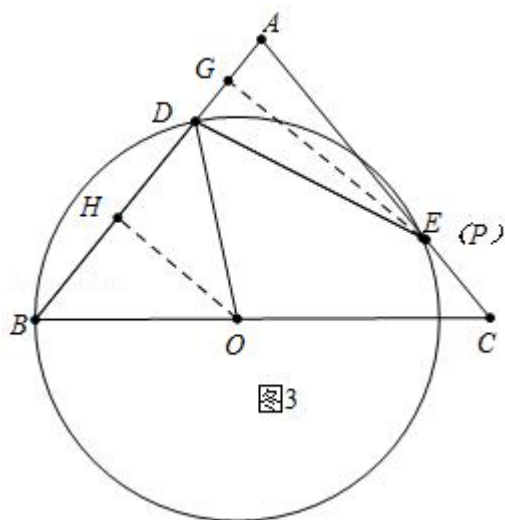


$$\therefore BD=2BH=2OB \cdot \cos \angle B = \frac{6}{5}x,$$

$$\therefore \frac{6}{5}x + \frac{14}{5} = 5,$$

$$\therefore x = \frac{11}{6},$$

如图 3 中, 当 P、E 重合时, 作 $EG \perp AD$ 于 G.



根据对称性可知, B、E 关于直线 OD 对称,

$$\therefore DB=DE=AE=\frac{6}{5}x,$$

$$\therefore \cos \angle A = \frac{7}{25} = \frac{AG}{AE},$$

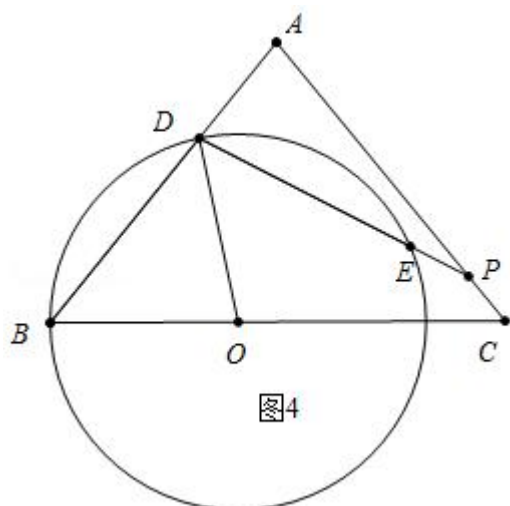
$$\therefore \frac{5 - \frac{6}{5}x}{\frac{6}{5}x} = \frac{7}{25},$$

$$\text{解得 } x = \frac{625}{234},$$

$$\text{当点 D 与 A 重合时 } \frac{6}{5}x = 5,$$

$$\therefore x = \frac{25}{6},$$

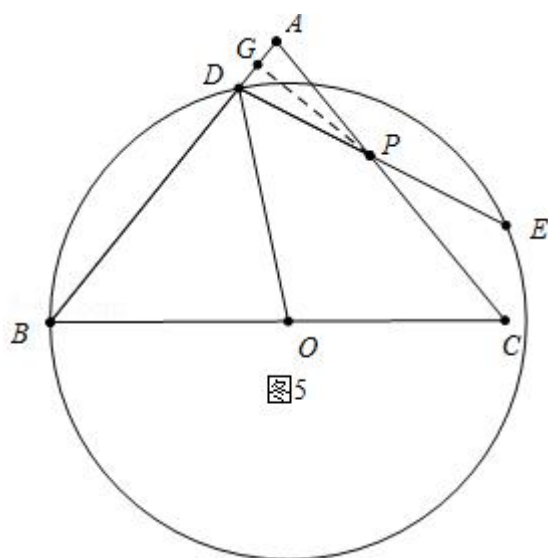
$$\text{当 } \frac{11}{6} \leq x \leq \frac{625}{234} \text{ 时, 如图 4 中,}$$



$$\therefore y = PA - PE = PD - PE = DE = BD = \frac{6}{5}x,$$

$$\therefore y = \frac{6}{5}x,$$

当 $\frac{625}{234} < x < \frac{25}{6}$ 时, 如图 5 中, 作 $PG \perp AB$ 于 G.



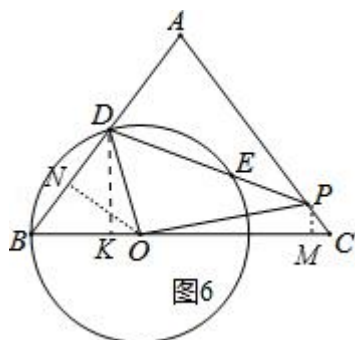
$$\therefore BD = DE = \frac{6}{5}x, \quad DG = AG = \frac{1}{2} \left(5 - \frac{6}{5}x \right),$$

$$\therefore AP = AG \div \cos \angle A = \frac{25}{14} \left(5 - \frac{6}{5}x \right),$$

$$\therefore y = AP - EP = \frac{25}{14} \left(5 - \frac{6}{5}x \right) - \left[\frac{6}{5}x - \frac{25}{14} \left(5 - \frac{6}{5}x \right) \right] = -\frac{192}{35}x + \frac{125}{7},$$

综上所述,
$$y = \begin{cases} \frac{6}{5}x & \left(\frac{11}{6} \leq x \leq \frac{625}{234} \right) \\ -\frac{192}{35}x + \frac{125}{7} & \left(\frac{625}{234} < x < \frac{25}{6} \right) \end{cases}.$$

(3) 如图 6 中，连接 OP.



连接 OP，作 $DK \perp OB$ ， $ON \perp BD$ 、 $PM \perp BC$ 于 M，设 $ON=4k$ ，则易知

$$OB=DO=5k, \quad BN=DN=3k,$$

$$DK=\frac{BD \cdot ON}{OB}=\frac{24}{5}k, \quad OP=\frac{20}{3}k,$$

$$\text{由 } \triangle DOK \sim \triangle OPM \text{ 可得 } OM=\frac{32}{5}k, \quad PM=\frac{28}{15}k, \text{ 可得 } PC=\frac{7}{3}k,$$

$$\therefore OD+PC=5k+\frac{7}{3}k=\frac{22}{3}k > \frac{20}{3}k,$$

$\therefore$ 以点 P 为圆心，PC 为半径的圆 P 与圆 O 的位置关系是相交.

【点评】 本题考查圆综合题、锐角三角函数、等腰三角形的判定和性质等知识，解题的关键是寻找特殊点解决问题，学会构建方程的解决问题，学会用分类讨论的思想思考问题，属于中考压轴题.